

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✂– Corrigé de l'examen–✂

Exercice 1 :

1. Vérifions que : $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2-x}{x^2+1}$. On a $\frac{1}{x} + \frac{2-x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+(2-x)x}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1+2x-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1+2x}{x(x^2+1)}$. L'égalité est ainsi vérifiée. **1**

2. Calcul des intégrales :

1. $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx$. Comme $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2-x}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$, alors

$$\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{1.5}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$. On pose $t = e^x$, alors $dt = e^x dx \implies dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$. On a aussi $\begin{cases} x=0 \implies t=e^0=1 \\ x=1 \implies t=e. \end{cases}$ Donc $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \int_1^e \frac{t-1}{t(t+1)} dt$, avec

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} \implies \begin{cases} \frac{t-1}{t+1} = a + \frac{b \cdot t}{t+1}, & \text{si } t=0; \quad a=-1 \\ \frac{t-1}{t} = \frac{a \cdot (t+1)}{t} + b, & \text{si } t=-1; \quad b=2. \end{cases} \quad \text{Alors}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = - \int_1^e \frac{1}{t} dx + 2 \int_1^e \frac{1}{t+1} dt = [-\ln|t| + 2 \ln|t+1|]_1^e$$

$$= -1 + 2 \ln(e+1) - 2 \ln(2) = 2 \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - 1. \quad \mathbf{1.5}$$

3. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. On pose $t = \sqrt{x}$, alors $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx \implies dx = 2t dt$.

$$\text{On a aussi } \begin{cases} x=1 \implies t=\sqrt{1}=1 \\ x=4 \implies t=\sqrt{4}=2. \end{cases} \quad \text{Donc } \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$2 \int_1^2 \frac{(1-t)t}{t} dt = 2 \int_1^2 (1-t) dt = [2t - t^2]_1^2 = \boxed{-1}. \quad \mathbf{1}$$

3. Résolution de l'équation différentielle : $xy' - y = \frac{x(2x+1)}{x^2+1}$ (E_1).

a. Solution homogène. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ l'équation homogène associée à (E_1) et $xy' - y = 0$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposons que

$$y \neq 0, \quad \text{alors } \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \implies \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \implies$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \implies |y| = |x|e^c, \quad c \in \mathbb{R} \implies y = \pm e^c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \text{Avec la solution}$$

triviale, on trouve $y_h = kx$, avec $k \in \mathbb{R}$. **1**

b. Variation de la constante. Supposons que la solution particulière de l'équation (E_1) est $y_p = k(x).x$, donc $y'_p = k'(x)x + k(x)$. En remplaçant y_p et y'_p dans l'équation (E_1) , on obtient $x(k'(x)x + k(x)) - k(x)x = \frac{x(2x+1)}{x^2+1} \implies$

$$k'(x)x^2 + k(x)x - k(x)x = \frac{x(2x+1)}{x^2+1} \implies k'(x)x^2 = \frac{x(2x+1)}{x^2+1} \implies k'(x) = \frac{2x+1}{x(x^2+1)}.$$

D'après la première intégrale de la question 2, on trouve

$$k(x) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x. \text{ Donc } y_p = \boxed{x \ln|x| - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) + 2x \arctan x}. \quad \mathbf{1}$$

c. Solution générale de (E_1) .

$$y_g = y_h + y_p = \boxed{k.x + x \ln|x| - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) + 2x \arctan x, \text{ avec } k \in \mathbb{R}}. \quad \mathbf{0.25}$$

4. Résolution de l'équation $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$ (E_2) .

a. Solution de l'équation homogène $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E'_2) .

L'équation caractéristique associée à (E'_2) est $r^2 + 2r + 2 = 0$ (EC) .

(EC) admet deux racines complexes conjuguées, $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. Donc

$$y_h = \boxed{(A \cos x + B \sin x)e^{-x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}. \quad \mathbf{1.5}$$

b. Solution particulière. On a $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x) \implies$

$y'_p = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) \implies y''_p = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$. Donc on aura

$(2a + 4b - 4a) \cos(2x) + (2b - 4a - 4b) \sin(2x) = \sin(2x) \implies$

$$\begin{cases} 4b - 2a = 0 \\ 4a + 2b = -1. \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b \\ 10b = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{10}. \end{cases}$$

$$\implies y_p = \boxed{-\frac{\cos(2x)}{5} - \frac{\sin(2x)}{10}}. \quad \mathbf{1}$$

c. Solution générale de (E_2) . On a :

$$y_g = y_h + y_p = \boxed{(A \cos x + B \sin x)e^{-x} - \left(\frac{\cos(2x)}{5} + \frac{\sin(2x)}{10}\right)}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.25}$$

Exercice 2 :

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. **Continuité de f sur \mathbb{R}^2 :**

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, f est un quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\mathbf{0.25}$

Étudions la continuité en $(0, 0)$. On cherche : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^2}$.

En coordonnées polaires : $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$, on a

$$f(x, y) = f(r, \theta) = \frac{r^4 \sin^4 \theta}{r^2} = r^2 \sin^4 \theta. \text{ Donc,}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin^4 \theta = 0$ (car $\sin^4 \theta$ est bornée). Comme

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, alors f est continue en $(0, 0)$. $\mathbf{1}$

Donc f est continue sur \mathbb{R}^2 . $\mathbf{0.25}$

2. **Dérivées partielles en $(0, 0)$** : Par définition on a :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \quad \mathbf{0.75}$$

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^4 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} k = 0. \quad \mathbf{0.75}$$

3. **Continuité des dérivées partielles et classe C^1** : Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$\mathbf{0.5} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}}. \quad \mathbf{0.5}$$

En coordonnées polaires : $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$, on a :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2r^5 \cos \theta \sin^4 \theta}{r^4} = -2r \cos \theta \sin^4 \theta. \text{ Donc}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} -2r \cos \theta \sin^4 \theta = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. $\mathbf{0.5}$

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2r^5 \sin^3 \theta (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{r^4} = 2r \sin^3 \theta (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta).$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} 2r \sin^3 \theta (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, alors $\mathbf{0.5}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est continue en $(0, 0)$. Comme les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en $(0, 0)$, alors $f \in C^1$ en $(0, 0)$. $\mathbf{0.5}$

4. Comme $f \in C^1$ en $(0, 0)$, alors f est différentiable en $(0, 0)$. $\mathbf{0.5}$

II. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y) = x^2 - \cos y$.

$$\mathbf{1.} \quad \nabla_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \sin y \end{pmatrix} \implies \boxed{\nabla_g(0, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}. \quad \mathbf{1.5}$$

$$\mathbf{2.} \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{H_g(0, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \quad \mathbf{1.5}$$

$$\mathbf{3.} \quad dg_{(a,b)} = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)k = \boxed{2a \cdot h + \sin(b) \cdot k}. \quad \mathbf{1}$$