

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✂– Corrigé de l'examen de remplacement –✂

Exercice 1 :

1. Calcul des intégrales :

1. $\int \frac{1}{x(x^2 + x - 2)} dx.$

On factorise : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. La décomposition en éléments simples est :

$$\frac{1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2},$$

avec $a = \frac{1}{-1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$.

Donc $\int \frac{1}{x(x^2 + x - 2)} dx = \boxed{-\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}}. \quad \mathbf{1.5}$

2. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx.$ On intègre par parties $\begin{cases} u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \implies v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Alors $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$
 $= \left(-\frac{\ln 2}{2} - 0\right) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}}. \quad \mathbf{1.5}$

3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx.$ On pose $t = \sqrt{x}$, alors $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx \implies dx = 2t dt.$

On a aussi $\begin{cases} x = 0 \implies t = 0 \\ x = 1 \implies t = 1. \end{cases}$ Donc $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx = \int_0^1 \frac{t}{t^2+4} \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+4} dt$

$$= 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^1 dt - 8 \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4} dt$$

$$= \left[2t\right]_0^1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \left[\arctan \frac{t}{2}\right]_0^1 = 2 - 4 \arctan \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx = \boxed{2 - 4 \arctan \frac{1}{2}}. \quad \mathbf{1}$

3. Résolution de l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1} \quad (E_1).$

a. Solution homogène. L'équation homogène associée à (E_1) est $y' - 2y = 0$.

On trouve $\boxed{y_h = ke^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}}. \quad \mathbf{1}$

b. Variation de la constante. On pose $y_p = k(x)e^{2x}$, donc $y'_p = k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x}$.

En remplaçant dans (E_1) : $k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x} - 2k(x)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1} \implies k'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$\implies k(x) = \arctan(x).$$

Donc $\boxed{y_p = e^{2x} \arctan(x)}. \quad \mathbf{1}$

c. Solution générale de (E_1) .

$y_g = y_h + y_p = \boxed{(k + \arctan(x)) e^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}}. \quad \mathbf{0.5}$

4. Résolution de l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ (E_2).

a. Solution de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ (E'_2).

L'équation caractéristique associée à (E'_2) est $r^2 - 4r + 4 = 0$ (EC).

(EC) admet une racine réelle double $r = 2$. Donc $y_h = (A + Bx)e^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. **1**

b. Solution particulière. On a $y_p = \lambda x^2 e^{2x}$, donc :

$$y'_p = 2\lambda x e^{2x} + 2\lambda x^2 e^{2x}$$

$$y''_p = 2\lambda e^{2x} + 4\lambda x e^{2x} + 4\lambda x e^{2x} + 4\lambda x^2 e^{2x} = (2\lambda + 8\lambda x + 4\lambda x^2)e^{2x}.$$

En remplaçant dans (E_2) :

$$(2\lambda + 8\lambda x + 4\lambda x^2)e^{2x} - 4(2\lambda x + 2\lambda x^2)e^{2x} + 4\lambda x^2 e^{2x} = e^{2x}$$

$$\implies 2\lambda e^{2x} = e^{2x} \implies 2\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{1}$$

$$\text{Donc } y_p = \frac{x^2 e^{2x}}{2}.$$

c. Solution générale de (E_2).

$$y_g = y_h + y_p = \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.5}$$

d. Solution de E_2 vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

$$y_g(0) = A = 1.$$

$$y'_g = (B + x) e^{2x} + 2 \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}$$

$$y'_g(0) = B + 2A = 2 \implies B = 2 - 2A = 2 - 2 = 0.$$

$$\text{Donc } y_g = \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}. \quad \mathbf{1}$$

Exercice 2 :

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. **Continuité de f en $(0, 0)$:** On cherche $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$.

En coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) :

$$f(r, \theta) = \frac{r \cos \theta \cdot r^3 \sin^3 \theta}{r^2} = r^2 \cos \theta \sin^3 \theta.$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos \theta \sin^3 \theta = 0$ (car $\cos \theta \sin^3 \theta$ est bornée).

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, alors f est **continue en $(0, 0)$** . **1**

2. **Dérivées partielles en $(0, 0)$:** Par définition on a :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0. \quad \mathbf{0.75}$$

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot k^3}{k^2} - 0}{k} = 0. \quad \mathbf{0.75}$$

3. **Continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$:** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\mathbf{0.75} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{0.75}$$

En coordonnées polaires ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) = \frac{r^3 \sin^3 \theta (r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta)}{r^4} = r \sin^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta).$$

$$\text{Donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 0$$

(car $\sin^3 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$ est bornée).

$$\text{Or } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \text{ donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est **continue en** $(0, 0)$. **0.5**

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta) = \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta (3r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}{r^4} = r \cos \theta \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta).$$

$$\text{Donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

(car $\cos \theta \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$ est bornée).

$$\text{Or } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \text{ donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}$ est **continue en** $(0, 0)$. **0.5**

Comme les deux dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$, alors f est **de classe** C^1 **en** $(0, 0)$. **0.5**

4. **Différentiabilité de f en $(0, 0)$** : Puisque les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$, alors f est de classe C^1 en $(0, 0)$, et donc f est **différentiable en** $(0, 0)$. **0.5**

II. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y) = x^3 - 3x + y^2 - 2y$.

$$1. \text{ On a } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y - 2.$$

$$\text{Donc } \boxed{\nabla g(1, 1) = (0, 0)}. \quad \mathbf{1}$$

$$2. \text{ On a } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{H_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}. \quad \mathbf{1.5}$$

$$3. dg_{(a,b)} = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \cdot h + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \cdot k = \boxed{(3a^2 - 3) \cdot h + (2b - 2) \cdot k}. \quad \mathbf{1.5}$$