

✂– Corrigé de l'examen–✂

Exercice 1 : (5 pts)

1. Vérifions que : $\frac{x+7}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{3-x}{x^2+1}$. On a $\frac{1}{x+2} + \frac{3-x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+(3-x)(x+2)}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{x^2+1+3x-x^2+6-2x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{x+7}{(x^2+1)(x+2)}$. L'égalité est ainsi vérifiée. **1**

2. Calculons $\int \frac{x+7}{(x^2+1)(x+2)} dx$. On a $\int \frac{x+7}{(x^2+1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{-x+3}{x^2+1} dx =$ **2**

$$\ln|x+2| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \arctan(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire la primitive de : $J = \int \frac{\ln x + 7}{x(\ln^2 x + 1)(\ln x + 2)} dx$. On pose le changement de variable $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

On obtient $J = \int \frac{\ln(x) + 7}{x(\ln^2(x) + 1)(\ln(x) + 2)} dx = \int \frac{t + 7}{(t^2 + 1)(t + 2)} dt$. D'après la question (2),

on conclut que $J = \int \frac{t + 7}{(t^2 + 1)(t + 2)} dt = \ln|t + 2| - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + 3 \arctan(t) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$.

Comme $t = \ln x$, alors : $J = \ln|\ln(x) + 2| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2(x) + 1) + 3 \arctan(\ln x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$. **2**

Exercice 2 : (7 pts)

I. Résolution de l'équation différentielle : $y' - y = \frac{e^x}{x+7}$ (E_1) .

a. Solution homogène. L'équation homogène associée à (E_1) est $y' - y = 0$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposons que $y \neq 0$, alors $\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale, on trouve $y_h = k e^x, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$. **1.5**

b. Variation de la constante. Supposons que la solution particulière de l'équation (E_1) est $y_p = k(x)e^x$, alors $y'_p = k'(x)e^x + k(x)e^x$. En remplaçant y_p et y'_p dans l'équation (E_1) , on obtient $k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = \frac{e^x}{x+7} \Rightarrow k'(x)e^x = \frac{e^x}{x+7} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x+7} \Rightarrow k(x) = \int \frac{1}{x+7} dx \Rightarrow k(x) = \ln|x+7|$. Donc $y_p = \ln|x+7| \cdot e^x$. **1**

c. Solution générale de (E_1) . La solution générale est donnée par : $y_g = y_h + y_p = (k + \ln|x+7|)e^x, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$. **1**

II. Soit l'équation différentielle : $y'' - y' = 5 \cos(3x)$. (E_2) **1**

1. Solution homogène. L'équation homogène associée à (E_2) est $y'' - y' = 0$. Son équation caractéristique est : $r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r-1) = 0$. Le discriminant $\Delta = 1 > 0$, donc les racines sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. Dans ce cas $y_h = C_1 + C_2 e^x, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. **1**

2. Déterminons les constantes α et β pour que $y_p(x) = \alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)$ soit une solution particulière de (E_2) . y_p est une solution particulière de (E_2) si $y''_p - y'_p = 5 \cos(3x)$. Après dérivation, on obtient : $y'_p(x) = -3\alpha \sin(3x) + 3\beta \cos(3x)$ et $y''_p(x) = -9\alpha \cos(3x) - 9\beta \sin(3x)$. Donc $y''_p - y'_p = 5 \cos(3x) \Rightarrow (-9\alpha - 3\beta) \cos(3x) + (-9\beta + 3\alpha) \sin(3x) = 5 \cos(3x)$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases} -9\alpha - 3\beta = 5 \\ 3\alpha - 9\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3\beta \\ -9(3\beta) - 3\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{6} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} \cos(3x) - \frac{1}{6} \sin(3x). \quad \mathbf{1}$$

0.75

3. Solution générale de (E_2) : $y_g = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2} \cos(3x) - \frac{1}{6} \sin(3x), \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. Solution de (E_2) vérifiant $y(0) = \frac{1}{5}$ et $y'(0) = \frac{1}{5}$. On a $y'_g(x) = C_2 e^x + \frac{3}{2} \sin(3x) - \frac{1}{2} \cos(3x)$. En remplaçant x par 0 dans y_g et y'_g , on trouve :

$$\begin{cases} y_g(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \\ y'_g(0) = C_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{7}{10} \\ C_2 = \frac{7}{10} \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{7}{10} \end{cases}$$

D'où, la solution de (E_2) vérifiant les conditions initiales est : $y(x) = \frac{7}{10} e^x - \frac{1}{2} \cos(3x) - \frac{1}{6} \sin(3x)$. **0.75**

Exercice 3 : (8 pts)

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f en $(0, 0)$. Si on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, avec $r \geq 0$, on trouve :

$f(x, y) = \frac{r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Car $|\cos^3 \theta - \sin^3 \theta| \leq 2, \forall \theta$. Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, alors f est continue en $(0, 0)$. **1**

2. Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1} \cdot \frac{1}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \quad \mathbf{0.5}$$

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \frac{-k^3}{k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} (-1) = -1. \quad \mathbf{0.5}$$

3. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$\triangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{0.5}$$

$$\triangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^3y - 3x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{0.5}$$

4. Pour que f soit de classe C^1 , il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues sur \mathbb{R}^2 , et en particulier en $(0, 0)$.

a. Si on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{r^4 \cos^4 \theta + 3r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4} = \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin^3 \theta.$$

On constate que cette expression ne dépend que de θ (pas de r). Par conséquent, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

n'existe pas, et $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. **0.5**

b. De même, en posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2r^4 \cos^3 \theta \sin \theta - 3r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^4 \sin^4 \theta}{r^4} = -2 \cos^3 \theta \sin \theta - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin^4 \theta.$$

D'où $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'existe pas. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$, alors la fonction f n'est pas de classe C^1 en $(0, 0)$. **0.5**

5. On dit que f est différentiable en (a, b) s'il existe une application linéaire (unique) notée $df_{(a,b)}$ telle que :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + df_{(a,b)}(h, k) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k), \quad \text{avec } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Avec $\|(h, k)\|$ la norme $\|\cdot\|_2$ donnée par $\|(h, k)\|_2 = \sqrt{h^2 + k^2}$. On a $df_{(a,b)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$, alors

$$f(h, k) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) k + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k).$$

Donc on obtient :

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h + k}{\|(h, k)\|} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left[\frac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - h + k \right] = \frac{hk(h - k)}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Pour étudier $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k)$, on propose deux méthodes.

Méthode 1 (chemin particulier). On considère le chemin $k = -h$ avec $h \rightarrow 0$:

$$\varepsilon(h, -h) = \frac{h \cdot (-h) \cdot (h - (-h))}{(h^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{-2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Donc $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) \neq 0$. Par conséquent f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Méthode 2 (coordonnées polaires). Si on pose $h = r \cos \theta$ et $k = r \sin \theta$, $r \geq 0$, on trouve

$$\varepsilon(h, k) = \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot (r \cos \theta - r \sin \theta)}{(r^2)^{3/2}} = \frac{r^3 \cos \theta \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{r^3} = \cos \theta \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta).$$

Comme $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k)$ dépend de θ , alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$. **1**

II. Soit $g(x, y) = x^3 - 3x + y^2$.

1. Calculons $\nabla g(x, y)$ On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

D'où

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (3x^2 - 3, 2y). \quad \mathbf{1}$$

• **Matrice Hessienne.** On a :

$$\mathbf{a.} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3) = 6x, \quad \mathbf{b.} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2, \quad \text{et} \quad \mathbf{c.} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3) = 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y).$$

$$\text{Alors } H_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.5}$$
