

Analyse II

Université A.MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025-2026

✂- Corrigé de l'examen de remplacement -✂

Exercice 1 :

1. Calcul des intégrales :

1. $\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$. La décomposition de $\frac{1}{x(x^2-1)}$ en éléments simples est

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \text{ avec } a = -1, b = \frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{2}.$$

Donc $\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} =$

$$\boxed{-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{1.5}}$$

2. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$. On intègre par parties $\begin{cases} u = \ln(x+1) \implies u' = \frac{1}{x+1} \\ v' = \frac{1}{x^2} \implies v = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

Alors $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} \right]_1^2$
 $+ \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x} \right]_1^2 + [\ln x - \ln(x+1)]_1^2 = \boxed{-3\frac{\ln 3}{2} + 3\ln 2}. \quad \mathbf{1.5}$

3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$. On pose $t = \sqrt{x}$, alors $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx \implies dx = 2t dt$.

On a aussi $\begin{cases} x=0 \implies t=\sqrt{0}=0 \\ x=1 \implies t=\sqrt{1}=1 \end{cases}$ Donc $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx =$
 $\int_1^2 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int_1^2 \frac{2t^2+2-2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^2 dt - 2 \int_1^2 \frac{1}{t^2+1} dt =$
 $\boxed{[2t]_0^1 - [\arctan t]_0^1} = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}. \quad \mathbf{1}$

3. Résolution de l'équation différentielle : $y' - y = \frac{e^x}{x(x^2-1)}$ (E_1).

a. Solution homogène. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ l'équation homogène associée à (E_1) et $y' - y = 0$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposons que $y \neq 0$, alors $\frac{y'}{y} = 1 \implies \frac{1}{y} dy = dx \implies \int \frac{1}{y} dy = \int dx \implies \ln|y| = x + c, c \in \mathbb{R}$
 $\implies |y| = e^c \cdot e^x, c \in \mathbb{R} \implies y = \pm e^c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale, on trouve
 $y_h = ke^x, \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{1}$

b. Variation de la constante. Supposons que la solution particulière de l'équation (E_1) est $y_p = k(x) \cdot e^x$, donc $y'_p = k'(x)e^x + k(x)e^x$. En remplaçant y_p et y'_p dans l'équation (E_1), on obtient $k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = \frac{e^x}{x(x^2-1)} \implies$

$$k'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} \implies k(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)} dx. \text{ D'après la première intégrale de la}$$

question 1, on trouve $k(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1|$. Donc

$$y_p = \left(-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| \right) e^x. \quad \mathbf{1}$$

c. Solution générale de (E_1) . $y_g = y_h + y_p$

$$= \left(k - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| \right) e^x, \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.5}$$

4. Résolution de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$ (E_2) .

a. Solution de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ (E'_2) .

L'équation caractéristique associée à (E'_2) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ (EC) .

(EC) admet une racine réelle double, $r = 1$. Donc

$$y_h = (A + Bx)e^x, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{1}$$

b. Solution particulière. On a $y_p = \lambda x^2 e^x \implies y'_p = \lambda x^2 e^x + 2\lambda x e^x \implies y''_p = \lambda x^2 e^x + 4\lambda x e^x + 2\lambda e^x$. Donc on aura $(\lambda x^2 + 4\lambda x + 2\lambda)e^x - (2\lambda x^2 + 4\lambda x)e^x + \lambda x^2 e^x$

$$= e^x \implies 2\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{2}. \text{ Donc } y_p = \frac{x^2 e^x}{2}. \quad \mathbf{1}$$

c. Solution générale de (E_2) . On a :

$$y_g = y_h + y_p = \left(A + Bx + \frac{x^2}{2} \right) e^x, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}. \quad \mathbf{0.5}$$

d. Solution générale de E_2 qui vérifie $y_g(0) = 1$ et $y'_g(0) = 0$.

$$\begin{cases} y_g(0) = 1 \implies A = 1, \\ y'_g(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies B = -A = -1 \end{cases} \text{ . Donc } y_g = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) e^x. \quad \mathbf{1}$$

Exercice 2 :

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. **Continuité de f en $(0, 0)$:** On cherche : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

En coordonnées polaires : $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$, on a

$$f(x, y) = f(r, \theta) = \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta). \text{ Donc,}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0$ (car $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ est bornée). Comme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0), \text{ alors } f \text{ est continue en } (0, 0). \quad \mathbf{1}$$

2. **Dérivées partielles en $(0, 0)$:** Par définition on a :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 0}{h^2} = 1, \quad \mathbf{0.75}$$

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^3 - 0}{k^2} = 1. \quad \mathbf{0.75}$$

3. **Continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$:** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$\mathbf{0.75} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^2 y^2 + y^4 - 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \mathbf{0.75}$$

Si on pose $y = \lambda x$, on obtient :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2(t^2x^2) - 2xt^3x^3}{(x^2 + t^2x^2)^2} = \frac{x^4(1 + 3t^2 - 2t^3)}{(x^4(1 + t^2)^2)} = \frac{1 + 3t^2 - 2t^3}{(1 + t^2)^2}. \text{ Donc}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 + 3t^2 - 2t^3}{(1 + t^2)^2}. \text{ Comme cette limite dépend de la variable } t, \text{ alors}$$

0.5 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. De la même manière on obtient :

$$\triangleright \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^2t^2x^2 + t^4x^4 - 2txx^3}{(x^2 + t^2x^2)^2} = \frac{x^4(1 + 3t^2 - 2t^3)}{(x^4(1 + t^2)^2)} = \frac{t^4 + 3t^2 - 2t}{(1 + t^2)^2}. \text{ Donc}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{t^4 + 3t^2 - 2t}{(1 + t^2)^2}. \text{ Comme cette limite dépend de la variable } t, \text{ alors}$$

0.5 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Comme les dérivées partielles de f ne sont pas continues en $(0, 0)$, alors la fonction f n'est pas de classe C^1 en $(0, 0)$. **0.5**

4. Différentiabilité de f en $(0, 0)$. On cherche

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \text{ On a}$$

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 + k^3 - (h + k)(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \text{ Or}$$

$$h^3 + k^3 - (h + k)(h^2 + k^2) = -hk(h + k), \text{ donc}$$

$$\frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk(h + k)}{(h^2 + k^2)^{3/2}}. \text{ Si on pose } k = h, \text{ on}$$

$$\text{obtient } \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\right). \text{ Donc la fonction } f \text{ n'est pas différentiable en } (0, 0). \text{ **1.5**}$$

II. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y) = (x - y)^3 + 6xy$.

$$1. \text{ On a } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3(x - y)^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -3(x - y)^2 + 6x. \text{ Donc}$$

$$\boxed{\nabla g(1, 1) = (6, 6)}. \text{ **1**}$$

$$2. \text{ On a } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 6(x - y), \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -6(x - y). \text{ Alors } \boxed{H_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \text{ **1**}$$

$$3. dg_{(a,b)} = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)k = \boxed{(3(a - b)^2 + 6b) \cdot h + (-3(a - b) + 6a) \cdot k}. \text{ **1**}$$