



Université de Béjaïa, Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil

# Cours de Dynamique Des Structures 2

Master 1 Génie Civil  
Option : Structures

Réalisé par :  
M<sup>me</sup> Seghir née Kada Ouassila  
Maître de conférences

## **Avant propos**

Le polycopié de cours Dynamique Des Structures II est destiné aux étudiants de niveaux première année Master en Génie civil, Option Structures, il se présente comme une continuité du cours Dynamique Des Structures I. Conformément au canevas de formation, le cours est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté soumis à des vibrations libres en introduisant les notions de fréquences et modes propres à travers l'analyse modale.

Le deuxième chapitre traite les vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté. D'abord la méthode de superposition modale est exposée, elle permet le calcul exact de la réponse des structures lorsque les forces sont exprimées par des fonctions temporelles. La méthode spectrale modale est ensuite présentée, elle est largement utilisée dans le calcul sismique lorsqu'on s'intéresse particulièrement à la réponse maximale. Dans ce cas l'excitation sismique est représentée par un spectre de réponse et la réponse maximale est issue de la combinaison des réponses modales maximales.

Dans le troisième et dernier chapitre, on introduit le comportement non linéaire des structures à travers l'analyse des structures par la méthode de la poussée progressive appelée Pushover. Elle permet, à travers un calcul statique non linéaire, d'évaluer la performance sismique d'une structure en estimant sa capacité et sa demande sismique.

# Table des matières

|                                                                                           |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>                     | <b>4</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                | 4         |
| 1.2 Fréquences propres de vibration . . . . .                                             | 5         |
| 1.3 Modes propres de vibration . . . . .                                                  | 6         |
| 1.4 Application . . . . .                                                                 | 7         |
| 1.5 Propriétés d'orthogonalité . . . . .                                                  | 11        |
| <b>2 Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>                    | <b>13</b> |
| 2.1 Méthode de superposition modale . . . . .                                             | 13        |
| 2.1.1 Équations découplées du mouvement non-amorti . . . . .                              | 16        |
| 2.1.2 Équations découplées du mouvement amorti . . . . .                                  | 17        |
| 2.1.3 Matrice amortissement C . . . . .                                                   | 19        |
| 2.1.4 Relation entre le déplacement généralisé et le déplacement<br>géométrique . . . . . | 19        |
| 2.1.5 Sommaire de l'analyse par superposition modale . . . . .                            | 20        |
| 2.1.6 Applications . . . . .                                                              | 22        |
| 2.2 Méthode spectrale modale - Analyse sismique . . . . .                                 | 32        |
| 2.2.1 Réponse maximale à une excitation sismique . . . . .                                | 32        |
| 2.2.2 Combinaison des réponses modales maximales . . . . .                                | 36        |
| 2.2.3 Sommaire de l'analyse spectrale modale . . . . .                                    | 37        |
| 2.2.4 Application . . . . .                                                               | 38        |
| <b>3 Méthode d'analyse statique non-linéaire : Pushover</b>                               | <b>42</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                                | 42        |
| 3.2 Modélisation du comportement non-linéaire . . . . .                                   | 43        |
| 3.3 Principe de la méthode Pushover . . . . .                                             | 43        |
| 3.3.1 Capacité sismique d'une structure . . . . .                                         | 44        |

|       |                                     |    |
|-------|-------------------------------------|----|
| 3.3.2 | Système équivalent à 1ddl . . . . . | 44 |
| 3.3.3 | Demande sismique . . . . .          | 47 |
| 3.3.4 | Performance sismique . . . . .      | 48 |
| 3.3.5 | Endommagement . . . . .             | 51 |
| 3.3.6 | Application . . . . .               | 51 |

# Chapitre 1

## Vibrations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

### 1.1 Introduction

Il est possible de déterminer les fréquences et les modes propres d'un système à  $N$  ddl après avoir défini ses caractéristiques de masse et de rigidité. Pour illustrer la notion de fréquence et mode propres, revenons au système à un degré de liberté. Il possède une seule période (fréquence, pulsation) propre qui représente le temps nécessaire pour effectuer un cycle de vibration lorsqu'il est soumis à des vibrations libres non-amorties. Aussi, il possède un seul mode de vibration qu'on peut voir comme étant l'allure de la déformation du système lorsqu'il vibre librement. Pour le système à 1 ddl de la figure 1.1, son mode de vibration est schématiquement représenté par sa déformée à un instant quelconque (le sens n'a aucune importance car le mouvement est cyclique).

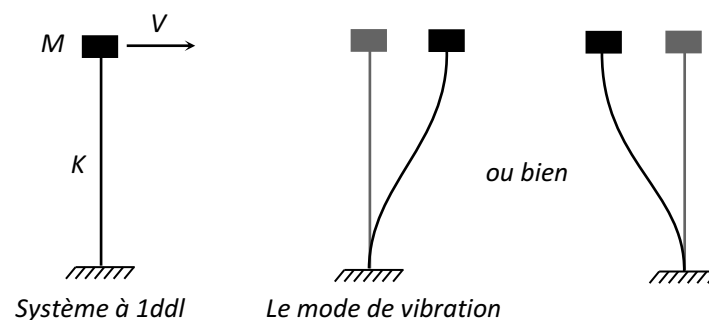


FIGURE 1.1 – mode de vibration d'un système à 1ddl

Un système à  $N$  ddl possède  $N$  fréquences propres et  $N$  modes propres. A chaque

fréquence correspond un mode de vibration.

## 1.2 Fréquences propres de vibration

L'équation de mouvement d'un système à  $N$  ddl soumis à des vibrations libres non amorties s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$M\ddot{V}(t) + KV(t) = 0 \quad (1.1)$$

$M$  et  $K$  sont les matrices masse et rigidité du système, elles sont d'ordre  $(N \times N)$  et  $V(t)$  est le vecteur déplacement, d'ordre  $N$ .

La solution de l'équation 1.1 est harmonique de la forme suivante :

$$V(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1.2)$$

$A$ , est le vecteur dont les composantes sont les amplitudes de vibration des ddl  $j$ . Il représente le mode de déformation du système.

$$V(t) = \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ \vdots \\ V_j(t) \\ \vdots \\ V_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \sin(\omega t + \theta) \\ A_2 \sin(\omega t + \theta) \\ \vdots \\ A_j \sin(\omega t + \theta) \\ \vdots \\ A_N \sin(\omega t + \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \theta) \quad (1.3)$$

En remplaçant la solution 1.2 dans l'équation 1.1, on obtient :

$$M(-\omega^2 A \sin(\omega t + \theta)) + KA \sin(\omega t + \theta) = 0$$

d'où :

$$[K - \omega^2 M] A \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad (1.4)$$

Pour que l'équation 1.4 puisse être vérifiée quelque soit  $t$ , c-à-d pour toutes les valeurs de la fonction sinus, il faut que :

$$[K - \omega^2 M] A = 0 \quad (1.5)$$

L'équation 1.5 n'admet de solution que si le déterminant de la matrice  $[K - \omega^2 M]$  est nul.

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (1.6)$$

En développant ce déterminant, on obtient un polynôme d'ordre  $N$  de  $\omega^2$ . Les  $N$  solutions sont les carrées des pulsations propres des  $N$  modes de vibration du système. Le mode correspondant à la plus petite valeur de pulsation (fréquence) est appelé "mode fondamental" ou premier mode, la pulsation suivante correspond au deuxième mode ainsi de suite.

### 1.3 Modes propres de vibration

Une fois les fréquences (pulsations) propres calculées, on peut déterminer les modes propres. Pour chaque pulsation  $\omega_i$  on peut calculer le mode de vibration correspondant  $A_i$  en reprenant l'équation 1.5.

$$\left[ K - \omega_i^2 M \right] A_i = 0 \quad (1.7)$$

Résoudre cette équation conduit à résoudre un système de  $N$  équations et  $N$  inconnues qui représentent les composantes du vecteur  $A_i$ .

Les vecteurs  $A_i$ , ( $i = 1, N$ ) représentent les vecteurs propres de l'équation 1.7. Pour un mode donnée  $i$  le vecteur  $A_i$  ne donne pas de valeurs réelles de déplacements mais juste la forme ou l'allure des déplacements lorsque la structure vibre selon le mode  $i$ .

En normalisant chaque vecteur  $A_i$  par rapport à sa première composante, on obtient un vecteur modal  $\phi_i$

$$A_i = \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{Ni} \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Normalisation} \Rightarrow \phi_i = \frac{1}{a_{1i}} \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{Ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ji} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

$\phi_i$  peut être directement obtenue par l'équation 1.9.

$$\left[ K - \omega_i^2 M \right] \phi_i = 0 \quad (1.9)$$

On peut remarquer que la première composante étant déjà connue (égale à un), il reste à résoudre l'équation 1.9, mais cette fois-ci en ayant  $(N - 1)$  inconnues.

La détermination des fréquences et modes propres d'une structures à  $N$  degrés de liberté revient à traiter un problème de valeurs et vecteurs propres. Les fréquences (pulsations) propres sont les racines carrées des valeurs propres, et les modes propres

sont les vecteurs propres. On peut avoir la matrice modale  $\Phi$  à partir des vecteurs modaux  $\phi_i, i = 1, N$ .

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \dots \phi_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \dots & \phi_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

## 1.4 Application

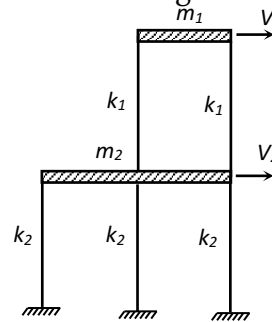
Soit le portique à deux ddl représenté sur la figure ci-après, les poteaux sont sans masse et les poutres de masses  $m_1$  et  $m_2$  sont infiniment rigides.

$$m_1 = 40 \text{ tonnes}$$

$$m_2 = 120 \text{ tonnes}$$

$$k_1 = 7 \times 10^3 \text{ KN/m}$$

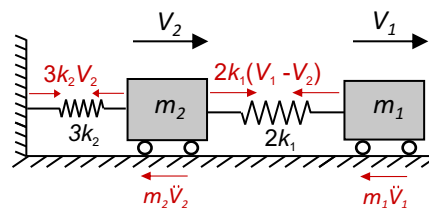
$$k_2 = 10^4 \text{ KN/m}$$



Calculer les fréquences et les modes propres de ce portique.

### Solution

Tout d'abord, il faut déterminer les matrices masse et rigidité du système. La matrice masse peut être directement déduite, elle est diagonale car les masses sont concentrées. On peut utiliser le modèle masses-ressorts pour écrire l'équation de mouvement du système, et déduire les matrices caractéristiques. Le modèle schématisé ci-dessous présente les forces qui agissent sur le système en vibrations libres pour  $V_1 > V_2$ .



l'équilibre des forces pour chaque masse donne le système suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{V}_1 + 2k_1(V_1 - V_2) = 0 \\ m_2 \ddot{V}_2 - 2k_1(V_1 - V_2) + 3k_2 V_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{V}_1 + 2k_1 V_1 - 2k_1 V_2 = 0 \\ m_2 \ddot{V}_2 - 2k_1 V_1 + (2k_1 + 3k_2)V_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation de mouvement sous forme matricielle est donnée par :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 & -2k_1 \\ -2k_1 & 2k_1 + 3k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les matrices caractéristiques du système sont :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 120 \end{bmatrix} (t)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k_1 & -2k_1 \\ -2k_1 & 2k_1 + 3k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -14 \\ -14 & 44 \end{bmatrix} \times 10^3 (KN/m)$$

*Remarque : A ce stade de la résolution, il faut vérifier que les matrices sont bien symétriques, sinon il y a erreur quelque part !*

**Fréquences propres :** Pour avoir les fréquence propres, il suffit de mettre le déterminant de la matrice  $[K - \omega^2 M]$  égal à 0.

*Remarque : Il faut faire attention au fait que les unités des masses et des rigidités soient compatibles.*

$$|K - \omega^2 M| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2k_1 - \omega^2 m_1 & -2k_1 \\ -2k_1 & (2k_1 + 3k_2) - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 14 \times 10^3 - \omega^2 40 & -14 \times 10^3 \\ -14 \times 10^3 & 44 \times 10^3 - \omega^2 120 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (14 \times 10^3 - \omega^2 40)(44 \times 10^3 - \omega^2 120) - (-14 \times 10^3)(-14 \times 10^3) = 0$$

On obtient alors un polynôme d'ordre 2 de  $\omega^2$

$$4.8(\omega^2)^2 - 3.44 \times 10^3 \omega^2 + 420 \times 10^3 = 0$$

Si on pose  $\lambda = \omega^2$ ,

$$4.8\lambda^2 - 3.44 \times 10^3 \lambda + 420 \times 10^3 = 0$$

on calcule le discriminant

$$\Delta = (-3.44 \times 10^3)^2 - 4 \times 4.8 \times 420 \times 10^3 = 3769.6 \times 10^3$$

L'équation admet donc deux solutions (réelles) :

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{3.44 \times 10^3 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 4.8} = 156.09 (rd/s)^2$$

et

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{3.44 \times 10^3 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 4.8} = 560.58 (rd/s)^2$$

*Remarque : même si on parle de fréquences propres, il suffit de donner les pulsations propres.*

Les fréquences propres du portique sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = 12.49 (rd/s) \\ \omega_2 = 23.67 (rd/s) \end{cases}$$

*Remarque : A ce stade, il faut classer les pulsations de la plus petite à la plus grande. La plus petite valeur correspond au mode fondamental ou au premier mode, la pulsation suivante correspond au deuxième mode.*

**Modes propres :** Il s'agit de calculer les deux vecteurs modaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  correspondants aux deux fréquences propres. Il suffit de résoudre l'équation  $[K - \omega_i^2 M]\phi_i = 0, i = 1, 2$ . Rappelons qu'on a fait le choix de normaliser ces vecteurs par rapport à la première composante.

**Premier mode**, correspondant à  $\omega_1 = 12.49 (rd/s)$  ( $\omega_1^2 = 156.09 (rd/s)^2$ )

$$[K - \omega_1^2 M]\phi_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 14 \times 10^3 - \omega_1^2 40 & -14 \times 10^3 \\ -14 \times 10^3 & -44 \times 10^3 - \omega_1^2 120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 7756.4 & -14000 \\ -14000 & 25269.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La première composante du vecteur étant connue (égale à 1), on a donc deux équations pour une seule inconnue ( $a$ ); en résoudre une seule est suffisant.

$$\begin{cases} 7756.4 \times 1 - 14000 \times a = 0 \\ -14000 \times 1 + 25269.2 \times a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0.55$$

D'où le vecteur modale du premier mode

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.55 \end{Bmatrix}$$

**Deuxième mode**, correspondant à  $\omega_2 = 23.67 \text{ (rd/s)}$  ( $\omega_1^2 = 560.58 \text{ (rd/s)}^2$ )

$$\begin{aligned}
 [K - \omega_2^2 M] \phi_2 &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 \times 10^3 - \omega_2^2 40 & -14 \times 10^3 \\ -14 \times 10^3 & -44 \times 10^3 - \omega_2^2 120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} -8423.2 & -14000 \\ -14000 & -23269.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

La valeur de  $b$  peut être retrouvée par l'une des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} -8423.2 \times 1 - 14000 \times b = 0 \\ -14000 \times 1 - 23269.6 \times b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -0.60$$

D'où le vecteur modale du deuxième mode

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.60 \end{Bmatrix}$$

On peut schématiser les modes de vibration tel que montré sur la figure 1.2.

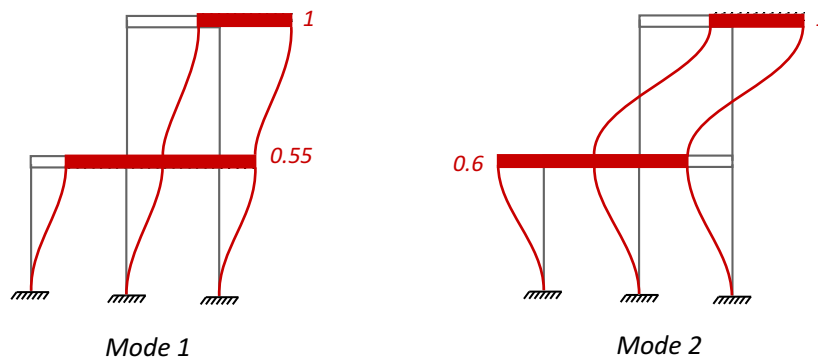


FIGURE 1.2 – Schématisation des deux modes de vibration

*Remarque : les valeurs des composantes des vecteurs modaux ne représentent pas des déplacements réels, elles ne fournissent que l'allure de la structure lorsqu'elle vibre. On voit bien que si le portique devait vibrer selon le premier mode uniquement, les poutres vont avoir un mouvement harmonique (cyclique) avec la pulsation  $\omega_1$  de sorte à ce qu'elles se déplacent dans le même sens, elles se retrouvent toujours du même côté par rapport à l'état initial. Par contre en vibrant selon le deuxième mode, les deux poutres vont avoir un mouvement harmonique avec la pulsation  $\omega_2$  dans deux sens opposés.*

Nous verrons dans le prochain chapitre que le mouvement d'un système est une combinaison des mouvements fournis par les différents modes de vibration.

## 1.5 Propriétés d'orthogonalité

Un système à  $N$  ddl possède  $N$  modes de vibrations. En considérant deux modes de vibration différents  $i$  et  $j$  correspondant à deux fréquences propres différentes ( $\omega_i \neq \omega_j$ ), on peut écrire l'équation 1.5 pour chacun des deux modes :

$$\begin{cases} [K - \omega_i^2 M] \phi_i = 0 \\ [K - \omega_j^2 M] \phi_j = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i \\ K \phi_j = \omega_j^2 M \phi_j \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.12a) \\ (1.12b) \end{matrix}$$

En multipliant à gauche l'équation 1.12a par la transposée du vecteur  $\phi_j$  on obtient :

$$\boxed{\phi_j^T K \phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T M \phi_i} \quad (1.13)$$

Puis on prend la transposée de l'équation 1.12b, de part et d'autre :

$$(K \phi_j)^T = \omega_j^2 (M \phi_j)^T \implies \phi_j^T K^T = \omega_j^2 \phi_j^T M^T \quad (1.14)$$

Sachant que les matrices  $M$  et  $K$  sont symétriques alors  $K = K^T$  et  $M = M^T$  et l'équation 1.14 devient :

$$\phi_j^T K = \omega_j^2 \phi_j^T M \quad (1.15)$$

En multipliant à droite l'équation 1.15 par  $\phi_i$  on obtient :

$$\boxed{\phi_j^T K \phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T M \phi_i} \quad (1.16)$$

Regardons les équations encadrées, en soustrayant l'équation 1.16 de l'équation 1.13 on trouve :

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_j^T M \phi_i \quad (1.17)$$

Sachant que  $\omega_i \neq \omega_j$ , alors  $\phi_j^T M \phi_i = 0$ , ce qui veut dire aussi que  $\phi_j^T K \phi_i = 0$ . Ces conditions sont appelées propriétés d'orthogonalité.

$$\text{Propriétés d'orthogonalité : } \left\{ \begin{array}{l} \phi_j^T M \phi_i = 0 \\ \phi_j^T K \phi_i = 0 \end{array} \right. \quad i \neq j \quad (1.18)$$

Elles sont d'un grand intérêt dans la résolution des équations de mouvement des systèmes à  $N$  ddl qui fera l'objet du prochain chapitre. On dit que les vecteurs modaux sont orthogonaux par rapport aux matrices  $M$  et  $K$ .

# Chapitre 2

## Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté

### 2.1 Méthode de superposition modale

L'équation de mouvement d'un système à  $N$  ddl s'écrit sous forme d'un système de  $N$  équations dites "couplées", c-à-d, chaque équation fait intervenir plusieurs inconnues (plusieurs ddl). On ne peut donc pas résoudre une équation indépendamment des autres.

Dans ce qui suit, nous allons découpler les équations de mouvement de sorte à avoir  $N$  équations mais chacune ne faisant intervenir qu'une seule inconnue, ce qui rend les équations indépendantes les unes des autres, ceci permet de résoudre chaque équation indépendamment des autres. Le découplage des équations de mouvement se fait à travers les modes de vibrations.

Les  $N$  modes de vibration représentent les  $N$  allures de déformation (déplacement) indépendantes du système. L'exemple de la figure 2.1 illustre les trois modes de vibration d'un système à trois ddl, les vecteurs modaux sont normalisés par rapport à la première composante.

Pour chaque mode de vibration ( $i$ ), le vecteur déplacement  $V^{(i)}(t)$  est donné par le produit  $\phi_i y_i(t)$ , du  $i^{\text{ème}}$  vecteur modal  $\phi_i$  par l'amplitude modale  $y_i(t)$ . Les composantes de ce vecteur sont les déplacements des ddl associés au mode ( $i$ ).

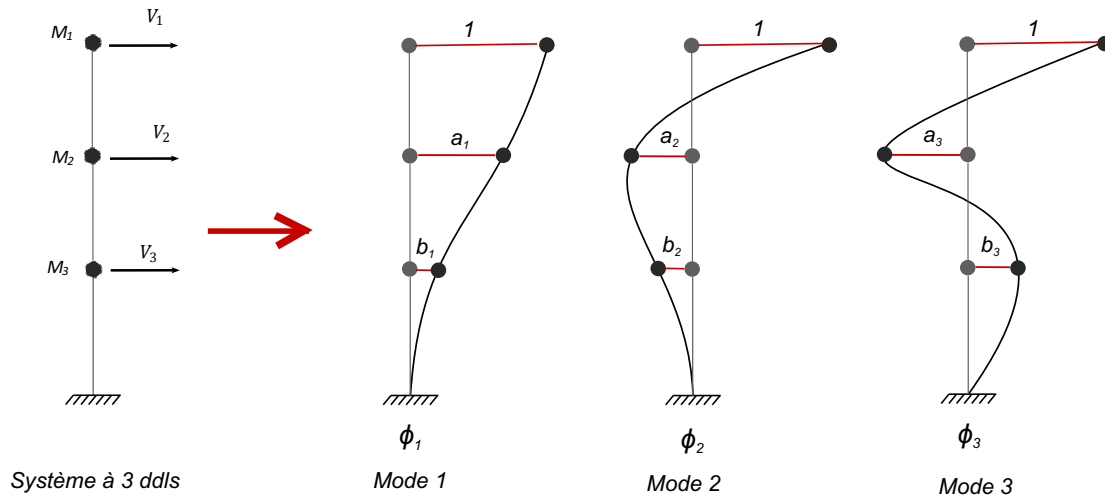


FIGURE 2.1 – Les modes de vibration d'un système à trois degrés de liberté

$$V^{(i)}(t) = \phi_i y_i(t) = \begin{pmatrix} V_1^{(i)} \\ V_2^{(i)} \\ \vdots \\ V_j^{(i)} \\ \vdots \\ V_N^{(i)} \end{pmatrix}$$

où :

$V^{(i)}(t)$  est le vecteur déplacement géométrique associé au mode  $(i)$ .

$V_j^{(i)}(t)$  est le déplacement géométrique du ddl  $(j)$  donné par le mode  $(i)$ .

$y_i(t)$  est l'amplitude modale, appelée déplacement généralisé associé au mode  $(i)$ . C'est une fonction "scalaire" qui, une fois multipliée par le  $i^{\text{ème}}$  vecteur modal donne le vecteur déplacement réel ou géométrique associé au mode  $(i)$ .

Ainsi chaque mode va fournir un déplacement, et le vecteur déplacement  $V(t)$  du système est obtenu par la superposition des déplacements associés aux  $N$  modes de vibration.

$$V(t) = V^{(1)}(t) + V^{(2)}(t) + \dots + \overbrace{V^{(i)}(t)}^{\text{déplacement géométrique du mode } i} + \dots + V^{(N)}(t)$$

$$V(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \dots + \underbrace{\phi_i y_i(t)}_{\text{déplacement géométrique du mode } i} + \dots + \phi_N y_N(t)$$

Donc

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) \quad (2.1)$$

C'est ce qu'on appelle la superposition modale qu'on peut exprimer sous forme matricielle par  $V(t) = \Phi Y(t)$ , où  $\Phi$  est la matrice modale, et  $Y(t)$  est un vecteur qui a comme composantes les déplacements généralisés.

Si on reprend le système de la figure 2.1, le vecteur déplacement à un instant donné  $V(t)$  est la superposition des vecteurs déplacements donnés par les trois modes, tel que montré sur la figure 2.2. Rappelons que le principe de superposition n'est applicable que dans le cas des systèmes élastiques linéaires.

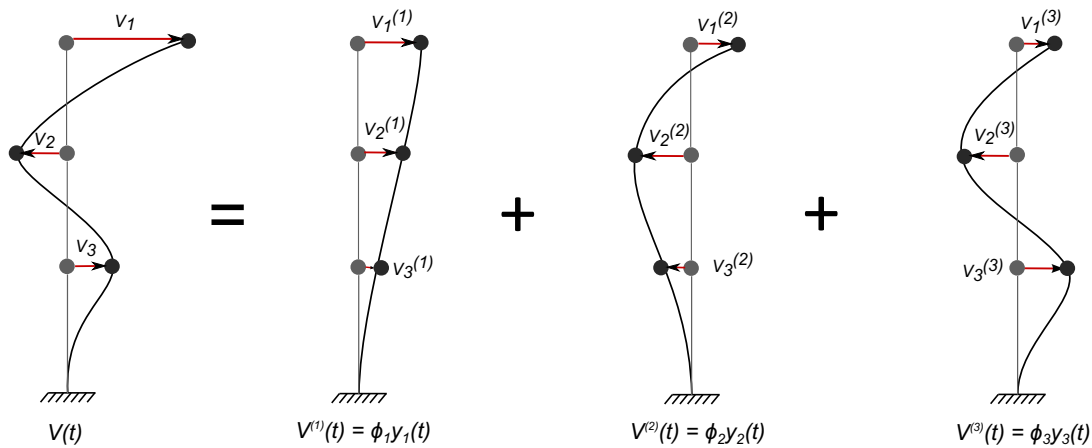


FIGURE 2.2 – Superposition modale dans un système à trois degrés de liberté

$$V(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \phi_3 y_3(t)$$

$$V(t) = \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} y_1(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} y_2(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ a_3 \\ b_3 \end{Bmatrix} y_3(t) \quad (2.2)$$

Le déplacement d'un ddl  $j$  s'exprime aussi par la superposition modale des déplacements donnés par tous les modes (équation 2.3).

$$\begin{cases} V_1(t) = y_1(t) & + y_2(t) & + y_3(t) \\ V_2(t) = a_1 y_1(t) & + a_2 y_2(t) & + a_3 y_3(t) \\ V_3(t) = b_1 y_1(t) & + b_2 y_2(t) & + b_3 y_3(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

*Remarque : Le terme "géométrique" donné au déplacement  $V(t)$  veut dire que ce déplacement est physiquement réel. Par contre un déplacement  $y_i(t)$  dit "généralisé" n'est pas réel, il ne*

prend de sens physique que lorsqu'il est multiplié par un vecteur modal. Pour un même problème on peut trouver des valeurs différentes des fonctions  $y_i(t)$  si on choisit des vecteurs modaux différents, mais le produit  $\phi_i y_i(t)$  reste identique.

### 2.1.1 Équations découplées du mouvement non-amorti

L'équation de mouvement d'un système non-amorti à  $N$  ddl s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$M \ddot{V}(t) + K V(t) = P(t) \quad (2.4)$$

$M$  et  $K$  sont les matrices masse et rigidité du système, respectivement.  $V(t)$  est le vecteur déplacement, et  $P(t)$  est le vecteur chargement. Sachant que le vecteur  $V(t)$  peut s'écrire sous la forme d'une superposition des modes  $V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$ , l'équation 2.4 devient :

$$M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{y}_i(t) + K \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) = P(t) \quad (2.5)$$

En multipliant l'équation 2.5 par  $\phi_i^T$ , on obtient :

$$\phi_i^T M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{y}_i(t) + \phi_i^T K \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) = \phi_i^T P(t) \quad (2.6)$$

et en développant les sommes on obtient :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\phi_i^T M \phi_1}_{0} \ddot{y}_1(t) + \underbrace{\phi_i^T M \phi_2}_{0} \ddot{y}_2(t) + \dots + \phi_i^T M \phi_i \ddot{y}_i(t) + \dots + \underbrace{\phi_i^T M \phi_N}_{0} \ddot{y}_N(t) + \\ & \underbrace{\phi_i^T K \phi_1}_{0} y_1(t) + \underbrace{\phi_i^T K \phi_2}_{0} y_2(t) + \dots + \phi_i^T K \phi_i y_i(t) + \dots + \underbrace{\phi_i^T K \phi_N}_{0} y_N(t) = \phi_i^T P(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

En appliquant les propriétés d'orthogonalité démontrées dans le chapitre précédent, à savoir pour deux modes différents  $i$  et  $j$ ,  $\phi_i^T M \phi_j = 0$  et  $\phi_i^T K \phi_j = 0$ , l'équation 2.7 devient :

$$\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{m_{gi}} \ddot{y}_i(t) + \underbrace{\phi_i^T K \phi_i}_{k_{gi}} y_i(t) = \underbrace{\phi_i^T P(t)}_{P_{gi}(t)} \quad (2.8)$$

Bien que l'équation de mouvement soit écrite sous forme matricielle on a pu la transformer dans l'équation 2.8 de sorte à ne contenir que des scalaires. On définit les nouveaux paramètres comme suit :

$m_{gi} = \phi_i^T M \phi_i$  la masse généralisée associée au mode  $i$

$k_{gi} = \phi_i^T K \phi_i$  la rigidité généralisée associée au mode  $i$

$P_{gi}(t) = \phi_i^T P(t)$  le chargement généralisé associé au mode  $i$

Lorsqu'on regarde l'équation 2.8, qu'on peut réécrire

$$m_{gi}\ddot{y}_i(t) + k_{gi}y_i(t) = P_{gi}(t) \quad (2.9)$$

on remarque qu'elle représente l'équation de mouvement d'un système à un degré de liberté, de masse  $m_{gi}$ , de rigidité  $k_{gi}$  soumis à un chargement  $P_{gi}(t)$ .

En écrivant l'équation 2.9 pour chaque mode  $i$ , ( $i = 1, N$ ), on obtient un système de  $N$  équations indépendantes (équation 2.10) ce qui permet de calculer séparément la réponse de chaque mode de vibration en coordonnées généralisées (les  $y_i(t)$ ,  $i = 1, N$ ), puis par superposition modale on obtient la réponse en coordonnées géométriques (réelles)  $V(t)$ .

$$\begin{cases} m_{g1}\ddot{y}_1(t) + k_{g1}y_1(t) = P_{g1}(t) \\ m_{g2}\ddot{y}_2(t) + k_{g2}y_2(t) = P_{g2}(t) \\ \vdots \\ m_{gN}\ddot{y}_N(t) + k_{gN}y_N(t) = P_{gN}(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Résolution}} \begin{cases} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{cases} \xrightarrow[\text{modale}]{\text{Superposition}} V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) \quad (2.10)$$

En divisant l'équation 2.9 par la masse généralisée  $m_{gi}$  on obtient

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_{gi}(t)}{m_{gi}} \quad (2.11)$$

où on fait apparaitre la pulsation propre du mode  $i$ ,  $\omega_i = \sqrt{\frac{k_{gi}}{m_{gi}}}$

*Remarque : rappelons que avant de calculer les  $y_i(t)$  on a calculé les fréquences et les modes propres, donc à ce stade de l'analyse les  $\omega_i$  sont connues.*

## 2.1.2 Équations découplées du mouvement amorti

Pour un système amorti à  $N$  ddl, l'équation de mouvement s'écrit comme suit :

$$M\ddot{V}(t) + C\dot{V}(t) + KV(t) = P(t) \quad (2.12)$$

$C$  : est la matrice amortissement du système.

De même que pour le cas des systèmes non-amortis, on remplace l'expression du déplacement  $V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$  dans l'équation 2.12 et on obtient :

$$M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{y}_i(t) + C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{y}_i(t) + K \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) = P(t) \quad (2.13)$$

En multipliant l'équation 2.13 par  $\phi_i^T$  on obtient :

$$\phi_i^T M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{y}_i(t) + \phi_i^T C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{y}_i(t) + \phi_i^T K \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) = \phi_i^T P(t) \quad (2.14)$$

En développant les sommes et en appliquant les propriétés d'orthogonalité, il ne reste des termes liés à la matrice masse que  $\phi_i^T M \phi_i$ , et il ne reste des termes liés à la matrice rigidité que  $\phi_i^T K \phi_i$ . N'ayant pas démontré la propriété d'orthogonalité par rapport à la matrice amortissement, nous allons dans un premier temps supposer que les vecteurs modaux sont orthogonaux par rapport à la matrice amortissement, c-à-d ( $\phi_i^T C \phi_j = 0$ ,  $i \neq j$ ). L'équation 2.14 devient alors :

$$\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{m_{gi}} \ddot{y}_i(t) + \underbrace{\phi_i^T C \phi_i}_{c_{gi}} \dot{y}_i(t) + \underbrace{\phi_i^T K \phi_i}_{k_{gi}} y_i(t) = \underbrace{\phi_i^T P(t)}_{P_{gi}(t)} \quad (2.15)$$

$$m_{gi} \ddot{y}_i(t) + c_{gi} \dot{y}_i(t) + k_{gi} y_i(t) = P_{gi}(t) \quad (2.16)$$

$m_{gi}$ ,  $k_{gi}$ , et  $P_{gi}(t)$  sont la masse généralisée, la rigidité généralisée, et le chargement généralisé, associés au mode  $i$ . Ce sont les mêmes paramètres que ceux du cas des systèmes non-amortis. Le paramètre  $c_{gi} = \phi_i^T C \phi_i$  est l'amortissement généralisé associé au mode  $i$ .

L'équation 2.16 ne fait intervenir que des scalaires, elle représente l'équation de mouvement d'un système à 1ddl de masse  $m_{gi}$ , de rigidité  $k_{gi}$  et de constante d'amortissement  $c_{gi}$  soumis à un chargement  $P_{gi}(t)$ .

En écrivant l'équation 2.16 pour tous les modes de vibrations ( $i = 1, N$ ) on obtient  $N$  équations chacune représentant un système à 1ddl. Après résolution on obtient les déplacements généralisés ( $y_i(t)$ ,  $i = 1, N$ ), puis par superposition modale on obtient le vecteur déplacement géométrique  $V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$ .

En divisant l'équation 2.16 par  $m_{gi}$  on peut la réécrire sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_{gi}(t)}{m_{gi}} \quad (2.17)$$

$\xi_i$  est le taux d'amortissement critique associé au mode  $i$ .

### 2.1.3 Matrice amortissement C

Il s'agit de définir la forme de la matrice amortissement C pour laquelle la propriétés d'orthogonalité ( $\phi_i^T C \phi_j = 0, \quad i \neq j$ ) soit vérifiée.

L'amortissement de *Rayleigh* est la forme la plus utilisée en dynamique des structures, c'est une combinaison des matrices de masse et de rigidité qui vérifient les propriétés d'orthogonalité, tel que démontré auparavant.

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (2.18)$$

$a_0$  et  $a_1$  sont des constantes satisfaisant les propriétés d'orthogonalité.

Donc en ayant la matrice masse et la matrice rigidité on peut construire la matrice amortissement de *Rayleigh*. Il suffit de trouver les deux constantes  $a_0$  et  $a_1$  en procédant comme suit.

En multipliant l'équation 2.18, à gauche par  $\phi_i^T$  et à droite par  $\phi_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_i^T C \phi_i &= a_0 \phi_i^T M \phi_i + a_1 \phi_i^T K \phi_i \\ \implies c_{gi} &= a_0 m_{gi} + a_1 k_{gi} \\ \text{en divisant par } m_{gi} &\implies \frac{c_{gi}}{m_{gi}} = a_0 + a_1 \frac{k_{gi}}{m_{gi}} \\ \implies 2\xi_i \omega_i &= a_0 + a_1 \omega_i^2 \end{aligned}$$

Il suffit de considérer deux modes de vibrations différents par exemple, le premier et le deuxième, et on aura à résoudre deux équations dont les deux inconnues sont  $a_0$  et  $a_1$ .

$$\begin{cases} 2\xi_1 \omega_1 = a_0 + a_1 \omega_1^2 \\ 2\xi_2 \omega_2 = a_0 + a_1 \omega_2^2 \end{cases}$$

### 2.1.4 Relation entre le déplacement généralisé et le déplacement géométrique

On sait que dans la méthode de superposition modale, on calcule d'abord les déplacements généralisés associés aux modes de vibration (les  $y_i(t), i = 1, N$ ) puis on passe au calcul du vecteur déplacement  $V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$ .

En connaissant le vecteur déplacement à instant donné  $V(t)$ , on peut exprimer le déplacement généralisé à cet instant  $y_i(t)$ . Cette information est nécessaire par exemple

pour convertir les conditions initiales qui sont données en coordonnées géométriques, en conditions initiales en coordonnées généralisées.

On sait que :

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$$

En pré-multipliant les deux parties de l'équation par  $\phi_i^T M$  ; le produit de la transposée du  $i^{\text{ème}}$  vecteur modal par la matrice masse, on obtient

$$\begin{aligned} \phi_i^T M V(t) &= \phi_i^T M \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t) \\ &= \underbrace{\phi_i^T M \phi_1}_{0} y_1(t) + \underbrace{\phi_i^T M \phi_2}_{0} y_2(t) + \dots + \phi_i^T M \phi_i y_i(t) + \dots + \underbrace{\phi_i^T M \phi_N}_{0} y_N(t) \\ &= \phi_i^T M \phi_i y_i(t) \end{aligned}$$

la propriété d'orthogonalité par rapport à la matrice masse fait qu'il n'en reste qu'un seul terme, on trouve alors

$$y_i(t) = \frac{\phi_i^T M V(t)}{\phi_i^T M \phi_i} = \frac{\phi_i^T M V(t)}{m_{gi}}$$

### 2.1.5 Sommaire de l'analyse par superposition modale

Pour un système amorti à  $N$  ddl soumis à un chargement quelconque, l'équation de mouvement s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$M \ddot{V}(t) + C \dot{V}(t) + K V(t) = P(t)$$

L'analyse par superposition modale peut être résumée dans les étapes suivantes.

1. Étape 1 :
  - Détermination des matrices masse et rigidité,  $M$  et  $K$
  - Détermination du vecteur chargement  $P(t)$
2. Etape 2 : Déterminations des fréquences et modes propres
  - $[K - \omega^2 M] = 0 \rightarrow$  donne les fréquences propres :  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$
  - $[K - \omega_i^2 M] \phi_i = 0, \quad (i = 1, N) \rightarrow$  donne les modes propres :  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$

*Il faut classer les pulsations dans l'ordre croissant, la plus petite valeur correspond au premier mode, la valeur suivante correspond au deuxième mode ainsi de suite.*

3. Étape 3 : Calcul des paramètres généralisés pour chaque mode  $i$

- la masse généralisée  $m_{gi} = \phi_i^T M \phi_i$
- le chargement généralisé  $P_{gi}(t) = \phi_i^T P(t)$
- la rigidité généralisée  $k_{gi} = \phi_i^T K \phi_i$  peut être calculée par  $k_{gi} = m_{gi} \omega_i^2$

4. Étape 4 : Équations découplées

Pour chaque mode  $i$  on a une équation en coordonnées généralisées de la forme :

$$m_{gi} \ddot{y}_i(t) + c_{gi} \dot{y}_i(t) + k_{gi} y_i(t) = P_{gi}(t)$$

ou bien

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_{gi}(t)}{m_{gi}}$$

La solution de cette équation dépend de la forme du chargement. Si on doit résoudre cet équation en régime permanent, il n'est pas nécessaire de connaître les conditions initiales. Par contre pour calculer la réponse en régime général, on doit avoir les conditions initiales en coordonnées généralisées

$$y_i(0) = \frac{\phi_i^T M V(0)}{m_{gi}}$$

et

$$\dot{y}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{V}(0)}{m_{gi}}$$

$V(0)$  et  $\dot{V}(0)$  sont : le vecteur déplacement initial et le vecteur vitesse initiale du système.

A la fin de cette étape on obtient les déplacements généralisés :  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)$

5. Étape 5 : La superposition modale

Le vecteur déplacement du système est la superposition des vecteurs associés aux  $N$  modes de vibration

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$$

*Remarque : Il n'est généralement pas nécessaire d'inclure tous les modes dans la superposition car la contribution des modes correspondant aux petites pulsations est plus grande que celle des modes supérieurs. La somme des réponses modales peut être tronquée*

lorsqu'on atteint un certain degré de précision. L'estimation du pourcentage de participation de chaque mode sera étudiée dans la prochaine section.

## 2.1.6 Applications

### Application 1

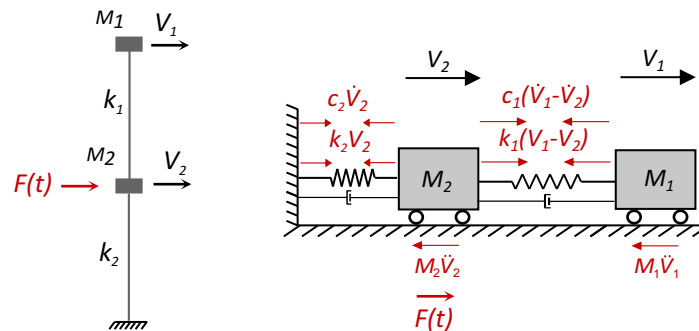
Soit le modèle "brochette" à deux ddl représenté sur la figure ci-dessous. Le système est soumis à une force  $F(t) = 100 \sin(t) (N)$  appliquée au niveau de la masse  $M_2$ .

$M_1 = 1 \text{ tonne}$ ,  $M_2 = 5 \text{ tonnes}$ ,  $k_1 = 2 \text{ KN/m}$ ,  $k_2 = 6 \text{ KN/m}$

La matrice amortissement du système est :  $C = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} (\text{KN.s/m})$

Déterminer en régime permanent :

1. Les déplacements des masses  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$ .
2. L'effort tranchant maximal à la base du système, dû uniquement au premier mode.



### Solution

Le modèle masses-ressorts ci-dessus présente les forces qui agissent sur le système pour  $V_1 > V_2$ .

l'équilibre des forces pour chaque masse donne le système suivant :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{V}_1 + c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + k_1(V_1 - V_2) = 0 \\ M_2 \ddot{V}_2 - c_1(\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + c_2 \dot{V}_2 - k_1(V_1 - V_2) + k_2 V_2 = F(t) \end{cases}$$

L'équation de mouvement sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

Les matrices caractéristiques du système sont :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} (t) \quad K = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} (KN/m) \quad C = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} (KN.s/m)$$

Le vecteur chargement :

$$P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \sin(t) \end{Bmatrix} (N)$$

### Fréquences et modes propres

$$|K - \omega^2 M| = 0 \implies \begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & -2 \\ -2 & 8 - \omega^2 4 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 & (rd/s) \\ \omega_2 = \sqrt{3} & (rd/s) \end{cases}$$

### Le premier mode

$$\begin{aligned} [K - \omega_1^2 M] \phi_1 &= 0 \\ \implies \begin{bmatrix} 2 - \omega_1^2 & -2 \\ -2 & 8 - \omega_1^2 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \implies \phi_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

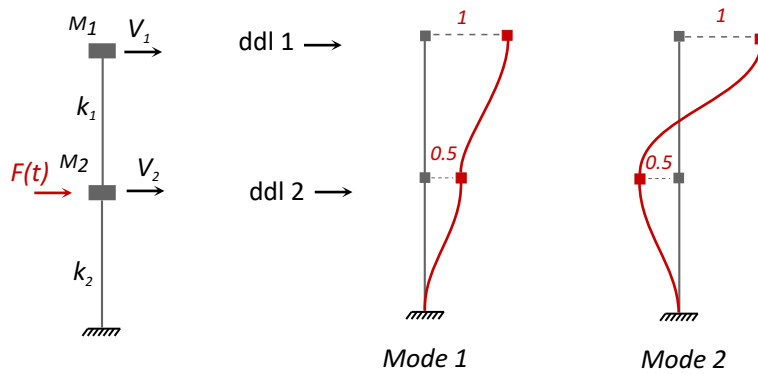
### Le deuxième mode

$$\begin{aligned} [K - \omega_2^2 M] \phi_2 &= 0 \\ \implies \begin{bmatrix} 2 - \omega_2^2 & -2 \\ -2 & 8 - \omega_2^2 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \implies \phi_2 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

### 1. Déplacements des masses en régime permanent $V_1(t)$ et $V_2(t)$ : Superposition modale

Pour chaque mode on a une équation en coordonnées généralisées de la forme :

$$m_{gi} \ddot{y}_i(t) + c_{gi} \dot{y}_i(t) + k_{gi} y_i(t) = P_{gi}(t)$$



qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_{gi}(t)}{m_{gi}}$$

### Premier mode

La masse généralisée

$$m_{g1} = \phi_1^T M \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} = 2(t)$$

Le chargement généralisé :

$$P_{g1}(t) = \phi_1^T P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \sin(t) \end{Bmatrix} = 50 \sin(t) (N)$$

L'équation de mouvement en coordonnées généralisées du mode 1 :

$$m_{g1}\ddot{y}_1(t) + c_{g1}\dot{y}_1(t) + k_{g1}y_1(t) = P_{g1}(t) = \underbrace{50}_{P_{01}} \sin(\underbrace{1}_{\bar{\omega}} t)$$

la solution de cette équation en régime permanent est :

$$y_1(t) = \frac{P_{01}}{k_{g1}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)^2 + (2\xi_1\beta_1)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta_1)$$

$$k_{g1} = m_{g1} \omega_1^2$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \text{cas de résonance}$$

$$\xi_1 = \frac{c_{g1}}{2m_{g1}\omega_1} \quad \text{et} \quad c_{g1} = \phi_1^T C \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} = 0.2 \text{ (KN.s/m)}$$

d'où

$$\xi_1 = \frac{0.2}{2 \times 2 \times 1} = 0.05$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{2\xi_1\beta_1}{1-\beta_1^2} \quad \beta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ (rd)}$$

Attention à la compatibilité des unités

$$y_1(t) = \frac{50}{2000 \times (1)^2} \frac{1}{2 \times 0.05} \sin(t - \frac{\pi}{2})$$

$$y_1(t) = 0.25 \sin(t - \frac{\pi}{2}) \text{ (m)}$$

## Deuxième mode

La masse généralisée

$$m_{g2} = \phi_2^T M \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = 2 \text{ (t)}$$

Le chargement généralisé :

$$P_{g2}(t) = \phi_2^T P(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \sin(t) \end{Bmatrix} = -50 \sin(t) \text{ (N)}$$

L'équation de mouvement en coordonnées généralisées du mode 2 :

$$m_{g2} \ddot{y}_2(t) + c_{g2} \dot{y}_2(t) + k_{g2} y_2(t) = P_{g2}(t) = \underbrace{-50}_{P_{02}} \sin(\underbrace{1}_{\bar{\omega}} t)$$

la solution de cette équation en régime permanent est :

$$y_2(t) = \frac{P_{02}}{k_{g2}} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_2^2)^2 + (2\xi_2\beta_2)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta_2)$$

$$k_{g2} = m_{g2}\omega_2^2$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{\omega}}{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

$$\xi_2 = \frac{c_{g2}}{2m_{g2}\omega_2} \quad \text{et} \quad c_{g2} = \phi_2^T C \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = 1 \text{ (KN.s/m)}$$

d'où

$$\xi_2 = \frac{1}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = 0.144$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{2\xi_2\beta_2}{1 - \beta_2^2} \Rightarrow \theta_2 = 0.244 \text{ (rd)}$$

Attention à la compatibilité des unités

$$y_2(t) = \frac{-50}{2000 \times (\sqrt{3})^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - 0.577^2)^2 + (2 \times 0.144 \times 0.577)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \theta_2)$$

$$\boxed{y_2(t) = -1.21 \times 10^{-2} \sin(t - 0.244) \text{ (m)}}$$

On peut maintenant exprimer les déplacements géométriques par superposition modale :

$$V(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t)$$

$$V(t) = \begin{Bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} y_1(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix} y_2(t)$$

$$\begin{cases} V_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ V_2(t) = 0.5y_1(t) - 0.5y_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(t) = 0.25 \sin(t - \frac{\pi}{2}) - 1.21 \times 10^{-2} \sin(t - 0.244) \text{ (m)} \\ V_2(t) = 0.125 \sin(t - \frac{\pi}{2}) + 6.05 \times 10^{-3} \sin(t - 0.244) \text{ (m)} \end{cases}$$

### Discussion :

On peut décomposer le vecteur déplacement  $V(t)$  en déplacement dû au premier mode  $V^{(1)}(t)$  et déplacement dû au deuxième mode  $V^{(2)}(t)$ .

$$V(t) = \underbrace{V^{(1)}(t)}_{\phi_1 y_1(t)} + \underbrace{V^{(2)}(t)}_{\phi_2 y_2(t)}$$

On peut faire de même pour le déplacement de chaque ddl. Le déplacement de la masse  $M_1$  (ddl 1)  $V_1(t)$  est la somme du déplacement de la masse  $M_1$  dû au premier mode  $V_1^{(1)}(t)$  et du déplacement de la masse  $M_1$  dû au deuxième mode  $V_1^{(2)}(t)$

$$V_1(t) = \underbrace{V_1^{(1)}(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{V_1^{(2)}(t)}_{y_2(t)}$$

Aussi le déplacement de la masse  $M_2$  (ddl2) est la somme du déplacement dû au premier mode et du déplacement dû au deuxième mode

$$V_2(t) = \underbrace{V_2^{(1)}(t)}_{0.5y_1(t)} + \underbrace{V_2^{(2)}(t)}_{-0.5y_2(t)}$$

**2. L'effort tranchant maximal à la base du système, dû uniquement au premier mode**  
Le vecteur force élastique s'exprime par

$$f(t) = K V(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix}$$

L'effort tranchant à la base  $T(t)$  est la somme des forces élastiques développées dans tous les ddls ( $j = 1, N$ ).

$$T(t) = \sum_{j=1}^N f_j(t)$$

Pour calculer l'effort tranchant maximal dû uniquement au premier mode, on calcule le vecteur force élastique maximale du premier mode  $f_{max}^{(1)} = K V_{max}^{(1)}$

$$V^{(1)}(t) = \phi_1 y_1(t) \Rightarrow V_{max}^{(1)} = \phi_1 y_{1max} \quad \text{et} \quad y_{1max} = 0.25(m)$$

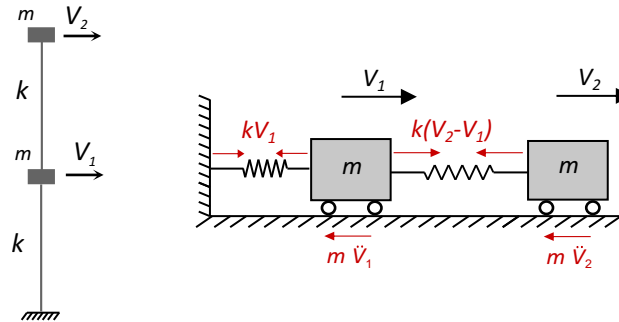
$$\text{d'où} \quad f_{max}^{(1)} = K \phi_1 y_{1max} = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} 0.25 = \begin{Bmatrix} 250 \\ 500 \end{Bmatrix} (N)$$

L'effort tranchant maximal à la base, dû au premier mode :

$$T_{max}^{(1)} = 250 + 500 = 750(N)$$

## Application 2

Soit le système à deux ddls de la figure ci-dessous,  $m = 20 \text{ tonnes}$  et  $k = 18000 \text{ KN/m}$ . Déterminer la réponse (déplacement) de ce système en vibrations libres avec les conditions initiales suivantes :  $V_1(0) = V_2(0) = 2 \text{ cm}$  et  $\dot{V}_1(0) = \dot{V}_2(0) = 0$ .



## Solution

Le modèle masses-ressorts ci-dessus présente les forces qui agissent sur le système pour  $V_2 > V_1$ .

l'équilibre des forces pour chaque masse donne le système suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{V}_1 + kV_1 - k(V_2 - V_1) = 0 \\ m\ddot{V}_2 + k(V_2 - V_1) = 0 \end{cases}$$

L'équation de mouvement sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les matrices caractéristiques du système sont :

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} (t) \quad K = 18000 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (\text{KN/m})$$

## Fréquences et modes propres

$$|K - \omega^2 M| = 0 \implies \begin{vmatrix} 36000 - \omega^2 20 & -18000 \\ -18000 & 18000 - \omega^2 20 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 = 18.54 \text{ (rd/s)} \\ \omega_2 = 48.54 \text{ (rd/s)} \end{cases}$$

### Le premier mode

$$[K - \omega_1^2 M]\phi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 36000 - (18.54)^2 0 & -18000 \\ -18000 & 18000 - (18.54)^2 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

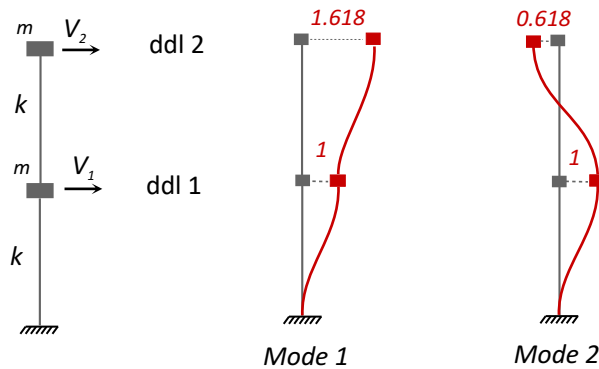
$$\Rightarrow \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

### Le deuxième mode

$$[K - \omega_2^2 M]\phi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 36000 - (48.54)^2 0 & -18000 \\ -18000 & 18000 - (48.54)^2 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$



En absence de chargement, pour chaque mode on a une équation en coordonnées généralisées de la forme :

$$m_{gi} \ddot{y}_i(t) + k_{gi} y_i(t) = 0$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = 0$$

C'est l'équation de mouvement d'un système à un degré de liberté en vibrations libres.

La solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$y_i(t) = A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)$$

En écrivant  $A_i$  et  $B_i$  en fonction des conditions initiales, la solution devient :

$$y_i(t) = \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + y_i(0) \cos(\omega_i t)$$

On a pour les deux modes :

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{\dot{y}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + y_1(0) \cos(\omega_1 t) \\ y_2(t) = \frac{\dot{y}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) + y_2(0) \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Les conditions initiales sont données en coordonnées géométriques. Le vecteur déplacement initial est

$$V(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} cm$$

et le vecteur vitesse initiale est

$$\dot{V}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On peut exprimer les conditions initiales en coordonnées généralisées par

$$y_i(0) = \frac{\phi_i^T M V(0)}{m_{gi}}$$

et

$$\dot{y}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{V}(0)}{m_{gi}}$$

Calculons les masses généralisées pour chaque mode

$$m_{g1} = \phi_1^T M \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix} = 72.36(t)$$

$$m_{g2} = \phi_2^T M \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix} = 27.64(t)$$

d'où les déplacements initiaux en coordonnées généralisées pour les deux modes

$$y_1(0) = \frac{\phi_1^T M V(0)}{m_{g1}} = \frac{1}{72.36} \begin{bmatrix} 1 & 1.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 1.45(cm)$$

$$y_2(0) = \frac{\phi_2^T M V(0)}{m_{g2}} = \frac{1}{27.64} \begin{bmatrix} 1 & -0.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.55(cm)$$

et la vitesse initiale en coordonnées généralisées pour chaque mode

$$\dot{y}_1(0) = \frac{\phi_1^T M \dot{V}(0)}{m_{g1}} = \frac{1}{72.36} \begin{bmatrix} 1 & 1.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\dot{y}_2(0) = \frac{\phi_2^T M \dot{V}(0)}{m_{g2}} = \frac{1}{27.64} \begin{bmatrix} 1 & -0.618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y_1(t) = 1.45 \cos(\omega_1 t) (cm) \\ y_2(t) = 0.55 \cos(\omega_2 t) (cm) \end{cases}$$

et par superposition modale on a

$$\begin{cases} V_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ V_2(t) = 1.618y_1(t) - 0.618y_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(t) = 1.45 \cos(18.54t) + 0.55 \cos(48.54t) \quad (cm) \\ V_2(t) = 2.34 \cos(18.54t) - 0.34 \cos(48.54t) \quad (cm) \end{cases}$$

## 2.2 Méthode spectrale modale - Analyse sismique

Lors du dimensionnement des structures, la principale information recherchée est la réponse maximale, dans ce cas l'analyse sismique peut s'effectuer en utilisant la méthode spectrale modale. L'excitation étant définie sous forme d'un spectre de réponse (spectre réglementaire, ou spectre d'un séisme donné), l'analyse permettra de calculer la réponse maximale (déplacements, efforts) pour chaque mode de vibration. Une combinaison adéquate des réponses maximales modales sera utilisée pour calculer la réponse maximale globale de la structure.

### 2.2.1 Réponse maximale à une excitation sismique

Un système amorti à  $N$  ddl est soumis à une excitation sismique donnée sous forme d'un accélérogramme  $\ddot{v}_g(t)$  appliqué à la base. L'équation de mouvement s'écrit comme suit :

$$M\ddot{V}(t) + C\dot{V}(t) + KV(t) = -Mr\ddot{v}_g(t)$$

$M$ ,  $K$ , et  $C$  sont les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système, respectivement.  $V(t)$  est le vecteur déplacement relatif, et  $P(t) = -Mr\ddot{v}_g(t)$  est le vecteur chargement.

$r$  est le vecteur de couplage dynamique, ses composantes prennent la valeur 1 pour les ddl qui agissent dans la même direction que celle de l'excitation, pour les autres directions les composantes sont nulles, tel que montré dans les deux exemples de la figure 2.3.

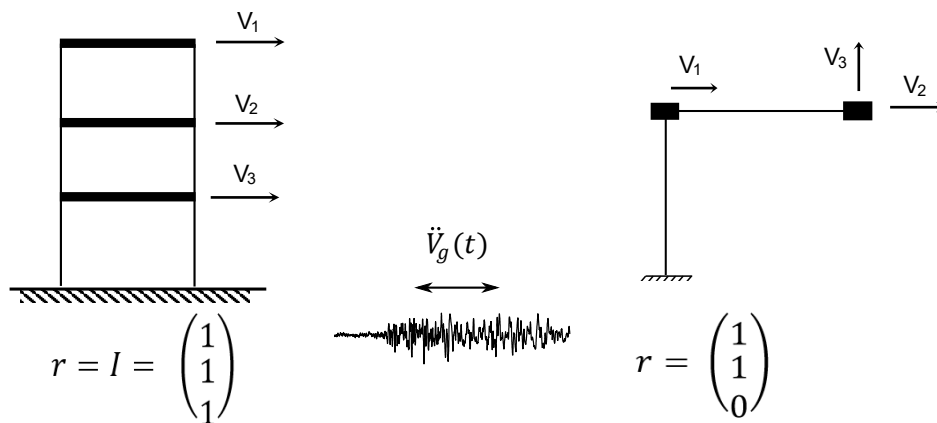


FIGURE 2.3 – Vecteur de couplage dynamique

Lorsque tous les ddl sont dans la direction de l'excitation,  $r = I$  et l'équation de mouvement s'écrit alors :

$$M\ddot{V}(t) + C\dot{V}(t) + KV(t) = -MI\ddot{v}_g(t) \quad (2.19)$$

Pour le découplage des équations de mouvement on remplace l'expression du déplacement  $V(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$  dans l'équation 2.19 et on obtient les équations en coordonnées généralisées :

$$\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{m_{gi}} \ddot{y}_i(t) + \underbrace{\phi_i^T C \phi_i}_{c_{gi}} \dot{y}_i(t) + \underbrace{\phi_i^T K \phi_i}_{k_{gi}} y_i(t) = \underbrace{-\phi_i^T MI \ddot{v}_g(t)}_{P_{gi}(t)} \quad (2.20)$$

Pour chaque mode de vibration  $i$ , on a une équation de la forme

$$m_{gi} \ddot{y}_i(t) + c_{gi} \dot{y}_i(t) + k_{gi} y_i(t) = P_{gi}(t) \quad (2.21)$$

$m_{gi}$ ,  $k_{gi}$ ,  $c_{gi}$  et  $P_{gi}(t)$  sont la masse généralisée, la rigidité généralisée, l'amortissement généralisé et le chargement généralisé, associés au mode  $i$ .

C'est l'équation de mouvement d'un système à 1ddl de masse  $m_{gi}$ , de rigidité  $k_{gi}$  et de constante d'amortissement  $c_{gi}$  soumis à un chargement  $P_{gi}(t)$ , qu'on peut réécrire sous la forme

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{P_{gi}(t)}{m_{gi}} \quad (2.22)$$

$\xi_i$  est le taux d'amortissement critique associé au mode  $i$ .

## Réponse maximale en coordonnées généralisées

Pour chaque mode de vibration  $i$ , la solution de l'équation 2.22 pour des conditions initiales au repos, est donnée par l'intégrale de Duhamel

$$y_i(t) = \frac{1}{m_{gi} \omega_{Di}} \int_0^t P_{gi}(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \quad (2.23)$$

où  $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$  est la pulsation amortie du mode  $i$ .

Le chargement généralisé du mode  $i$  est  $P_{gi}(t) = -\phi_i^T MI \ddot{v}_g(t)$ , alors l'équation 2.23 devient

$$y_i(t) = -\frac{\phi_i^T MI}{m_{gi} \omega_{Di}} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \quad (2.24)$$

La réponse maximale en coordonnées généralisées pour chaque mode  $i$

$$y_{imax} = \underbrace{\frac{\phi_i^T M I}{m_{gi}}}_{\alpha_i} \underbrace{\left| -\frac{1}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \right|}_{S_{di}} \Big|_{max} \quad (2.25)$$

Cette réponse maximale est obtenue à partir du spectre de réponse en déplacement relatif.

$$\boxed{y_{imax} = \alpha_i S_{di}(\xi_i, T_i)} \quad (2.26)$$

$$\alpha_i = \frac{\phi_i^T M I}{m_{gi}} = \frac{\phi_i^T M I}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (2.27)$$

$\alpha_i$  est appelé facteur de participation modale du mode  $i$ .

$S_{di}(\xi_i, T_i)$  représente le déplacement relatif maximal d'un système à 1 ddl (ce système représente le mode  $i$ ) de période  $T_i$  et de taux d'amortissement  $\xi_i$ , c'est une valeur spectrale issue du spectre de réponse de l'excitation  $\ddot{v}_g(t)$ .

## Réponse maximale en coordonnées géométriques (réelles)

Le déplacement géométrique maximal du mode  $i$ , est donné par :

$$V_{max}^{(i)} = \phi_i y_{imax} \quad (2.28)$$

d'après l'équation 2.26 on a

$$V_{max}^{(i)} = \phi_i \alpha_i S_{di}(\xi_i, T_i) \quad (2.29)$$

$$V_{max}^{(i)} = \begin{Bmatrix} V_{1max}^{(i)} \\ V_{2max}^{(i)} \\ \vdots \\ V_{jmax}^{(i)} \\ \vdots \\ V_{Nmax}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ji} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \alpha_i S_{di} \quad (2.30)$$

Le déplacement maximal du ddl  $j$  dû au mode  $i$  est

$$\boxed{V_{jmax}^{(i)} = \phi_{ji} \alpha_i S_{di}} \quad (2.31)$$

Les forces latérales maximales dans le mode  $i$ , sont données par

$$f_{max}^{(i)} = \begin{Bmatrix} f_{1max}^{(i)} \\ f_{2max}^{(i)} \\ \vdots \\ f_{jmax}^{(i)} \\ \vdots \\ f_{Nmax}^{(i)} \end{Bmatrix} = K V_{max}^{(i)} = K \phi_i y_{imax} = K \phi_i \alpha_i S_{di} \quad (2.32)$$

$f_{jmax}^{(i)}$  représente la force latérale maximale du ddl  $j$  induite par le mode  $i$   
sachant que  $K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i$  on peut aussi écrire

$$f_{max}^{(i)} = \omega_i^2 M \phi_i \alpha_i S_{di} \quad (2.33)$$

en se servant de la relation reliant le spectre de déplacement relatif et le pseudo-spectre d'accélération absolue à savoir,  $S_a = \omega^2 S_d$ , l'équation 2.33 devient :

$$f_{max}^{(i)} = M \phi_i \alpha_i S_{ai} \quad (2.34)$$

L'effort tranchant maximal à la base  $T_{max}^{(i)}$  dû au mode  $i$ , est la somme des forces latérales maximales du mode  $i$

$$T_{max}^{(i)} = f_{1max}^{(i)} + f_{2max}^{(i)} + \dots + f_{jmax}^{(i)} + \dots + f_{Nmax}^{(i)} \quad (2.35)$$

On peut exprimer  $T_{max}^{(i)}$  comme suit :

$$T_{max}^{(i)} = \sum_{j=1}^N f_{jmax}^{(i)} = \begin{bmatrix} f_{1max}^{(i)} & f_{2max}^{(i)} & \dots & f_{jmax}^{(i)} & \dots & f_{Nmax}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 T_{max}^{(i)} &= (f_{max}^{(i)})^T I = (M \phi_i \alpha_i S_{ai})^T I \\
 &= \alpha_i S_{ai} \underbrace{\phi_i^T M I}_{\alpha_i m_{gi}} \\
 &= \alpha_i^2 m_{gi} S_{ai} \\
 &= m_i^* S_{ai}
 \end{aligned}$$

$m_i^* = \alpha_i^2 m_{gi}$  est appelée la masse modale du mode  $i$ .

L'effort tranchant maximal du mode  $i$ , peut donc être directement calculé en utilisant le pseudo-spectre d'accélération absolue  $S_a$  par

$$T_{max}^{(i)} = m_i^* S_{ai} \quad (2.37)$$

La somme des masses modales donne la masse totale de la structure étudiée

$$\sum_{i=1}^N m_i^* = m_{totale}$$

### 2.2.2 Combinaison des réponses modales maximales

Une fois la réponse maximale obtenue pour chaque mode  $i$ , la réponse maximale induite par l'ensemble des modes est calculée par une combinaison adéquate des réponses modales maximales. Parmi les combinaisons existantes, il y a la combinaison **SRSS** (Square Root of Sum of the Squares) qui donne la réponse globale comme la racine carrée de la somme des carrés des réponses maximales modales.

Le déplacement du ddl  $j$  s'obtient donc par :

$$V_{jmax} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(V_{jmax}^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(V_{jmax}^{(1)}\right)^2 + \left(V_{jmax}^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(V_{jmax}^{(N)}\right)^2}$$

Avec la même combinaison on peut calculer l'effort tranchant maximal à la base comme la racine carrée de la somme des carrés des efforts maximaux modaux

$$T_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(T_{max}^{(i)}\right)^2} = \sqrt{\left(T_{max}^{(1)}\right)^2 + \left(T_{max}^{(2)}\right)^2 + \dots + \left(T_{max}^{(N)}\right)^2}$$

Le nombre de modes à considérer dans l'analyse spectrale modale doit être suffisant pour représenter au moins 90% de la masse totale de la structure. On peut utiliser la

masse modale pour calculer le pourcentage de participation de chaque mode dans la réponse globale.

$$\text{Pourcentage de participation du mode } i = \frac{m_i^*}{m_{totale}} 100$$

### 2.2.3 Sommaire de l'analyse spectrale modale

Pour un système amorti à  $N$  ddl soumis à un chargement sismique, l'excitation est donnée sous forme d'un spectre de réponse ( $S_d$ , ou  $S_v$ , ou bien  $S_a$ )

L'analyse spectrale modale peut être résumée dans les étapes suivantes.

1. Étape 1 : Détermination des matrices masse et rigidité,  $M$  et  $K$ .
2. Étape 2 : Détermination des fréquences et modes propres.
3. Étape 3 : Calcul du déplacement généralisé maximal pour chaque mode  $i$

$$y_{imax} = \alpha_i S_{di}(\xi_i, T_i)$$

- la masse généralisée  $m_{gi} = \phi_i^T M \phi_i$
- le facteur de participation modale  $\alpha_i = \frac{\phi_i^T M I}{m_{gi}}$ . (Remarque  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ )
- le déplacement spectral  $S_{di}$ , à extraire à partir du spectre de réponse, c'est la valeur qui correspond à la période du mode  $T_i$  et au taux d'amortissement du mode  $\xi_i$ .

4. Étape 4 : Calcul des réponses modales maximales

Pour chaque mode  $i$ , le vecteur déplacement est donné par :

$$V_{max}^{(i)} = \phi_i y_{imax} = \phi_i \alpha_i S_{di}$$

Pour un ddl  $j$ , le déplacement est

$$V_{jmax}^{(i)} = \phi_{ji} \alpha_i S_{di}$$

Pour chaque mode  $i$ , l'effort tranchant maximal à la base est donné par :

$$T_{max}^{(i)} = m_i^* S_{ai}$$

5. Étape 5 : Calcul de la réponse maximale par combinaison des modes

$$V_{jmax} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( V_{jmax}^{(i)} \right)^2} = \sqrt{\left( V_{jmax}^{(1)} \right)^2 + \left( V_{jmax}^{(2)} \right)^2 + \dots + \left( V_{jmax}^{(N)} \right)^2}$$

$$T_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( T_{max}^{(i)} \right)^2} = \sqrt{\left( T_{max}^{(1)} \right)^2 + \left( T_{max}^{(2)} \right)^2 + \dots + \left( T_{max}^{(N)} \right)^2}$$

## 2.2.4 Application

Un portique à deux niveaux est représenté par le modèle brochette à deux degrés de liberté de la figure ci-dessous.

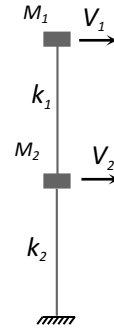
$$M_1 = M_2 = 30 \text{ tonnes}$$

$$k_1 = 3500 \text{ KN/m}, \quad k_2 = 4000 \text{ KN/m}$$

$$\text{Fréquences propres : } \omega_1 = 7 \text{ rd/s}, \quad \omega_2 = 17.82 \text{ rd/s}$$

$$\text{Modes propres : } \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.58 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.72 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Taux d'amortissement pour les deux modes de vibration : } \xi_1 = \xi_2 = 5\%$$



Pour calculer la réponse du système à un éventuel séisme, on utilise le spectre réglementaire du RPA99/2003, avec les caractéristiques suivantes :

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left( 1 + \frac{T}{T_1} \left( 2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} \left( \frac{Q}{R} \right) & T > 3 \end{cases}$$

|                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A = 0.25$<br>$T_1 = 0.15 \text{ s} \quad T_2 = 0.4 \text{ s}$<br>$Q = 1.3 \quad R = 4$<br>$\xi = 5\% \quad \eta = 1$<br>$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

1. Calculer les déplacements relatifs maximaux des masses,  $V_{1max}$  et  $V_{2max}$ .
2. Calculer l'effort tranchant maximal à la base du portique.
3. Calculer le pourcentage de participation de chaque mode à la réponse globale du système. Commenter.

**Solution :** Dans la méthode spectrale modale toutes les valeurs liées à la réponse sont des valeurs maximales, pour calculer la réponse maximale d'une structure on est obligé de traiter le problème mode par mode, de trouver les réponses maximales de chaque mode puis faire une combinaison des réponses modales maximales (SRSS).

### 1. Déplacements $V_{1max}$ et $V_{2max}$ :

Déplacement généralisé maximal pour chaque mode  $i$

$$y_{imax} = \alpha_i S_{di}(\xi_i, T_i)$$

### Mode 1

$$y_{1max} = \alpha_1 S_{d1}(\xi_1, T_1)$$

La période du premier mode

$$T_{(1)} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{7} = 0.9s$$

on a  $\xi_1 = 5\%$  et  $T_{(1)} = 0.9s$ , à partir du spectre RPA on peut déterminer la valeur de  $S_{a1}$ .

$$0.4s \leq (T_{(1)} = 0.9s) \leq 3s$$

alors

$$S_{a1} = g \left[ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) \left( \frac{T_2}{T_{(1)}} \right)^{2/3} \right] = 9.81 \left[ 2.5(1.25 \times 0.25) \left( \frac{1.3}{4} \right) \left( \frac{0.4}{0.9} \right)^{2/3} \right] = 1.45 m/s^2$$

On sait que  $S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d$ , alors

$$S_{d1} = \frac{S_{a1}}{\omega_1^2} = 29.6 \times 10^{-3} m$$

Le facteur de participation modale du premier mode

$$\alpha_1 = \frac{\phi_1^T M I}{m_{g1}} = \frac{\phi_1^T M I}{\phi_1^T M \phi_1}$$

la matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} (t)$$

La masse généralisée du premier mode

$$m_{g1} = \phi_1^T M \phi_1 = 40.1 (t)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{40.1} \begin{bmatrix} 1 & 0.58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1.182$$

le déplacement généralisé maximal du mode 1

$$y_{1max} = \alpha_1 S_{d1} = 1.182 \times 29.6 \times 10^{-3} = 3.5 \times 10^{-2} m$$

### Mode 2

$$y_{2max} = \alpha_2 S_{d2}(\xi_2, T_2)$$

La période du deuxième mode

$$T_{(2)} = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{17.82} = 0.35s$$

on a  $\xi_2 = 5\%$  et  $T_{(2)} = 0.35s$ , à partir du spectre RPA on peut déterminer la valeur de  $S_{a2}$ .

$$0.15s \leq (T_{(2)} = 0.35s) \leq 0.4s$$

alors

$$S_{a2} = g \left[ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) \right] = 9.81 \left[ 2.5(1.25 \times 0.25) \left( \frac{1.3}{4} \right) \right] = 2.49m/s^2$$

d'où

$$S_{d2} = \frac{S_{a2}}{\omega_2^2} = 7.84 \times 10^{-3}m$$

Le facteur de participation modale du deuxième mode

$$\alpha_2 = \frac{\phi_2^T M I}{m_{g2}} = \frac{\phi_2^T M I}{\phi_2^T M \phi_2}$$

La masse généralisée du deuxième mode

$$m_{g2} = \phi_2^T M \phi_2 = 118.75(t)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{118.75} \begin{bmatrix} 1 & -1.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0.182$$

le déplacement généralisé maximal du mode 2

$$y_{2max} = \alpha_2 S_{d2} = -0.182 \times 7.84 \times 10^{-3} = -1.42 \times 10^{-3}m$$

### Le déplacement géométrique maximal

Le déplacement géométrique maximal dû au premier mode

$$V_{max}^{(1)} = \phi_1 y_{1max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.58 \end{Bmatrix} 3.5 \times 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 3.5 \times 10^{-2} \\ 2.03 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} (m)$$

Le déplacement géométrique maximal dû au deuxième mode

$$V_{max}^{(2)} = \phi_2 y_{2max} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.72 \end{Bmatrix} -1.42 \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -1.42 \times 10^{-3} \\ 2.44 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Déplacement maximal de la masse  $M_1$  par la combinaison SRSS

$$V_{1max} = \sqrt{(3.5 \times 10^{-2})^2 + (-1.42 \times 10^{-3})^2} = 3.5 \times 10^{-2}(m)$$

Déplacement maximal de la masse  $M_2$  par la combinaison SRSS

$$V_{2max} = \sqrt{(2.03 \times 10^{-2})^2 + (2.44 \times 10^{-3})^2} = 2.04 \times 10^{-2}(m)$$

## 2. L'effort tranchant maximal à la base du portique $T_{max}$ :

Pour chaque mode  $i$ , l'effort tranchant maximal est donné par :

$$T_{max}^{(i)} = m_i^* S_{ai}$$

Premier mode

$$m_1^* = m_{g1} \alpha_1^2 = 56.03(t)$$

$$T_{max}^{(1)} = m_1^* S_{a1} = 81.276(KN)$$

Deuxième mode

$$m_2^* = m_{g2} \alpha_2^2 = 3.93(t)$$

$$T_{max}^{(2)} = m_2^* S_{a21} = 9.786(KN)$$

L'effort tranchant maximal à la base par la combinaison SRSS

$$V_{1max} = \sqrt{\left(T_{max}^{(1)}\right)^2 + \left(T_{max}^{(2)}\right)^2} = (81.276)^2 + (9.78)^2 = 81.86(KN)$$

## 3. Participation des modes à la réponse globale

$$\text{Pourcentage de participation du mode 1} = \frac{m_1^*}{m_{totale}} 100 = \frac{56.03}{60} 100 = 93.45\%$$

$$\text{Pourcentage de participation du mode 2} = \frac{m_2^*}{m_{totale}} 100 = \frac{3.93}{60} 100 = 6.55\%$$

**Commentaire :** on aura pu faire l'analyse en ne considérant que le premier mode car sa participation modale dépasse les 90%.

# Chapitre 3

## Méthode d'analyse statique non-linéaire : Pushover

### 3.1 Introduction

La méthode spectrale modale exposée dans le chapitre précédent, utilise un spectre de calcul dans lequel on a introduit le facteur de comportement global  $R$ . Les structures sont, dans ce cas, conçues pour résister aux chargements sismiques en exploitant leur ductilité. Cette méthode est simple d'emploi, néanmoins elle ne permet pas de suivre l'évolution des déformations de la structure au cours de l'excitation et, par conséquent, elle ne permet pas de suivre l'apparition et la progression des dommages locaux.

Pour évaluer la performance des structures soumises à des charges sismiques on peut utiliser l'analyse dynamique temporelle non-linéaire. Dans ce cas le comportement de la structure étudiée est considéré non-linéaire et des accélérogrammes (enregistrements réels ou simulés) sont utilisés comme excitations. Cependant, les réponses calculées sont très sensibles aux caractéristiques des accélérogrammes sélectionnés comme excitations, aussi plusieurs analyses sont requises en utilisant différents enregistrements. La méthode dynamique non-linéaire peut s'avérer complexe et coûteuse en calcul.

Une méthode fiable, simple et moins gourmande en temps, intégrant un concept basé sur la performance a été développée. Elle utilise l'analyse statique non-linéaire par poussée progressive, appelée "Pushover".

Pour analyser une structure avec la méthode Pushover, elle doit être modélisée en introduisant son comportement non-linéaire.

## 3.2 Modélisation du comportement non-linéaire

Il existe deux manières pour modéliser le comportement non-linéaire des structures soumises à des excitations sismiques :

1. Le modèle à plasticité concentrée dans lequel la non-linéarité est introduite aux extrémités des éléments, sur une zone appelée rotule plastique. Dans cette approche on définit les lois de comportement des rotules plastiques de la section de l'élément considéré sous la forme moment-rotation ou Moment-courbure.
2. Le modèle à non-linéarité répartie dans lequel la section transversale des éléments peut être discrétisée en fibres. Le comportement de la section peut alors être formulé par des relations contraintes-déformations axiales des fibres (acier, béton confiné et non confiné). Dans cette approche on définit les lois de comportement des fibres, béton et acier.

## 3.3 Principe de la méthode Pushover

C'est une méthode statique non-linéaire. Elle consiste à pousser la structure avec une charge latérale statique incrémentale jusqu'à ce qu'un déplacement cible prédéterminé, appelé point de performance, soit atteint, en tenant compte des non-linéarités de la structure.

La relation entre l'effort à la base et le déplacement au sommet de la structure est appelée courbe de capacité (voir la figure 3.1).

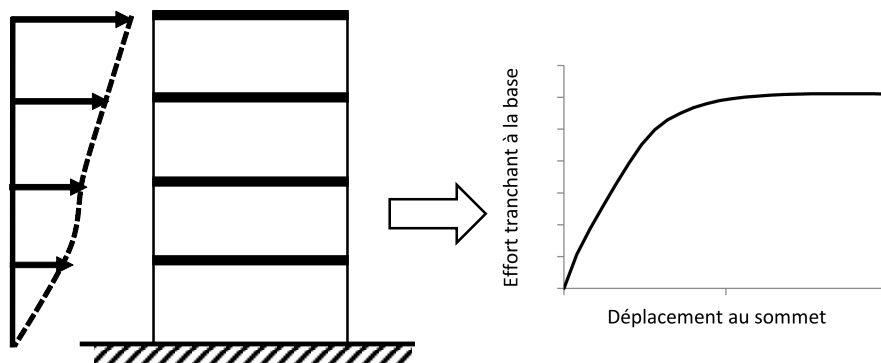


FIGURE 3.1 – Courbe Pushover-Courbe de capacité

### 3.3.1 Capacité sismique d'une structure

La capacité sismique d'une structure désigne la façon avec laquelle la structure se comporte sous un chargement sismique. Elle se traduit par une courbe force-déplacement montrant l'évolution de l'effort auquel la structure peut résister en fonction des déplacements qu'elle peut supporter.

Afin d'obtenir cette courbe, plusieurs formes de chargement latéral peuvent être utilisés : la distribution uniforme, la distribution triangulaire inverse, la distribution selon la forme du premier mode de vibration.

### 3.3.2 Système équivalent à 1ddl

La méthode dite N2 sera utilisée pour exploiter les courbes de capacité obtenues avec l'analyse non-linéaire statique (Pushover). Il est supposé que la réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté (Pddl)(figure 3.2(a)) est représentée par celle d'un système équivalent à un seul degré de liberté (1ddl)(figure 3.2(b)). Ceci implique que la réponse est contrôlée par une forme de mode unique  $\phi_i$  qui reste constante tout au long de la réponse. Par conséquent, les paramètres dynamiques du système Pddl étudié doivent être transformés en ceux d'un système à 1ddl équivalent.

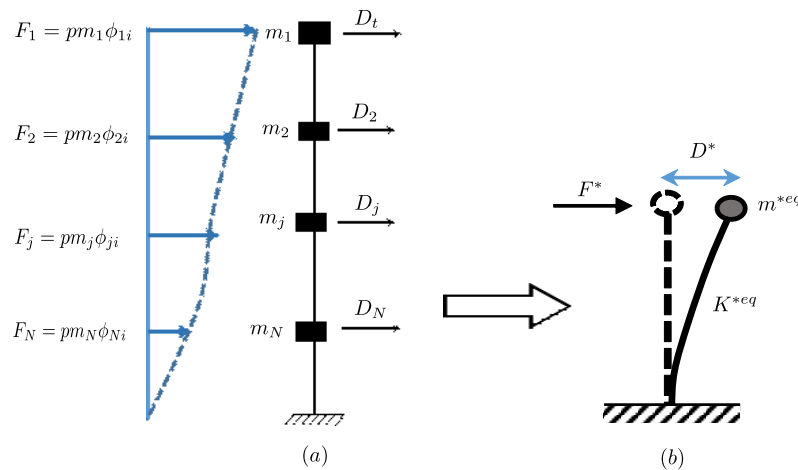


FIGURE 3.2 – Système équivalent à 1ddl

L'équation différentielle du mouvement du système Pddl peut s'écrire, en considérant uniquement un mode de vibration, comme suit :

$$M\phi_i\ddot{D}_t + F = -MI\ddot{u}_g \quad (3.1)$$

où  $\phi_i$  est le vecteur modal qui donne la forme du chargement,  $D_t$  est le déplacement au sommet de la structure.

Le déplacement relatif du système Pddl est  $D = \phi_i D_t$ .

Le vecteur Force de rappel :  $F = (F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_N)^T = p M \phi_i$ .

L'effort tranchant à la base :  $V_{base} = \sum_{j=1}^N F_j = p \sum_{j=1}^N (m_j \phi_{ji}) = p \phi_i^T M I$

$M$  est la matrice de masse.  $F$  représente le vecteur force de rappel,  $\ddot{u}_g$  est l'accélération du sol et  $I$  est le vecteur de composantes égales à 1.  $p$  est l'incrément du chargement.

Il est à noter que  $\phi_i$  est normalisé par rapport à la première composante, la valeur correspondant au sommet de la structure est égale à 1.

En pré-multipliant l'équation 3.1 par  $\phi_i^T$ , on obtient :

$$\phi_i^T M \phi_i \ddot{D}_t + \phi_i^T F = -\phi_i^T M I \ddot{u}_g \quad (3.2)$$

Sachant que

$$\alpha_i = \frac{\phi_i^T M I}{m_{gi}} = \frac{\phi_i^T M I}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (3.3)$$

$\alpha_i$  est facteur de participation modale du mode  $i$  et  $m_{gi}$  est la masse généralisée du mode  $i$ .

L'équation 3.2 devient :

$$\frac{\phi_i^T M I}{\alpha_i} \ddot{D}_t + \phi_i^T F = -\phi_i^T M I \ddot{u}_g \quad (3.4)$$

Qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\boxed{m^{*eq} \ddot{D}^* + F^* = -m^{*eq} \ddot{u}_g} \quad (3.5)$$

L'équation 3.5 représente l'équation du mouvement non amorti du système équivalent à 1ddl de masse  $m^{*eq}$ , soumis à la force  $F^*$  et ayant un déplacement  $D^*$ .

On a

$$m^{*eq} = \phi_i^T M I = \alpha_i \phi_i^T M \phi_i \quad (3.6)$$

d'où

$$\boxed{m^{*eq} = \alpha_i m_{gi}} \quad (3.7)$$

et

$$F^* = \phi_i^T F = p \phi_i^T M \phi_i = p \frac{\phi_i^T M I}{\alpha_i} \quad (3.8)$$

Ce qui donne la relation entre la force  $F^*$  et l'effort tranchant à la base du système à Pddl, dénommé  $V_{base}$  :

$$F^* = \frac{V_{base}}{\alpha_i} \quad (3.9)$$

Le déplacement  $D^*$  est donné par :

$$D^* = \frac{D_t}{\alpha_i} \quad (3.10)$$

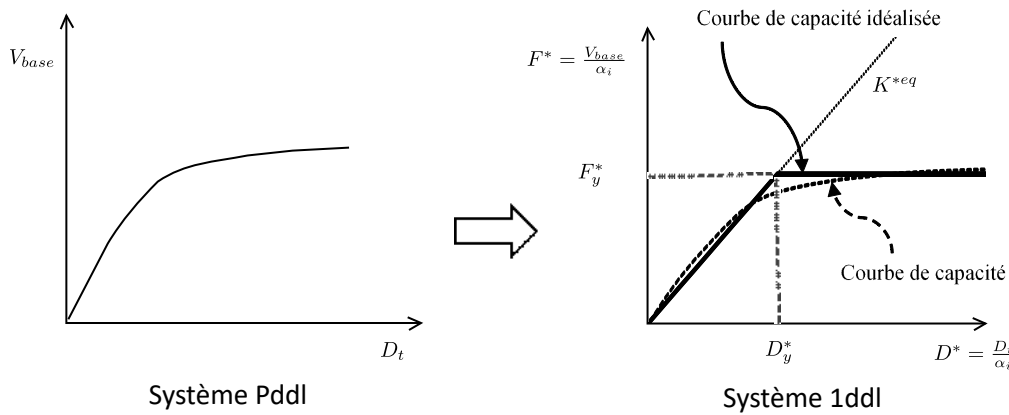


FIGURE 3.3 – Transformation de la courbe de capacité

Cette procédure permet d'obtenir la courbe force-déplacement du système 1ddl équivalent en effectuant une analyse pushover sur le système Pddl. Cette courbe doit être représentée par une relation bilinéaire idéalisée dans le but de définir les paramètres de plastification en termes de force  $F_y^*$  et de déplacement  $D_y^*$  qui désignent la limite élastique (Voir la figure 3.3).

La rigidité effective du système 1ddl,  $K^{*eq}$ , est ainsi obtenue par l'équation 3.11 et sa période de vibration  $T^*$  par l'équation 3.12.

$$K^{*eq} = \frac{F_y^*}{D_y^*} \quad (3.11)$$

et

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^{*eq}}{K^{*eq}}} \quad (3.12)$$

### 3.3.3 Demande sismique

La demande sismique fournit une mesure de l'énergie à dissiper par une structure lors d'une excitation sismique. Dans la méthode N2, Elle est donnée sous forme d'un spectre inélastique obtenu en réduisant le spectre élastique de dimensionnement dans un format (A-D) : Accélération-Déplacement.

#### Spectre élastique RPA99/2003

Selon le RPA99/2003, l'accélération spectrale normalisée à l'accélération de la pesanteur ( $S_a/g$ ) est donnée par les expressions de l'équation 3.13. A noter que dans le spectre élastique la valeur du facteur de comportement est égale à 1 ( $R = 1$ ).

$$\frac{S_{ae}}{g} = \begin{cases} 1.25A \left( 1 + \frac{T}{T_1} \left( 2.5\eta \frac{Q}{1} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{1} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{1} \right) \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} \left( \frac{Q}{1} \right) & T > 3 \end{cases} \quad (3.13)$$

#### Spectre élastique RPA2024

Le spectre de réponse élastique RPA 2024 horizontal  $S_{ae}$  est donné par rapport à l'accélération de la pesanteur  $g$ , pour les composantes horizontales de l'action sismique, par l'équation 3.14 .

$$\frac{S_{ae}}{g} = \begin{cases} A.I.S. \left( 1 + \frac{T}{T_1} (2.5\eta - 1) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ A.I.S. (2.5\eta) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ A.I.S. (2.5\eta) \left( \frac{T_2}{T} \right) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ A.I.S. (2.5\eta) \left( \frac{T_2 \cdot T_3}{T^2} \right) & T_3 \leq T \leq 4s \end{cases} \quad (3.14)$$

#### Spectre inélastique

Le spectre de demande inélastique est obtenu en réduisant le spectre élastique réglementaire dans le format spectral A-D. Plusieurs méthodes ont été proposées

notamment celles présentées dans les guides FEMA 273 et ATC40.

Pour un système élastique à 1ddl de période  $T$ , la relation entre l'accélération spectrale élastique  $S_{ae}$  et le déplacement spectral élastique  $S_{de}$ , est donnée par :

$$S_{ae} = \omega^2 S_{de} = \frac{4\pi^2}{T^2} S_{de} \quad (3.15)$$

La demande sismique est basée sur le spectre de réponse d'un système 1ddl ayant une relation force-déplacement bilinéaire. l'accélération spectrale inélastique  $S_a$  et le déplacement spectral inélastique  $S_d$  peuvent être déterminés, par les relations suivantes :

$$S_a = \frac{S_{ae}}{R_\mu} \quad (3.16)$$

$$S_d = \frac{\mu}{R_\mu} S_{de} = \frac{\mu}{\frac{S_{ae}}{S_a}} S_{de} = \mu \frac{S_{de}}{S_{ae}} S_a = \mu \frac{T^2}{4\pi^2} S_a \quad (3.17)$$

$\mu$  est le facteur de ductilité défini comme étant le rapport entre le déplacement maximal et le déplacement élastique limite.

$R_\mu$  est le facteur réducteur dû à la dissipation d'énergie hystérétique pour les structures ductiles, il est relié au facteur de ductilité  $\mu$  et à la période  $T$  de la structure par les équations :

$$R_\mu = \begin{cases} (\mu - 1) \frac{T}{T_2} + 1 & \text{si } T \leq T_2 \\ \mu & \text{si } T > T_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

Rappelons que  $T_2$  est la période caractéristique liée à la nature du sol, elle représente la limite supérieure des périodes correspondant au palier d'accélération spectrale constante.

En réduisant le spectre élastique représenté dans le format A-D on obtient le spectre inélastique à ductilité constante qui représente la demande sismique. (Figure 3.4)

### 3.3.4 Performance sismique

La méthode N2 est utilisée pour obtenir la demande sismique qui doit être comparée à la capacité de la structure pour évaluer son point de performance sismique, appelé aussi déplacement cible. C'est le point d'intersection des deux courbes représentatives de la capacité et de la demande dans le format A-D.

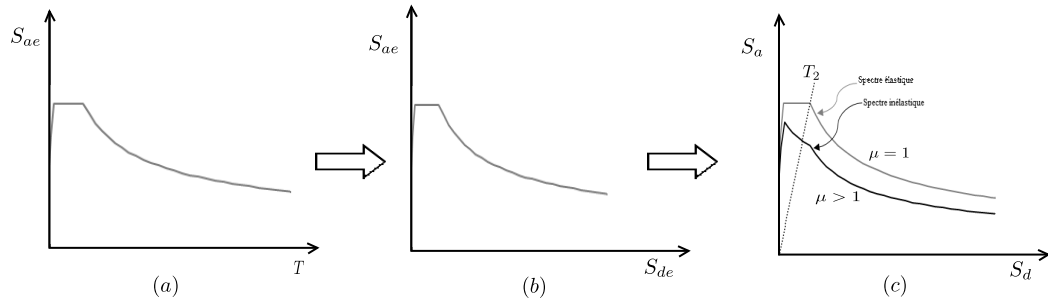


FIGURE 3.4 – (a) Spectre élastique RPA (b) Spectre élastique format A-D (c) Spectre inélastique Format A-D

Schématiquement, les courbes de demande et de capacité, doivent être représentées sur un même graphe dans le format A-D. Pour la courbe de capacité du système 1ddl équivalent qui est exprimée par la relation entre la Force  $F^*$  et le déplacement  $D^*$  (voir figure 3.3), Le passage au format A-D se fait en divisant les forces  $F^*$  par la masses  $m^{*eq}$  pour obtenir la capacité en accélération spectrale  $S_a$  (équation 3.19). Quant au déplacement spectral  $S_d$ , il est égal à  $D^*$  (Figure 3.5).

$$S_a = \frac{F^*}{m^{*eq}} = \frac{\frac{V_{base}}{\alpha_i}}{\alpha_i m_{gi}} = \frac{V_{base}}{\alpha_i^2 m_{gi}} = \frac{V_{base}}{m_i^*} \quad (3.19)$$

**Attention :** ne pas confondre les deux masses  $m^{*eq}$  et  $m_i^*$

$m^{*eq} = \alpha_i m_{gi}$  est la masse du système équivalent à 1ddl

$m_i^* = \alpha_i^2 m_{gi}$  est la masse modale du mode i du système à Pddl

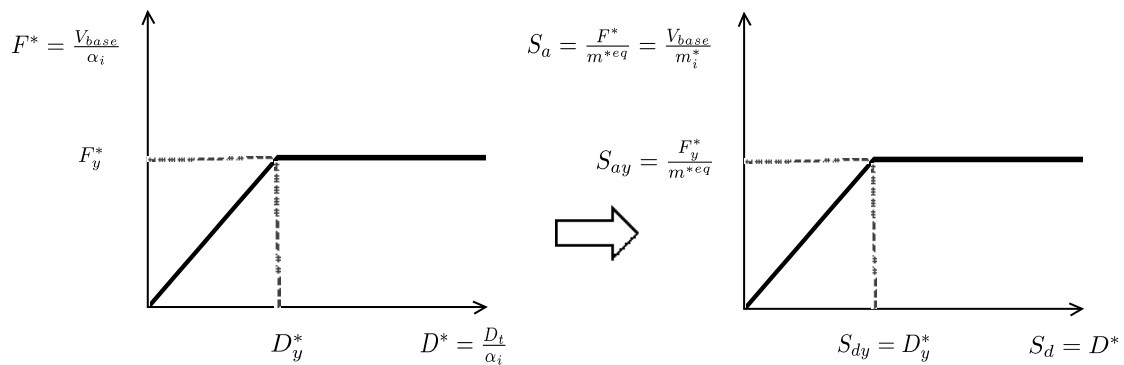


FIGURE 3.5 – Courbe de capacité dans le format A-D

Le point d'intersection entre la courbe de capacité et le spectre inélastique, dans le format A-D donne le point de performance tel que montré sur la figure 3.6.

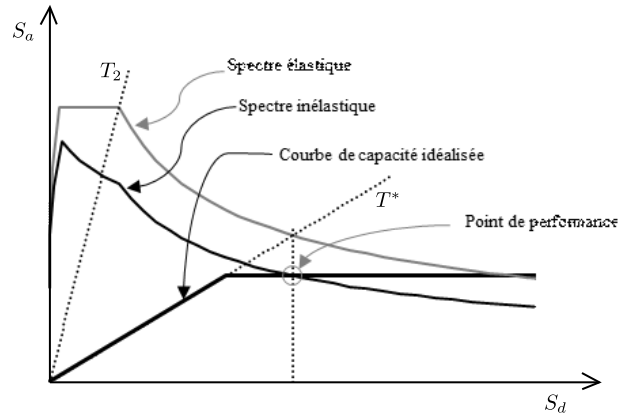


FIGURE 3.6 – Le point de performance

Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de schématiser les courbes pour obtenir le point de performance, il peut être calculé comme suit :

D'abord, on calcule le facteur réducteur  $R_\mu$  par l'équation :

$$R_\mu = \frac{S_{ae}(T^*)}{S_{ay}} \quad (3.20)$$

$S_a(T^*)$  est la demande en accélération spectrale élastique correspondant à la valeur de la période  $T = T^*$  est obtenue en remplaçant la valeur de  $T^*$  dans l'expression du spectre réglementaire élastique (L'équation 3.13 pour le spectre RPA99/2003 ou bien l'équation 3.14 du spectre RPA2024).

$S_{ay}$  est l'accélération élastique limite.

Le point de performance du système 1ddl équivalent, qui correspond à la demande en déplacement inélastique  $S_d$ , est déduit comme suit :

**Premier cas :**  $T^* \geq T_2$

Dans ce cas le point de performance est égal au déplacement spectral élastique correspondant à la période :  $T^*$ , qui se calcule directement :

$$S_d = \mu D_y^* = \mu S_{dy} = S_{de}(T^*) \quad T^* \geq T_2 \quad (3.21)$$

Dans ce cas

$$\mu = R_\mu$$

**deuxième cas :**  $T^* < T_2$

D'après l'équation 3.17,  $S_d$  s'exprime par :

$$S_d = \mu S_{dy} = S_d = \frac{\mu}{R_\mu} S_{de}$$

Sachant d'après l'équation 3.18 que :

$$\mu = 1 + (R_\mu - 1) \frac{T_2}{T^*}$$

Alors

$$S_d = \left( 1 + (R_\mu - 1) \frac{T_2}{T^*} \right) \frac{S_{de}(T^*)}{R_\mu} \quad T^* < T_2 \quad (3.22)$$

La valeur de  $S_d$  correspond à la demande en déplacement du système à 1ddl,

Le point de performance ou le déplacement cible du système à Pddl représenté par un déplacement au sommet de la structure est égal, selon l'équation 3.10 , à :

$$D_{t(cible)} = \alpha_i S_d \quad (3.23)$$

Une analyse pushover doit être effectuée en poussant progressivement la structure jusqu'à ce que un déplacement égal à  $D_{t(cible)}$  soit atteint au niveau du sommet de la structure. Le niveau de déformation de la structure induit à ce stade définit sa performance vis à vis d'un événement sismique.

l'évolution des plastifications des éléments de la structure ainsi que leur ordre d'apparition peuvent alors être estimés jusqu'au point de performance

### 3.3.5 Endommagement

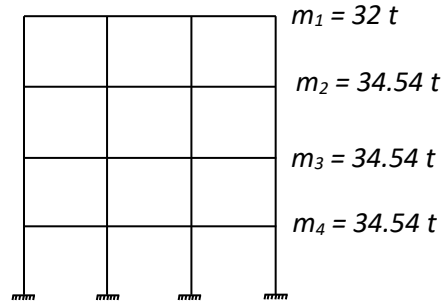
Il est nécessaire de définir des critères d'endommagement afin de vérifier la performance sismique des structures. Il est possible de suivre l'évolution de l'état de la structure à chaque incrément de la poussée progressive.

L'endommagement, qu'il soit local ou global, est évalué selon des critères qui peuvent être basés sur la dégradation de certaines propriétés structurelles. Par exemple le rapport entre le déplacement inter-étage et la hauteur d'étage, est l'un des indicateurs de dommages les plus simples à déterminer et les plus couramment utilisés. Aussi, l'état de déformation constitue un bon paramètre pour identifier les dommages locaux et leur progression dans les éléments.

### 3.3.6 Application

Soit le portique à quatre niveaux de la figure ci-dessous, dimensionné selon RPA99/2003. Le portique est modélisé par des éléments poteaux poutres non-linéaires.

Il est demandé de calculer le point de performance (déplacement cible) du portique, en utilisant la méthode N2.



Le portique, d'importance moyenne, est implanté sur un site (S2), en zone sismique (IIa). Le spectre élastique RPA99/2003 ainsi que les caractéristiques correspondantes du portique sont donnés ci-dessous.

**Remarque :** La valeur du coefficient de comportement  $R$  qui a servi pour le dimensionnement du portique est égale à 5. Par contre le spectre utilisé représente le spectre élastique d'où une valeur de  $R$  égale à 1.

$$\frac{S_{ae}}{g} = \begin{cases} 1.25A \left( 1 + \frac{T}{T_1} (2.5\eta Q - 1) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A)Q & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A)Q \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3s \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} Q & T > 3s \end{cases}$$

$A = 0.15$   
 $T_1 = 0.15s \quad T_2 = 0.4s$   
 $Q = 1.15 \quad R = 1$   
 $\xi = 6\% \quad \eta = 0.935$   
 $g = 9.81m/s^2$

Le vecteur représentant le premier mode de vibration du portique calculé par l'analyse modale est :

$$\phi_1^T = [1 \quad 0.84 \quad 0.57 \quad 0.23]$$

La masse généralisée du premier mode :

$$m_{g1} = \phi_1^T M \phi_1 = 69.37t$$

Le facteur de participation modale du premier mode :

$$\alpha_1 = \frac{\phi_1^T M I}{m_{g1}} = 1.277$$

La masse modale du premier mode est :

$$m_1^* = m_{g1} \alpha_1^2 = 113.1(t)$$

**Remarque :**

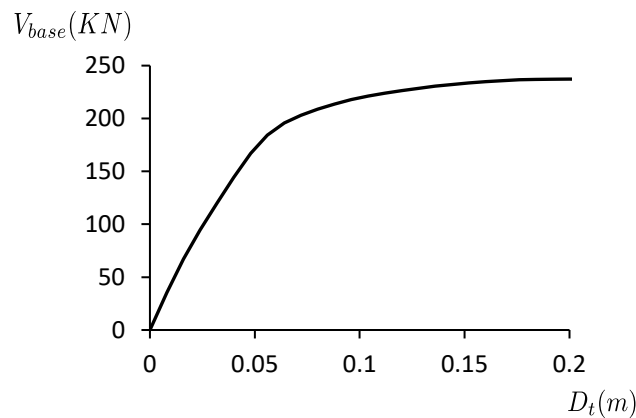
Si on calcule le pourcentage de participation modal du premier mode, on trouve :

$$\frac{m_1^*}{m_{totale}} 100 = \frac{113.1}{135.5} 100 = 83.47\%$$

Cette valeur montre qu'il est tout à fait justifié de considérer un chargement qui a la forme du premier mode pour effectuer l'analyse Pushover, car la réponse est dominée par ce dernier.

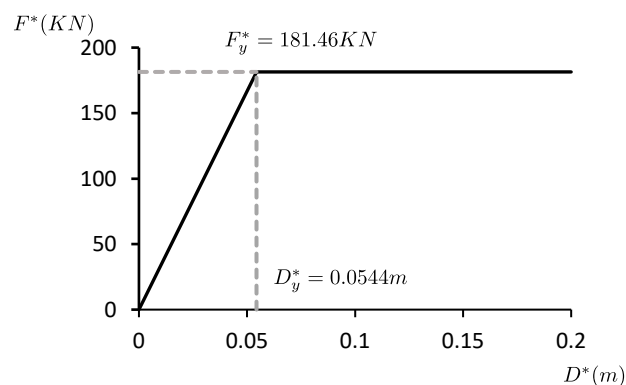
Dans ce qui suit on exposera les étapes à suivre pour chercher le point de performance.

**Etape1 :** Pousser le portique avec une force latérale ayant la forme du premier mode de manière progressive et incrémentale pour obtenir la courbe de capacité qui donne l'effort à la base en fonction du déplacement au sommet, représentée sur la figure ci-dessous.



**Etape2 :** Détermination des caractéristiques du système équivalent à 1ddl, dont la courbe de capacité bi-linéaire idéalisée est représentée sur la figure ci-dessous.

Il s'agit de transformer la courbe de capacité du système Pddl en une courbe de capacité du système 1ddl équivalent puis d'idéaliser cette courbe en courbe bilinéaire pour pouvoir extraire la valeur de la rigidité du système équivalent



La rigidité du système à 1ddl équivalent s'obtient par :

$$K^{*eq} = \frac{F_y^*}{D_y^*} = \frac{181.46}{0.0544} = 3335.66 \text{ KN/m}$$

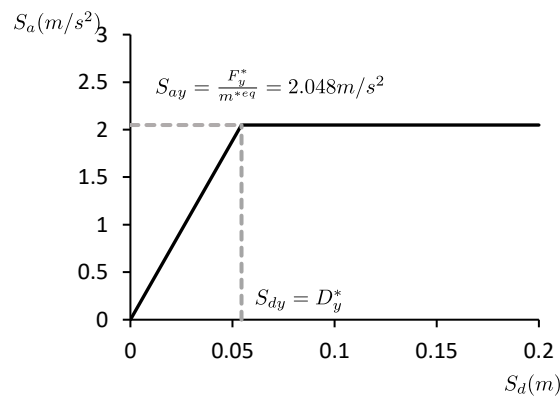
La masse du système à 1ddl équivalent s'obtient par :

$$m^{*eq} = \alpha_1 m_{g1} 1.277 * 69.37 = 88.58$$

La période du système équivalent est déterminée par :

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^{*eq}}{K^{*eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{88.58}{3335.66}} = 1.024 \text{ s}$$

Il est maintenant possible d'avoir la courbe de capacité du système équivalent 1ddl au format A-D, il suffit de diviser les forces  $F^*$  par la masse  $m^{*eq}$ .



La valeur de l'accélération spectrale à la limite élastique s'obtient alors par :

$$S_{ay} = \frac{F_y^*}{m^{*eq}} = \frac{181.46}{0.0544} = 2.048 \text{ m/s}^2$$

**Etape3 :** Evaluation de la demande sismique du système équivalent 1ddl dans le format A-D

A partir du spectre élastique, on peut calculer les valeurs spectrales  $S_{ae}$  et  $S_{de}$  correspondant à la période du système équivalent 1ddl  $T^*$ .

Puisque

$$(T_2 = 0.4 \text{ s}) \leq (T^* = 1.024 \text{ s}) \leq 3 \text{ s}$$

Alors l'accélération spectrale élastique  $S_{ae}(T^*)$  se calcule en utilisant la troisième expression du spectre élastique, comme suit :

$$\begin{aligned}
 S_{ae}(T^*) &= g 2.5 \eta (1.25 A) Q \left( \frac{T_2}{T^*} \right)^{2/3} \\
 &= 9.81 \times 2.5 \times 0.935 \times 1.25 \times 0.15 \times 1.15 \times \left( \frac{0.4}{1.024} \right)^{2/3} \\
 &= 2.64 m/s^2
 \end{aligned}$$

Sachant que  $S_{ae} = \omega^2 S_{de} = \frac{4\pi^2}{T^2} S_{de}$ , on peut calculer le déplacement spectral élastique :

$$\begin{aligned}
 S_{de}(T^*) &= \frac{T^{*2}}{4\pi^2} S_{ae}(T^*) \\
 &= \frac{1.024^2}{4\pi^2} 2.64 \\
 &= 0.07 m
 \end{aligned}$$

Dans la méthode N2, la demande sismique est basée sur la réduction du spectre élastique, le facteur réducteur peut maintenant être calculé comme suit :

$$R_\mu = \frac{S_{ae}(T^*)}{S_{ay}} = \frac{2.64}{2.048} = 1.3$$

On peut maintenant calculer la ductilité  $\mu$ . Puisque  $T^* > T_2$ , alors selon l'équation 3.18

$$\mu = R_\mu = 1.3$$

**Etape4 :** Calcul du déplacement cible du système équivalent 1ddl

On est dans le cas  $T^* \geq T_2$ , alors d'après l'équation 3.21, le déplacement cible  $S_d$  et égale au déplacement spectral élastique  $S_{de}(T^*)$

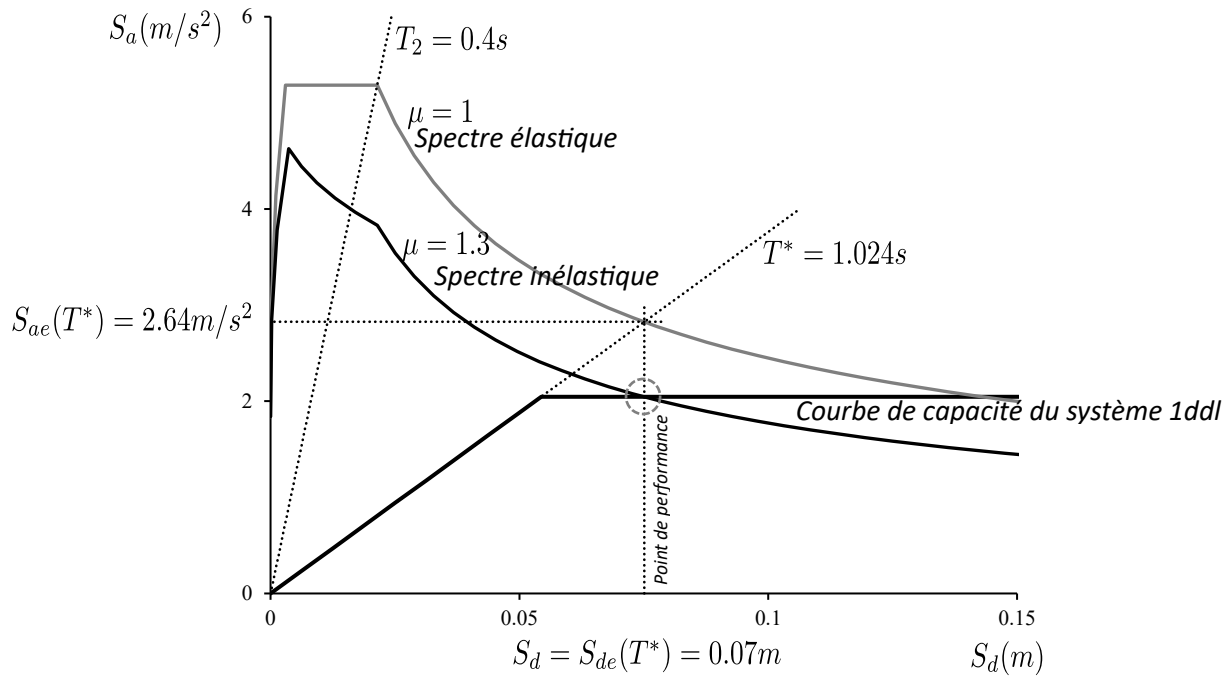
$$S_d = S_{de}(T^*) = 0.07 m$$

On peut aussi le déduire en utilisant la valeur de la ductilité

$$S_d = \mu D_y^* = \mu S_{dy} = 1.3 \times 0.0544 = 0.07 m$$

La figure ci-dessous montre schématiquement la valeur du déplacement cible du système équivalent.

**Remarque :** même si la schématisation n'est pas requise pour effectuer les calculs , elle en reste néanmoins une manière très efficace pour montrer les résultats du calcul du déplacement cible.



**Etape5 :** Détermination du déplacement cible du système à Pdd : Le portique à quatre niveaux

La demande en déplacement correspond à la valeur du déplacement à appliquer au niveau du sommet du portique exprimée d'après l'équation 3.23 par :

$$D_{tcible} = \alpha_1 S_d = 1.277 \times 0.07 = 0.089m$$

**Etape6 :** Estimation de la performance

Effectuer une analyse pushover sur le portique en le poussant progressivement de manière incrémentale jusqu'à ce que le déplacement au sommet atteigne la valeur  $D_{tcible} = 0.089m$ . Le niveau d'endommagement du portique est ensuite analysé selon des critères préétablis.

# Bibliographie

- [1] Anil K. Chopra, 1995. Dynamics of structures, Theory and applications to earthquake engineering, Prentice Hall, Engelwood cliffs, New Jersey.
- [2] R.W. Clough and J. Penzien, 1995. Dynamics of structures, third edition, Computers and Structures, Inc. University Ave. Berkeley, CA 94704, USA.
- [3] A. Filiatrault, 1996. Éléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures, Édition de l'École Polytechnique de Montréal.
- [4] P. Paultre, 2004. Dynamique des structures, application aux ouvrages de génie civil, Édition Hermès, Lavoisier.
- [5] A. Pecker, 2006. Dynamique des structures et des ouvrages, Édition de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [6] DTR. BC 2 48, Ministère de l'Habitat, Règles Parasismiques Algériennes RPA 99/Version 2003
- [7] DTR. BC 2 48, Ministère de l'Habitat, Règles Parasismiques Algériennes RPA 2024
- [8] T. Vidic, P. Fajfar, M. Fishinger, 1994. Consistent Inelastic Design Spectra :Strength and Displacement, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23,507–21,
- [9] FEMA 440 : Fed. Emerg. Manag. Agency, Washingt. DC, 2005. Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures,
- [10] ATC 40 : Appl. Technol. Counc., 1996. Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings, Appl. Technol. Counc. p. 334. doi :10.1193/1.1586093,