



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Polycopié de

Résistance des matériaux 1 (Cours)

Dr AREZKI née DJADOUF Samia

Maître de conférences A

Laboratoire de Génie de Construction et d'Architecture (LGCA)

Année / 2025/2026

Avant-propos

L'analyse des éléments de structures en génie civil est importante pour la conception et la réalisation des différents ouvrages.

L'ingénieur doit savoir comment distinguer entre les diverses sollicitations auxquelles la structure est soumise. Les sollicitations étant déterminées, il peut donc procéder au dimensionnement de n'importe quel élément de la structure et faire la vérification de la bonne tenue de celle-ci en vérifiant que les déformations et les contraintes calculées ne dépassent les valeurs limites admissibles.

Dans ce polycopié qui est destiné aux étudiants de deuxième année Génie civil (parcours Ingénieur et LMD), nous avons exposé d'une manière simple et concise six chapitres. Le premier dresse les premières notions du module résistance des matériaux à commencer par définir les différentes sollicitations (on s'intéresse uniquement aux sollicitations simples), calcul des réactions d'appuis, détermination des efforts internes et tracer les diagrammes de ces derniers. Le deuxième donne une idée sur les caractéristiques géométriques qui sont utiles dans les calculs des déformations et la vérification des contraintes. Les quatre chapitres qui suivent sont dédiés respectivement aux quatre sollicitations simples existantes à savoir: l'effort normal de traction ou compression, la flexion, le cisaillement et la torsion.

Table de matières

| | |
|------------------------------|----|
| Avant propos | |
| Canevas d'offre de formation | |
| Table des matières..... | 01 |
| Liste des figures..... | 03 |
| Notations..... | 05 |

Chapitre 1

Introduction et généralités

| | |
|---|----|
| I.1. Introduction | 07 |
| I.2. But et hypothèses de la résistance des matériaux..... | 08 |
| I.3. Notions de la statique..... | 09 |
| I.4. Classification des actions..... | 10 |
| I.5. Différents types de chargements et liaisons | 12 |
| I.6. Principe général d'équilibre statique d'une structure..... | 13 |
| I.7. Structures isostatique et hyperstatique..... | 13 |
| I.8. Méthode des sections pour la détermination des efforts internes..... | 14 |
| I.9. Sollicitations (M, N, T) et convention de signe..... | 15 |
| I.10. Diagrammes des efforts internes..... | 15 |

Chapitre 2

Caractéristiques géométriques des sections droites

| | |
|---|----|
| II.1. Introduction..... | 17 |
| II.2. Centre de gravité..... | 17 |
| II.3. Moment statique..... | 18 |
| II.4. Moment d'inertie d'une section droite..... | 19 |
| II.5. Transformation des moments d'inertie..... | 20 |
| II.6. Axes principaux centraux, moments d'inertie principaux..... | 21 |

Chapitre 3

Traction simple et compression simple

| | |
|---|----|
| III.1. Introduction..... | 23 |
| III.2. Efforts normaux de traction et de compression..... | 23 |

| | |
|---|----|
| III.3. Contrainte normale..... | 24 |
| III.4. Déformation élastique (Diagramme contrainte/déformation)..... | 24 |
| III.5. Loi de Hooke et module de Young..... | 26 |
| III.6. Condition de résistance et notion de contraintes admissible..... | 26 |

Chapitre 4

Flexion simple

| | |
|---|----|
| IV.1. Introduction..... | 28 |
| IV.2. Définitions et hypothèses..... | 28 |
| IV.3. Effort tranchant et moment fléchissant..... | 30 |
| IV.4. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissants..... | 32 |
| IV.5. Contraintes en flexion simple..... | 33 |
| IV.6. Notion de l'axe neutre et dimensionnements..... | 35 |
| IV.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion (notion de la flèche)..... | 36 |

Chapitre 5

Cisaillement simple

| | |
|--|----|
| V.1. Définition..... | 40 |
| V.2. Cisaillement | 40 |
| V.3. Contrainte déformation élastique au cisaillement..... | 42 |
| V.4. Condition de résistance en cisaillement..... | 43 |
| V.5. Cas des assemblages par rivets..... | 44 |

Chapitre 6

Torsion simple

| | |
|---|----|
| VI.1. Définition..... | 50 |
| VI.2. Moment de torsion..... | 50 |
| VI.3. Contrainte tangentielle ou de glissement..... | 52 |
| VI.4. Déformation élastique de torsion..... | 53 |
| VI.5. Condition de résistance à la torsion..... | 55 |
| Références bibliographiques..... | 56 |

Liste des Figures

Chapitre 1

Introduction et généralités

| | |
|--|----|
| Figure I.1. Hypothèse de Navier Bernoulli..... | 09 |
| Figure I.2. Efforts internes dans les poutres..... | 14 |
| Figure I.3. Différentes coupes en fonction du chargement de la poutre..... | 14 |
| Figure I.4. Convention de signe..... | 15 |

Chapitre 2

Caractéristiques géométriques des sections droites

| | |
|---|----|
| Figure II.1. Centre de gravité..... | 17 |
| Figure II.2. Moment statique..... | 18 |
| Figure II.3. Moment d'inertie polaire..... | 20 |
| Figure II.4. Principe des axes parallèles..... | 21 |
| Figure II.5. Principe du changement d'axe pour les moments d'inertie..... | 22 |

Chapitre 3

Traction simple et compression simple

| | |
|--|----|
| Figure III.1. Tracion/ Compression..... | 23 |
| Figure III.2. Contrainte normale sous un effort normal..... | 24 |
| Figure III.3. Déformation élastique sous une traction | 25 |
| Figure III.4. Diagramme contrainte/déformation | 25 |
| Figure III.5. Type de déformation du début de chargement jusqu'à la rupture..... | 26 |

Chapitre 4

Flexion simple

| | |
|--|----|
| Figure IV.1. Poutre avant et après déformation (Principe de Navier Bernoulli)..... | 26 |
| Figure IV.2. Principe de Saint-Venant..... | 30 |
| Figure IV.3. Effort tranchant et moment fléchissant..... | 31 |
| Figure IV.4. Convention de signe pour le calcul des efforts internes..... | 31 |

| | |
|---|----|
| Figure IV.5. Diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants..... | 32 |
| Figure IV.6. Déformation de la poutre sous un moment fléchissant..... | 33 |
| Figure IV.7.a. Diagramme de contrainte normale sous M_f (Poutre symétrique)..... | 34 |
| Figure IV.7.b. Diagramme de contrainte normale sous M_f (Poutre asymétrique)..... | 34 |
| Figure IV.8. Diagramme de contrainte normale sous M_f (positif)..... | 36 |
| Figure IV.9. Notion de la flèche (déformation)..... | 37 |

Chapitre 5

Cisaillement simple

| | |
|---|----|
| Figure V.1. Cisaillement..... | 40 |
| Figure V.2. Cisaillement pur (angle de glissement)..... | 41 |
| Figure V.3. Contrainte de cisaillement sous un cisaillement simple..... | 42 |
| Figure V.4. Diagramme de contrainte/déformation au cisaillement..... | 43 |

Chapitre 6

Torsion simple

| | |
|---|----|
| Figure VI.1. Essai de torsion..... | 50 |
| Figure VI.2. Courbe de déformation angulaire sous la torsion..... | 51 |
| Figure VI.3. Schéma de déformation d'un cylindre sous la torsion..... | 52 |
| Figure VI.4. Déformation élastique sous la torsion..... | 54 |
| Figure VI.5. Déformation angulaire unitaire/angle de rotation totale..... | 54 |

Notations

R: Résultante

F: Force

F_x : Force selon x

F_y : Force selon y

M : Moment d'une force

d: Bras de levier

q: Charge répartie

L: longueur d'une poutre

V: Volume

N: Effort tranchant

T: Effort tranchant

ddl: degré de liberté

R_V : Réaction verticale

R_H : Réaction horizontale

G: centre de gravité

X_G : abscisse du centre de gravité

Y_G : Ordonnée du centre de gravité

S_x^* : Moment statique par rapport à x

S_y^* : Moment statique par rapport à y

I_x : Moment d'inertie quadratique par rapport à x

I_y : Moment d'inertie quadratique par rapport à y

J: Moment d'inertie polaire

σ : Contrainte normale

A: Section (aire)

ε : Déformation unitaire

ΔL : déformation linéaire (allongement ou rétrécissement)

E: Module de Young (module d'élasticité)

τ : Contrainte tangentielle

τ_{adm} : Contrainte tangentielle admissible

σ_{adm} : Contrainte normale admissible

f: Flèche

Θ : Déformation angulaire

b: Largeur de la poutre

S: Module de résistance

V(x): Équation du déplacement vertical

$\Theta(x)$: Équation du déplacement angulaire

γ : Glissement relatif

G : Module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (MPa).

μ : Coefficient de poisson

R_{pg} : Résistance pratique au glissement

R_{eg} : Résistance élastique au glissement

S : Coefficient de sécurité

M_t : Moment de torsion

Chapitre 1

Introduction et généralités

I.1. Introduction

I.2. But et hypothèses de la résistance des matériaux

I.3. Notions de la statique

I.4. Classification des actions

I.5. Différents types de chargements et liaisons

I.6. Principe général d'équilibre statique d'une structure

I.7. Structures isostatique et hyperstatique

I.8. Méthode des sections pour la détermination des efforts internes

I.9. Sollicitations (effort normal N , effort tranchant, moment fléchissant, définition et convention de signe)

I.10. Diagrammes des efforts internes

I.1. Introduction

Les premières recherches scientifiques connues sur la résistance d'éléments de construction ne remontent qu'à la fin du XV^{ème} siècle avec les travaux de Galilée sur la tension et la flexion des poutres. Il ne semble pas que les constructions anciennes aient fait l'objet d'études prévisionnelles concernant la résistance. Bien évidemment, les constructions qui se sont effondrées ne sont plus présentes actuellement. En 1678, Robert Hooke énonce les bases de la théorie de l'élasticité linéaire (réversibilité et proportionnalité des déformations par rapport aux efforts), qui rend compte des petites déformations de la plupart des corps solides. Elle est utilisée peu après par Edme Mariotte et Jean Bernoulli pour résoudre des problèmes de flexion de poutres. Après les travaux de Charles Augustin Coulomb, Henri Navier, Augustin-Louis Cauchy, entre autres, au milieu du XIX^{ème} siècle, la résistance des matériaux est créée en tant que science appliquée. Son développement rapide, dû aux travaux des ingénieurs du XX^{ème} siècle, a conduit à l'élaboration de nombreuses méthodes de calcul analytique qui ont pu être dressées en règles ou règlements à l'usage des bureaux d'étude. L'avènement des ordinateurs a rendu possible l'exploitation de méthodes numériques générales qui permettent de résoudre les problèmes posés par les structures complexes (assemblages de poutres, plaques).

Les recherches sont, depuis les années 1970, orientées vers le développement de ces méthodes. Elles sont dirigées vers l'étude des petites et grandes déformations permanentes des matériaux, des phénomènes de rupture, de la résistance aux environnements complexes (efforts évolutifs, hautes et basses températures) et vers l'utilisation de matériaux nouveaux (superalliages, polymères, matériaux composites, céramiques).

I.2. But et hypothèses de la résistance des matériaux (RDM)

I.2.1. But de la résistance des matériaux (RDM)

Le but de la RDM est l'étude de la stabilité interne d'une structure (machines en génie mécanique, bâtiments et tout autre ouvrage en génie civil...)

La RDM est issue d'une théorie plus générale qui est la mécanique des milieux continus (MMC), adaptée aux déformations de tout élément. C'est une science de dimensionnement qui permet de concevoir un ouvrage en assurant une résistance sans dommage à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant le service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

La définition d'un problème élastique est caractérisée par la géométrie de la structure, les conditions d'appuis imposées, la nature et le type de la charges extérieures appliquées.

I.2.2. Hypothèses générales

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

a) *Hypothèses sur le matériau étudié*

- L'homogénéité (composition chimique et propriétés mécaniques identiques en tout point).
- L'isotropie: mêmes propriétés physiques dans toutes les directions de l'espace.
- La continuité du matériau: on suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps et dans toutes les directions.
- L'élasticité et la linéarité du matériau: on suppose que les contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément reprend son état initial après avoir subi un cycle de charge/décharge.

b) *Hypothèses sur la géométrie du matériau étudié*

- Navier-Bernoulli: les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation (Figure I.1)

c) *Hypothèses de petites déformations*

- Saint-Venant: tous les efforts qui interviennent peuvent être schématisés par leur torseur résultant. Les déformations sont très petites par rapport à la géométrie de l'élément

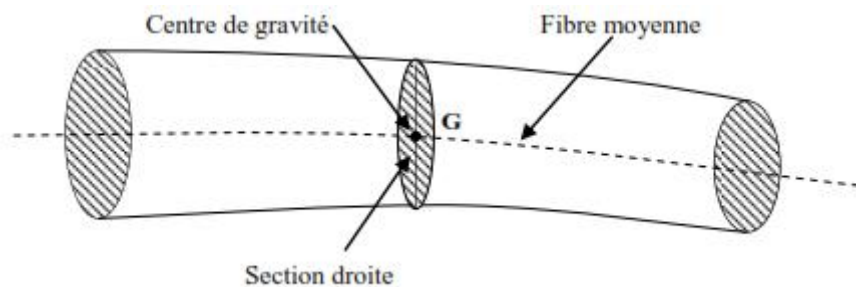


Figure I.1. Hypothèse de Navier Bernoulli

La résistance des matériaux doit s'assurer que les matériaux utilisés respectent les exigences suivantes:

- Résister aux forces appliquées et aux déformations
- Conserver son intégrité géométrique pour éviter toute forme d'instabilité comme est le cas du flambement.
- Endurance et résilience pour pouvoir tolérer les différents cycles de sollicitations et éviter respectivement la fatigue et l'endommagement.

I.3. Notions de la statique

La statique couvre l'étude des forces agissant sur un solide au repos. L'équilibre statique du solide exige que la somme de toutes les forces agissant sur un solide soit égale à 0.

Les équations fondamentales de la statique sont à la base des calculs de structures.

I.3.1. Force

Une force est une action mécanique appliquée toujours en un point et elle est capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps.

Elle est caractérisé par:

- son point d'application
- sa ligne d'action
- son sens et son intensité

I.3.2. La résultante des forces

Il est toujours possible de remplacer un système de forces F_i par une force unique qui a les mêmes effets. Elle s'appelle résultante et s'exprime mathématiquement par la relation I.1:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=0}^n \mathbf{F}_i \dots\dots\dots(I.1)$$

I.3.3. Les composantes d'une force

Dans la plupart des problèmes, il est préférable de décomposer une force F en deux composantes F_x et F_y suivant deux axes perpendiculaire entre eux. On aura donc:

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

I.3.4. Le moment

Une force provoque un mouvement de translation et elle peut aussi faire tourner un corps rigide autour d'un axe non parallèle à sa ligne d'action.

La formule I.2 donne le moment d'une force par rapport à un point o qui est définit comme étant le produit de la force F par la distance d (la force F est perpendiculaire au bras de levier d)

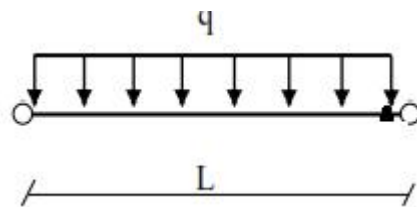
$$M/o = F.d.\dots\dots\dots(I.2)$$

I.4. Classification des actions

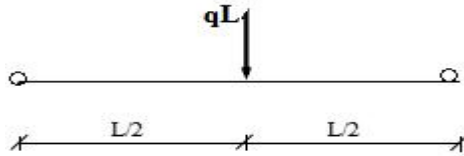
I.4.1. Actions extérieurs

L'analyse des actions mécaniques ne peut se faire qu'en utilisant des modèles pour représenter les actions et leurs effets sur le solide. On distingue:

- Le modèle local: permet d'étudier l'action et son effet en tout point de la zone où elle exerce (pour l'étude des pressions, contraintes dans les matériaux, déformation du solide....).

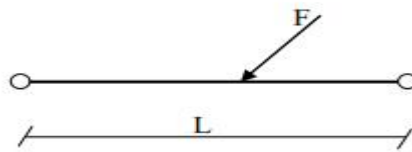


- Le modèle global: ce modèle fait disparaître l'effet local de l'action pour rendre son utilisation pratique pour l'étude de l'équilibre et de la dynamique. L'opération est irréversible



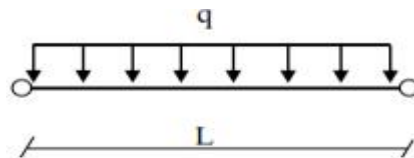
Les sollicitations extérieures peuvent être classées en plusieurs catégories. Généralement, ce classement est basé sur la zone d'application, on distingue des sollicitations ponctuelles, linéaires, surfaciques et volumiques.

- **Ponctuelle**

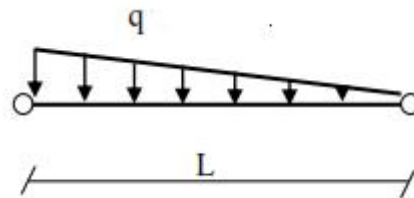


- **Linéaire**

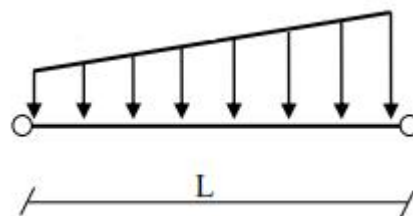
- Linéaire uniforme: la charge uniformément répartie q est remplacée par un effort concentré équivalent à qL



- linéaire variable (triangulaire): $q/2$



- Linéaire variable (trapézoïdale)



- Surfaccique: $q \times S$ (charge \times surface)
- Volumique: $q \times V$ (charge \times volume)

I.4.2. Actions intérieures (efforts internes)

Efforts qu'exercent mutuellement les différentes parties du système. L'effort interne qui agit au niveau d'une section d'un élément de structure peut-être décomposé en effort normal de traction ou de compression, moment fléchissant, moment de torsion, effort tranchant. A partir de ces efforts internes, nous pouvons obtenir des informations sur la répartition des contraintes et des déformations dans la section droite. Les valeurs extrêmes de ces contraintes et déformations sont les mesures de base des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité pour vérifier ou dimensionner les éléments des structures.

I.5. Différents types de chargements et de liaisons

I.5.1. Types de chargements

Il existe 05 types de chargements communément appelés sollicitations simples: la traction N (effort normal d'étirement), la compression N (effort normal de compression), le cisaillement T (effort tranchant), la flexion M_f (moment de flexion) et la torsion M_t (moment de torsion).

- 1) Traction ($N > 0$): $N \neq 0$; $T = 0$, $M_f = 0$; $M_t = 0$
- 2) Compression ($N < 0$): $N \neq 0$; $T = 0$, $M_f = 0$; $M_t = 0$
- 3) Cisaillement T : $N = 0$; $T \neq 0$, $M_f = 0$; $M_t = 0$
- 4) Flexion M_f : $N = 0$; $T = 0$, $M_f \neq 0$; $M_t = 0$(Flexion pure)
- 5) Torsion M_t : $N = 0$; $T = 0$, $M_f = 0$; $M_t \neq 0$

I.5.2. Types de liaisons

Les actions sont les forces extérieures connues (modélisant le poids propre, les actions climatiques et les actions d'exploitations...). Elles sont appliquées à une structure.

Ces actions ou forces créent des réactions aux appuis de cette structure. Les réactions sont développées par les liaisons du solide étudié. Ces liaisons servent à bloquer certains degrés de liberté et elles génèrent des efforts inconnus appelés efforts de liaison (ou réactions d'appuis).

Une structure qui est soumise à des actions subit des déplacements. Dans le plan, il existe trois possibilités de déplacements pour un point quelconque d'une structure: deux translations suivant les deux directions verticale et horizontale et une rotation. On appelle ces déplacements degrés de liberté (ddl).

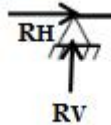
Les mouvements élémentaires possibles dans le plan sont donc à trois degrés de liberté (3ddl); deux translations et une rotation.

Les types de liaisons ou d'appuis sont:

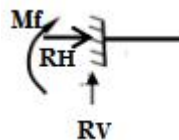
- **L'appui simple:** qui bloque une seule translation suivant la réaction R_V (2ddl)



- **L'appui double:** qui bloque les deux translations suivant les réactions R_H et R_V (1ddl)



- **L'encastrement:** qui bloque les deux translations et la rotation (0ddl)



I.6. Principe général d'équilibre statique d'une structure

Pour qu'une structure plane soit en équilibre, les deux conditions suivantes doivent être remplies:

1. La résultante générale des forces appliquées à cette structure doit être égale à 0.

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum F_V = 0$$

2. Le moment résultant de toutes ces forces par rapport à un point quelconque doit aussi être égale à 0.

$$\sum M/pt = 0$$

I.7. Structures isostatique et hyperstatique

Soit R , le nombre d'inconnus des réactions d'appuis d'une structure. Sachant que le nombre d'équations fondamentales de la statique dans un plan est de 3.

Alors:

Si $R=3$: les équations de la statique permettent de déterminer les réactions d'appuis.

On dit que la structure est isostatique

Si $R > 3$: les équations de la statique sont insuffisantes pour résoudre le problème. La structure est dite hyperstatique.

Si $R < 3$: l'équilibre de la structure ne peut être assuré. Structure instable (hypostatique)

I.8. Méthode des sections pour la détermination des efforts internes

Les forces extérieures appliquées sur une structure impactent les forces entre les particules d'un corps de structure. L'intensité d'impact varie d'un point à un autre d'où en RDM, on procède à l'étude de variation des forces internes. Pour faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle on considère une section transversale d'un élément soumise à une sollicitation (méthode des sections). Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action de ces forces, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

Pour calculer la variation des efforts et moments internes dans n'importe quelle section de la poutre donnée par la Figure I.2, on effectue une coupes à chaque intervention d'une force ou fin d'un chargement.

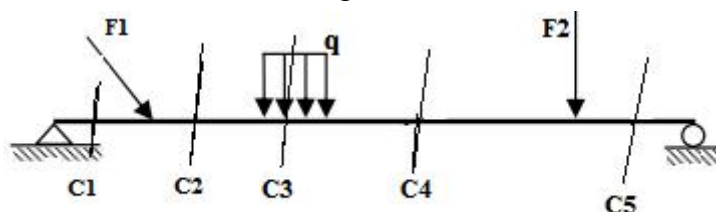


Figure I.2. Efforts internes dans les poutres

La Figure I.3, présente les cinq coupes possibles (C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et C_5),

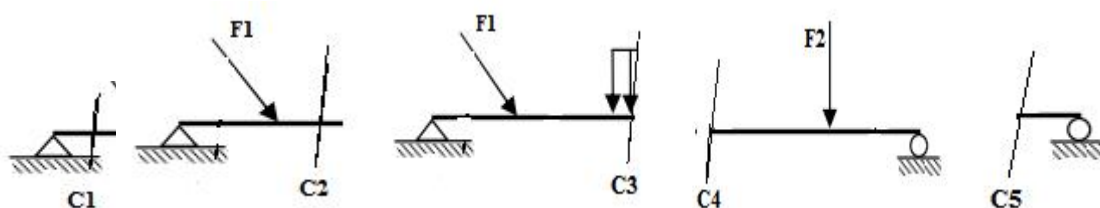


Figure I.3. Différentes coupes en fonction du chargement de la poutre

Coupes C_1 , C_2 et C_3 sont prises de gauche vers la droite et les coupes C_4 et C_5 sont prises de droite vers la gauche.

Pour calculer les efforts intérieurs, on détermine d'abord la valeur des réactions aux appuis et puis les sollicitations qui agissent sur les sections droites des poutres constituant ces structures. Les sollicitations sont l'effort normal N , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M .

I.9. Sollicitations (M, N, T) et convention de signe

Pour faciliter la détermination du sens des efforts intérieurs moment fléchissant M, effort normal N et effort tranchant T aux différentes sections droites de la poutre, on adopte la convention de signe suivante:

- l'effort T est considéré positif s'il agit vers le haut et négatif s'il agit vers le bas.
- entre les appuis de la poutre, le moment fléchissant M est considéré comme positif s'il crée des contraintes de traction dans les fibres inférieures et des contraintes de compression dans les fibres supérieures de la section droite de poutre. Et il est négatif dans le cas contraire (Figure I.4.)
- l'effort normal est positif s'il s'agit d'une traction et négatif s'il s'agit d'une compression.

Pour l'équilibre de la section droite au niveau d'une quelconque coupe, les sollicitations M, N et T agissant sur les deux faces droite et gauche, doivent être égaux et de sens opposé.

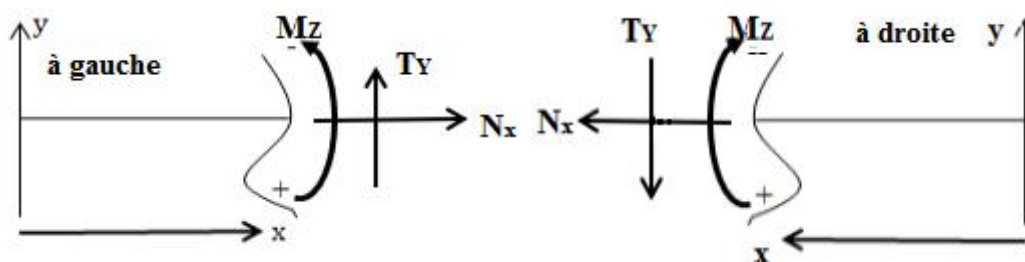


Figure I.4. Convention de signe

I.10. Diagrammes des efforts intérieurs

Pour bien dimensionner une poutre, il faut localiser les sections critiques où les valeurs du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal sont maximales. Pour cela, on a recours à une représentation graphique des valeurs de chacun de ces efforts intérieurs calculés en effectuant les différentes coupes possibles.

I.10.1. Effort normal

L'effort normal interne N_x est la somme de toutes les forces agissant suivant l'axe longitudinal (ox) de l'élément. Il provoque un déplacement (déformation) longitudinal appelé traction si la valeur est positive et compression si la valeur est négative.

I.10.2. Effort tranchant

L'effort tranchant interne est la somme de toutes les forces agissant suivant l'axe perpendiculaire à l'axe longitudinal (Ox). Il provoque un cisaillement des bords de la section.

I.10.3. Moment fléchissant

Le moment fléchissant représente la somme des moments de toutes les forces agissants sur l'élément par rapport à la coupe effectuée. Le sens positif du moment comprime la fibre supérieure et allonge la fibre inférieure.

I.10.4. Moment de torsion

Le moment de torsion M_x est la somme des moments des toutes les forces extérieures par rapport à l'axe Ox . Il est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Caractéristiques géométriques des sections droites

II.1. Introduction

II.2. Centre de gravité

II.3. Moment statique

II.4. Moment d'inertie d'une section droite

II.5. Transformation des moments d'inertie

II.6. Axes principaux centraux, moments d'inertie principaux

II.1. Introduction

Pour le calcul des contraintes agissant sur les sections planes des éléments d'une structure et la détermination des déformations, on a besoin de connaître les caractéristiques géométriques de ces sections.

II.2. Centre de gravité

Pour les éléments de structures courantes à analyser, les aires ont des formes géométriques régulières ou composées de formes géométriques régulières. Pour une section de forme régulière, la position du centre de gravité est connue ou facile à déterminer (Figure II.1). Ainsi les coordonnées du centre de gravité G sont données par les relations II.1 et II.2.

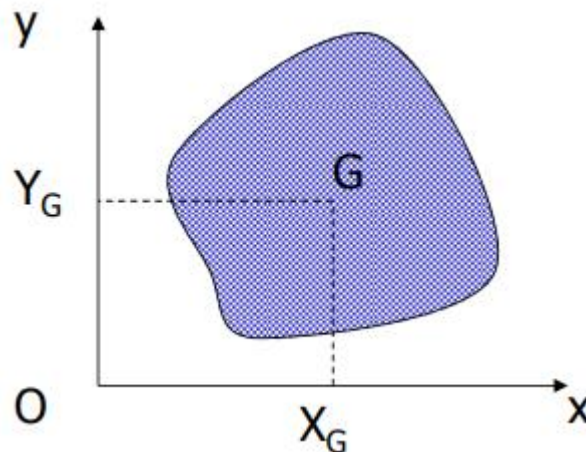


Figure II.1. Centre de gravité

$$x_G = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i} \dots\dots\dots (II.1)$$

$$y_G = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \dots\dots\dots (II.2)$$

Les termes A_i sont les aires des parties composant la section, et les termes x_i et y_i sont les distances respectives de leurs centre de gravité aux axes Ox et Oy.

II.3. Moment statique

Par rapport aux axes rectangulaires Ox et Oy, l'aire A limitée par le contour de l'aire (S) est donnée par la relation II.3 (voir Figure II.2)

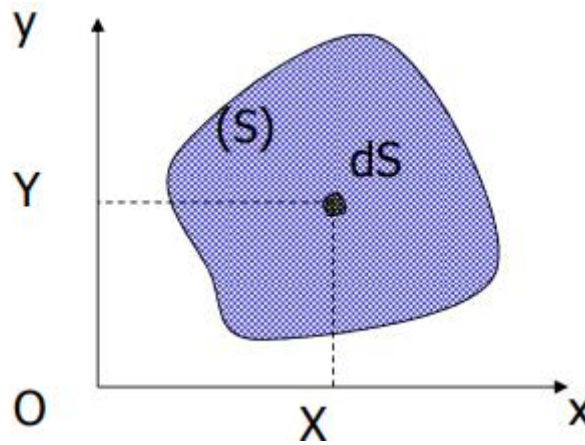


Figure II.2. Moment statique

$$A = \iint dA = \iint dx dy \dots\dots\dots (II.3)$$

Les limites de cette double intégrale sont déterminées d'après l'équation du contour de l'aire c. Souvent la forme géométrique de l'élément est simple et la détermination de l'aire se fait par une intégration simple (relation II.4)

$$A = \int dA \dots\dots\dots (II.4)$$

Les moments statiques S_x et S_y sont les sommations, respectives par rapport aux axes Ox et Oy, des éléments infinitésimaux d'aire dA multipliés par leurs distances respectives à ces axes y_G et x_G (relations II.4.a et II.4.b respectivement)

$$S_x = \int y_G dA = A y_G \dots\dots\dots (II.4.a)$$

$$S_y = \int x_G dA = A x_G \dots\dots\dots (II.4.b)$$

y_G et x_G sont les distances entre le centre de gravité de la section et l'axe de référence, il s'agit de distances perpendiculaires

II.4. Moment d'inertie d'une section droite

Le moment d'inertie est une caractéristique géométrique importante d'une section, car elle intervient dans les calculs de la résistance à la flexion, du flambement et de la détermination des flèches. Par conséquent, dans le calcul des structures, il est important de réaliser qu'il faut donner à une aire A une géométrie telle que le moment par rapport à l'axe soit optimal.

II.4.1. Moment d'inertie quadratique

Les moments d'inertie quadratiques I_x et I_y de l'aire A par rapport aux axes Ox et Oy sont donnés par les expressions II.5.a et II.5.b.

$$I_x = \int y^2 dA \dots\dots\dots(\text{II.5.a})$$

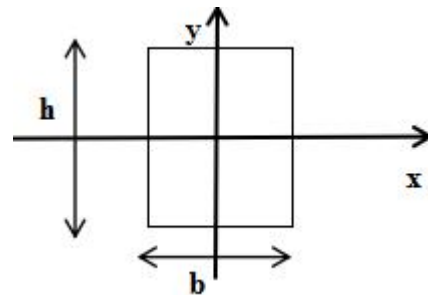
$$I_y = \int x^2 dA \dots\dots\dots(\text{II.5.b})$$

Lorsque l'aire est de forme régulière, le moment d'inertie est calculé par une simple intégration. Lorsque la géométrie de l'élément n'est pas uniforme, on peut diviser la section en plusieurs parties uniformes et la sommation de toutes ces petites aires multipliée par le carré de la distance de leurs centres de gravité à l'axe considéré nous donne le moment d'inertie de la section. On donne quelques exemples de formes usuelles:

Section rectangulaire

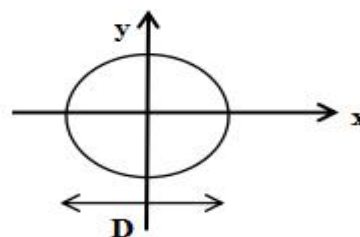
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$



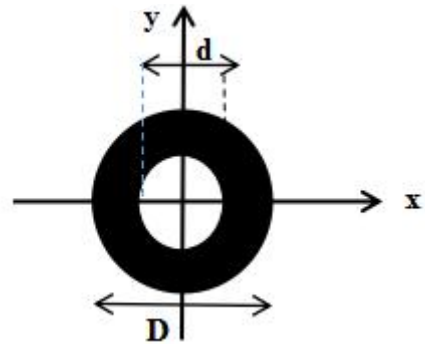
Section circulaire

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$



Section annulaire

$$I_x = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$



II.4.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire (J) est une propriété géométrique qui mesure la résistance d'un objet à la torsion, c'est-à-dire à la déformation causée par un couple.

Le moment d'inertie polaire de l'aire A par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'aire, passant par le point O, est défini par l'intégral II.6.

$$J = \int r^2 dA \dots\dots\dots(\text{II.6})$$

Si l'on considère les axes orthogonaux xx et yy passant par O (voir Figure II.3)

$$r^2 = x^2 + y^2 \dots\dots\dots(\text{II.7})$$

d'où

$$J = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y \dots\dots\dots(\text{II.8})$$

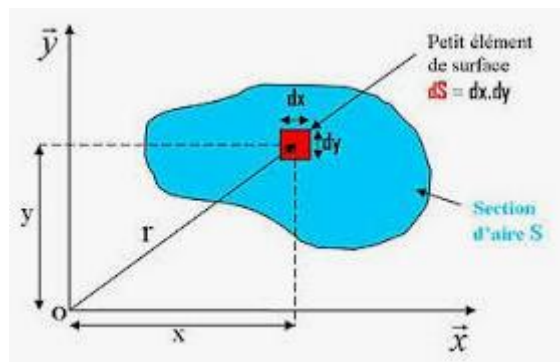


Figure II.3. Moment d'inertie polaire

II.5. Transformation des moments d'inertie (principe des axes parallèles)

Le moment d'inertie d'une aire A par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette aire par rapport à un axe parallèle passant par son centre de gravité additionné au produit de l'aire A multiplié par le carré de la distance entre les deux axes (Figure II.4).

$$I_x = \int (y+d)^2 dA = \int (y^2 + d^2 + 2yd) dA = \int y^2 dA + 2d \int ydA + d^2 \int dA \dots \dots \dots (II.9)$$

Comme l'axe xx passe par le centre de gravité de la section, le moment statique:

$$\int ydA = 0$$

On aura donc:

$$I_x = \int y^2 dA + d^2 \int dA = I_x + Ad^2 \dots \dots \dots (II.10.a)$$

De même pour l'axe yy et on aura:

$$I_y = I_y + Ab^2 \dots \dots \dots (II.10.b)$$

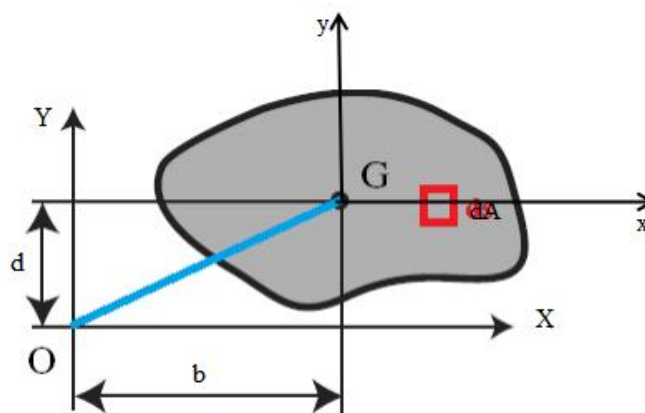


Figure II.4. Principe des axes parallèles

Pour une surface composée d'un assemblage de parties distinctes ayant des formes géométriques simples, le moment d'inertie de la surface par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie de chacune des ses parties par rapport au même axe.

$$I_x = \sum I_x + \sum A d^2 \dots \dots \dots (II.11.a)$$

$$I_y = \sum I_y + \sum A b^2 \dots \dots \dots (II.11.b)$$

II.6. Axes principaux centraux, moments d'inertie principaux

On détermine les moments d'inertie I_x et I_y par rapport aux axes OX et OY. Les axes OX et OY font un angle α avec les axes Ox et Oy (Figure II.5)

Les formules de changement d'axes sont les suivantes:

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha \dots \dots \dots (II.12.a)$$

$$Y = y \cos \alpha - x \sin \alpha \dots \dots \dots (II.12.b)$$

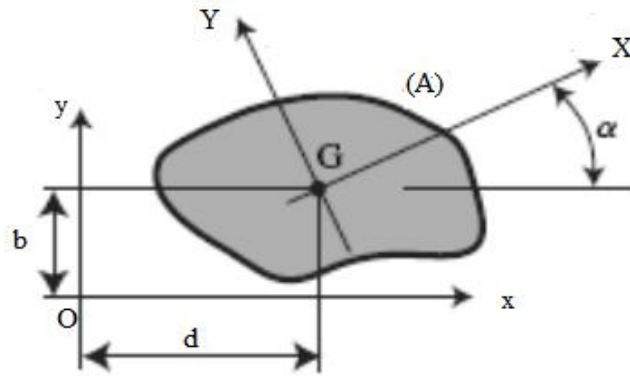


Figure II.5. Principe du changement d'axe pour les moments d'inertie

En remplaçant X et Y par les formules de changement d'axe on aura:

$$I_X = \int Y^2 dA \Rightarrow I_X = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int y^2 dA + \sin^2 \alpha \int x^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xy dA$$

$$I_X = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \dots \dots \dots (\text{II.12.a})$$

$$I_Y = \int X^2 dA \Rightarrow I_Y = \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int x^2 dA + \sin^2 \alpha \int y^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xy dA$$

$$I_Y = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + 2I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \dots \dots \dots (\text{II.12.b})$$

En additionnant les équations II.12.a et II.12.b, on aura:

$$I_X + I_Y = (I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha) + (I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha)$$

$$= I_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$I_X + I_Y = I_x + I_y \dots \dots \dots (\text{II.13})$$

On déduit que la somme des moments d'inertie sur les deux axes Oxy et OXY est constante.

Traction simple et compression simple

III.1. Introduction

III.2. Efforts normaux de traction et de compression

III.3. Contrainte normale

III.4. Déformation élastique (Diagramme contrainte/déformation)

III.5. Loi de Hooke et module de Young

III.6. Condition de résistance et notion de contraintes admissible

III.1. Introduction

Dans ce chapitre on fera appel à des notions concernant la détermination des contraintes et des déformations dues aux efforts normaux de compression ou de traction. Ces efforts sont en général parallèles à l'axe longitudinal ou la fibre moyenne d'un élément de structure.

III.2. Efforts normaux de traction et de compression

Une barre rectiligne sollicitée par deux forces égales et de directions opposées suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal N .

Cet effort est dit :

- Effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre.
- Effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.

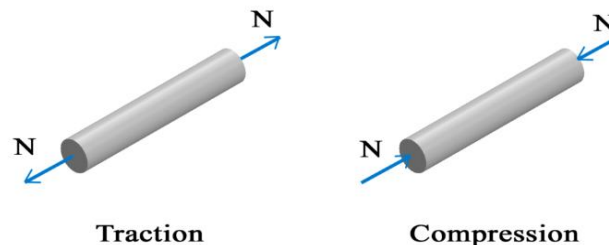


Figure III.1. Traction/ Compression

$N > 0$ (Traction)

$N < 0$ (Compression)

III.3. Contrainte normale

On définit une contrainte normale à la traction ou à la compression (σ) comme étant l'intensité d'une force (N) qui agit sur un élément de surface ou une aire (A). Lorsque cette contrainte dépasse la contrainte admissible, elle peut entraîner la déformation ou la rupture de l'élément de structure.

La contrainte normale de compression ou de traction se calcule par la relation III.1.

$$\sigma = \frac{N}{A} \dots\dots\dots(\text{III.1})$$

Cette contrainte est uniforme à travers l'aire A puisque la force normale N est axiale et que par conséquent, elle passe par le centre de gravité de la section de l'élément (Figure III.2).

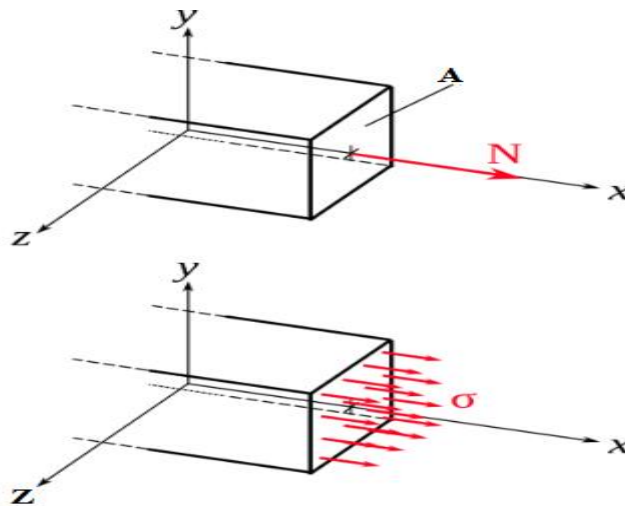


Figure III.2. Contrainte normale sous un effort normal

Remarque : N est sur l'axe x, on peut donc écrire N_x

III.4. Déformation élastique (Diagramme contrainte/déformation)

Lorsqu'une force axiale F croissante (de traction ou de compression) est exercée sur un élément de structure, une contrainte normale de traction ou de compression se développe d'intensité ($\sigma = \frac{F}{A}$), correspondant à chaque valeur de F. Cette contrainte est uniforme à travers la section A puisque la force de traction ou de compression F est axiale, passant par le centre de gravité de la section de l'élément considéré. La Figure III.3, présente un essai de traction sous l'effort F (l'effort est un étirement) et montre le déplacement ΔL généré par cet effort.

Pour chaque contrainte développée en variant la force F , nous obtiendrons une déformation unitaire (ϵ). L'allongement total de l'éprouvette (ΔL) entre deux repères marqués sur l'éprouvette est donné par la relation III.2.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \epsilon L_0 \dots \dots \dots (III.2)$$

ϵ : Allongement unitaire (ou déformation unitaire)

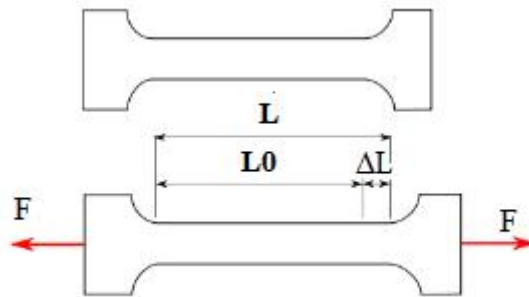


Figure III.3. Déformation élastique sous une traction

Nous traçons alors le diagramme qui représente la variation de la contrainte en fonction de la déformation unitaire (voir la Figure III.4)

Ce diagramme comprend d'un côté une partie rectiligne où les contraintes σ sont proportionnelles aux déformations unitaires ϵ et où le phénomène est réversible. Après suppression des charges, l'élément revient à son état initial en suivant le même chemin (déformation élastique). Et d'un autre côté une partie en courbe où la déformation est irréversible (déformation plastique)



Figure III.4. Diagramme contrainte/déformation

III.5. Loi de Hooke et module de Young

La Figure III.5, montre une zone OA appelée zone élastique. La pente de la droite OA est appelée module d'Young E (module d'élasticité longitudinal)

On aura donc :

$$\text{tga} = E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (\text{Module de Young}) \dots \dots \dots (\text{III.3})$$

$$\Rightarrow \sigma = E \epsilon \quad (\text{Loi de Hooke}) \dots \dots \dots (\text{III.4})$$

La contrainte σ est égale à :

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{F}{EA} \quad (\text{déformation unitaire}) \dots \dots \dots (\text{III.5})$$

Et la déformation unitaire sera égale à :

$$\epsilon = \frac{F}{EA} = \Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F}{EA} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{FL_0}{EA} \quad (\text{déformation totale}) \dots \dots \dots (\text{III.6})$$

Sur la partie ABCD du diagramme donné en Figure III.5, les déformations sont permanentes. Le domaine correspondant à cette partie est le domaine plastique. La partie AB est le palier de ductilité, la partie BC est la zone d'écrouissage et le point C est le point de striction. La contrainte correspondant au point C est la contrainte de rupture. A partir de ce point, l'élément de structure va se détériorer (rompre).

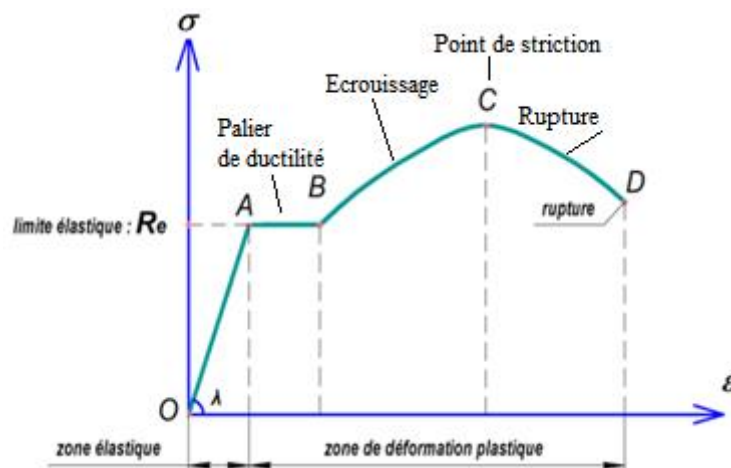


Figure III.5. Type de déformation du début de chargement jusqu'à la rupture

III.6. Condition de résistance et notion de contraintes admissibles

Les contraintes sont produites par les sollicitations dues aux charges permanentes, aux charges d'utilisation, aux charges climatiques, etc., qui agissent sur une structure. Lorsqu'elles dépassent les contraintes admissibles, elles peuvent entraîner la rupture

ou la déformation excessive des éléments d'une structure. Ce qui rend l'utilisation impossible.

Une structure doit avoir une résistance, une stabilité et une intégrité structurale suffisantes pour supporter efficacement et en toute sécurité toutes les sollicitations possibles.

Pour remplir ces exigences, il faut évaluer les efforts internes aux diverses sections de l'élément, ensuite calculer les contraintes et les déformations qui en résultent (σ_{cal} , τ_{cal} et ϵ_{cal}). Ces contraintes et ces déformations ne doivent pas dépasser les contraintes et les déformations admissibles (σ_{adm} , τ_{adm} et ϵ_{adm}) dans le domaine élastique.

$$\sigma_{cal} \leq \sigma_{adm} , \quad \tau_{cal} \leq \tau_{adm} \quad \text{et} \quad \epsilon \leq \epsilon_{adm} \dots\dots(III.7)$$

σ : Contrainte normale calculée par la combinaison des contraintes engendrées par les deux sollicitations : l'effort normal N et les moments fléchissant M_f

τ : Contrainte tangentielle engendrée par l'effort tranchant T.

Chapitre 4

Flexion simple

- IV.1. Introduction
- IV.2. Définitions et hypothèses
- IV.3. Effort tranchant et moment fléchissant
- IV.4. Digramme des efforts tranchants et moments fléchissants
- IV.5. Contraintes en flexion simple
 - III.5.1. Contraintes normales
 - III.5.2. Contrainte tangentielle.
- IV.6. Notion de l'axe neutre et dimensionnements
- IV.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion (notion de la flèche)

IV.1. Introduction

Les poutres droites, qui constituent les éléments horizontaux des structures des planchers sont destinées à supporter principalement des charges verticales qui sont perpendiculaires à leur axe longitudinal (la fibre moyenne). Ces charges sont transmises à leurs supports par la *flexion* et l'*effort tranchant*. Ces derniers créent *des contraintes* et *des déformations* dans les sections droites de ces poutres.

IV.2. Définitions et hypothèses

On appelle une section plane si dans une section droite d'une poutre nous avons:

- *Plan xoy*

$$N_x = 0, T_y = 0, M_z \neq 0 \text{ (Flexion pure).....(IV.1.a)}$$

ou

$$N_x = 0, T_y \neq 0, M_z \neq 0 \text{ (Flexion simple).....(IV.1.b)}$$

- *Plan xoz*

$$N_x = 0, T_z = 0, M_y \neq 0 \text{ (Flexion pure)..... (IV.1.c)}$$

ou

$$N_x = 0, T_z \neq 0, M_y \neq 0 \text{ (Flexion simple).....(IV.1.d)}$$

Soit pour une *flexion simple* qui se produit sur un seul plan (xoy) **ou** (xoz) les efforts internes suivants :

$$N_x = 0, T \neq 0, M_f \neq 0 \text{(IV.2.a)}$$

La flexion simple est donc un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce, il n'existe *qu'un moment fléchissant M_f et un effort tranchant T* .

$$\Rightarrow T \neq 0, M_f \neq 0 \dots \dots (IV.2.b)$$

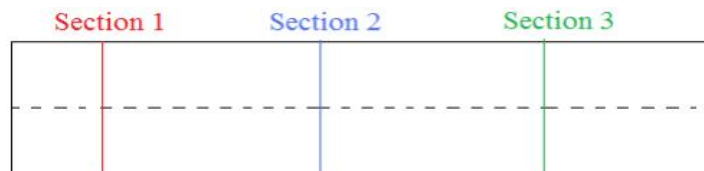
Les hypothèses de calcul en flexion simple sont les suivantes :

- **Hypothèse des transformations infinitésimales** : les matériaux et les structures utilisés en génie civil justifient l'hypothèse des transformations infinitésimales: petits déplacements/petites déformations. Négliger les effets du second ordre (conséquence des petits déplacements) et utiliser la loi de Hooke (conséquence des petites déformations).

Les effets du second ordre sont négligés, c'est-à-dire que les moments ou actions supplémentaires résultant d'un déplacement de la structure sont négligés.

- **Hypothèses sur la loi de comportement** : la loi de comportement est une loi élastique, linéaire, homogène et isotrope.
- **Principe de Navier Bernoulli** : après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne (voir Figure IV.1).

- Avant déformation:



- Après déformation:

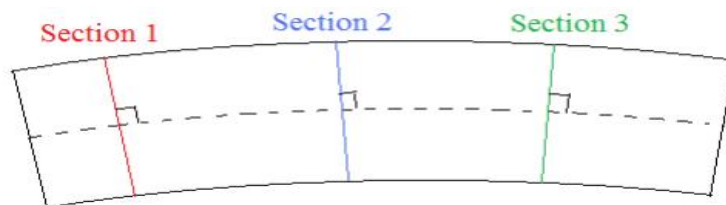


Figure IV.1. Poutre avant et après déformation (Principe de Navier Bernoulli)

Donc deux sections droites infiniment voisines, restent, après déformations, infiniment voisines et superposables par simple déplacement.

- **Principe de Saint Venant** : une singularité de la structure ou du chargement est comme le montre la Figure IV.2 avec les indications données ci-après:

- (1) : Extrémité de la structure (avec ou sans liaison)
- (2) : Liaison intérieure ou extérieure
- (3) : changement de poutre
- (4) : force ponctuelle (ou un moment ponctuel)
- (5) : début de charge répartie (en force ou en moment)
- (6) : fin de charge répartie (en force ou en moment)

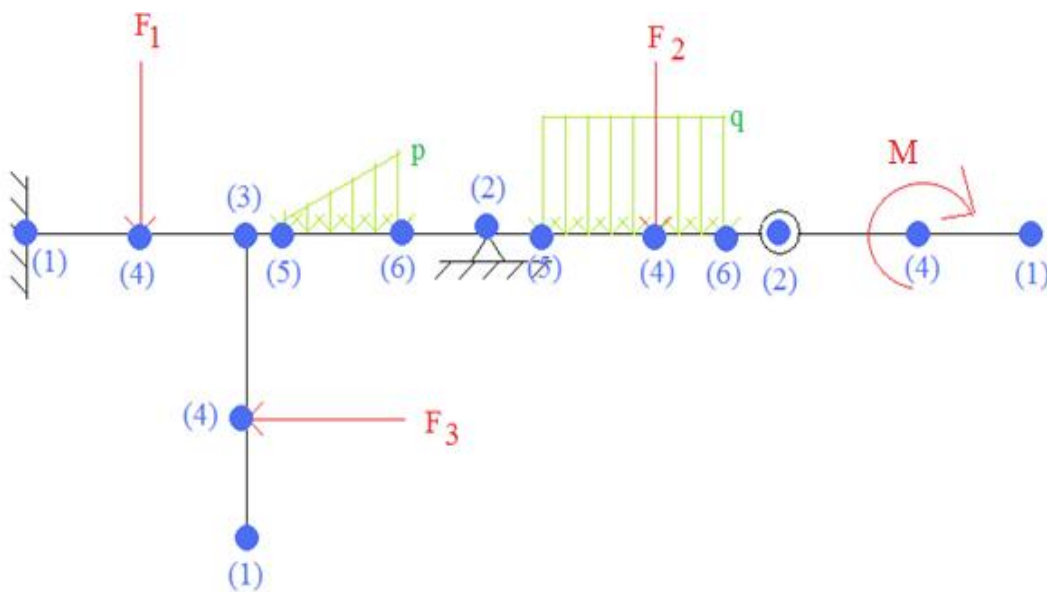


Figure IV.2. Principe de Saint-Venant

IV.3. Effort tranchant et moment fléchissant

Pour dimensionner une poutre soumise à des charges verticales, il faut calculer la valeur des moments fléchissants M_f et des efforts tranchants T , et déterminer les sections critiques où ces valeurs sont maximales. A partir de ces valeurs, on vérifie que les contraintes calculées ne dépassent pas les contraintes admissibles. Dans le cas contraire, il faut redimensionner la poutre et refaire la vérification.

Le moment de flexion M_f qui agit sur une section droite de la poutre est en réalité le moment d'un couple de forces agissant sur cette section. Le plan de ce couple est aussi celui des forces sollicitant la poutre. L'effet de M_f , supposé > 0 sur la Figure IV.3, est celui qui serait produit par un couple de forces F_1 et F_2 (avec $F_1 = F_2$), dont F_1 pousserait sur la moitié supérieure de la section SS et F_2 tirerait sur la moitié inférieure.

Ceci va provoquer une sorte de rotation apparente d'un angle ϕ de la section (mouvement qui est dirigé par le sens de la flèche). Les fibres longitudinales de la poutre, devant rester perpendiculaires à SS, suivent le mouvement en fléchissant dans le sens positif convenu.

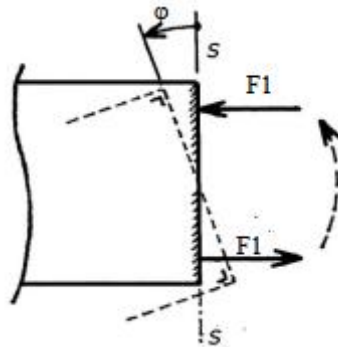


Figure IV.3. Effort tranchant et moment fléchissant

L'effort tranchant dans une section est la somme des forces (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

Le moment fléchissant dans une section est la somme des moments, de toutes les forces (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

Convention de signe :

l'effort tranchant est considéré positif s'il agit vers le haut et négatif s'il agit vers le bas.

Le moment fléchissant est considéré positif s'il crée des contraintes de traction dans les fibres inférieures (+) et des contraintes de compression dans les fibres supérieures (-)

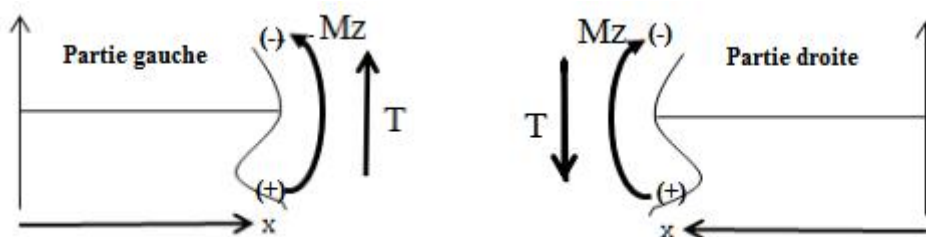


Figure IV.4. Convention de signe pour le calcul des efforts internes

On peut aussi montrer que les efforts tranchants sont la dérivée de l'expression des moments fléchissants.

$$T = \frac{dM_f}{dx} \Rightarrow M_f = \int T dx \dots \dots \dots (IV.3)$$

Remarques :

- 1) Le moment fléchissant M_f est extremum (minimum ou maximum) là où l'effort tranchant T s'annule.
- 2) Le moment fléchissant est nul ($M_f = 0$) au droit des appuis d'extrémités et aux extrémités libres d'une poutre.
- 3) Le moment fléchissant n'est jamais nul à un encastrement.

IV.4. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissants

Ces diagrammes joueront un rôle très important dans la recherche des sections les plus sollicitées ainsi que dans la détermination des flèches. Ces sections sont d'une grande importance pour l'ingénieur lors du dimensionnement ou de la vérification d'un ouvrage.

Les diagrammes des efforts internes remplissent donc une fonction primordiale dans le dimensionnement des poutres. Pour les construire, on effectue un certain nombre de coupures (entre les charges extérieures, entre une charge et une extrémité non appuyée, dans les zones où agissent les charges réparties...(voir Figure IV.2)). Pour chaque coupure on détermine l'expression de M_f et de T en équilibrant le tronçon compris entre une extrémité de la poutre et la coupure. Les diagrammes sont tracés à partir des équations obtenues pour M_f et T .

- Sur une zone de poutre sans charge (Figure IV.5.a): T : constant, M_f : évolue linéairement
- Sur une zone de poutre soumise à une charge uniformément répartie constante (Figure IV.5.b): T : évolue linéairement : M_f : évolue paraboliquement
- Sur une zone soumise à force ponctuelle (Figure IV.5.c)
- Sur une zone soumise à une charge uniformément répartie et une force ponctuelle (Figure IV.5.d)

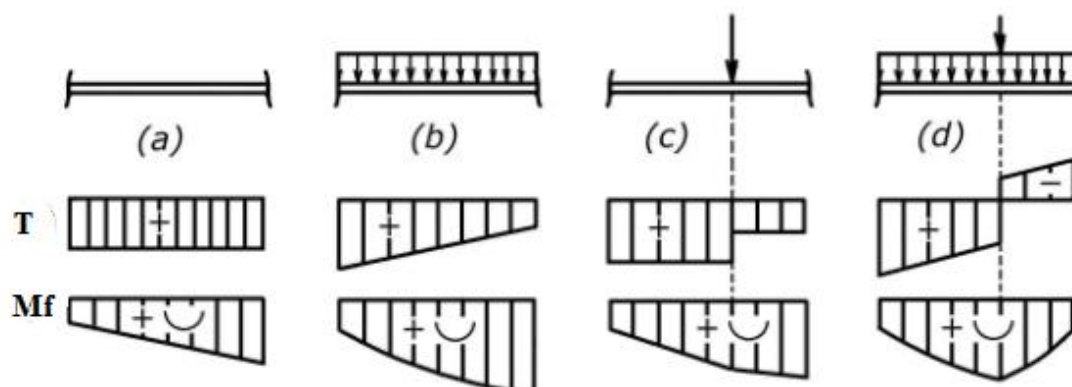


Figure IV.5. Diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants

IV.5. Contraintes en flexion simple

La conception d'une structure en flexion oblige à identifier les zones fortement sollicitées (contraintes élevées).

- Les zones fortement sollicitées en *cisaillement* sont celles où les efforts tranchants sont maximaux
- Les zones fortement sollicitées en *traction* ou *compression* sont celles où les moments fléchissants sont maximaux

IV.5.1. Contraintes normales

Les notions de contraintes normales et de déformations ont une importance primordiale pour la compréhension de la résistance des matériaux. Elles permettent de décrire le comportement mécanique d'une structure soumise à un chargement.

Si on considère une poutre sur appuis simples, possédant un plan de symétrie longitudinal, dans lequel s'exercent des charges verticales quelconques, celle-ci va se déformer comme indiqué à la Figure IV.6.

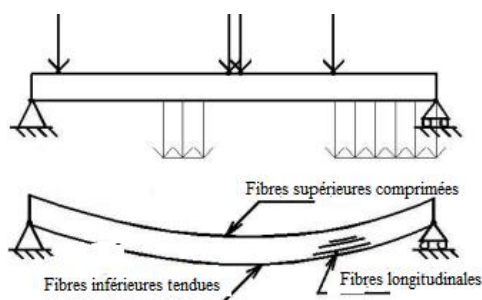


Figure IV.6. Déformation de la poutre sous un moment fléchissant

Vu la courbure de la barre, les fibres longitudinales inférieures vont s'allonger et les fibres longitudinales supérieures par contre vont se raccourcir. Dès lors on peut montrer, par la loi de Hooke (contrainte proportionnelle au déplacement), que lors de la flexion d'une poutre, les contraintes dans une section transversale varient selon une loi linéaire. Ce sont donc bien des contraintes normales.

Il existe une relation fondamentale entre la contrainte σ et le moment fléchissant M_f dans une section droite. Toute fibre longitudinale située à une distance y de l'axe neutre est le siège d'une contrainte donnée par la formule IV.4.

$$\sigma = - \frac{M_f}{I} y \dots\dots (IV.4)$$

M_f : moment fléchissant [N.mm]

I : moment d'inertie de la section..... [mm⁴]

y : distance à partir de la fibre neutre..... [mm]

On remarque que les contraintes maximales en flexion apparaissent aux points les plus éloignés de la fibre neutre. Ces contraintes maxima sont de signes opposés : l'une est une contrainte de traction, l'autre une contrainte de compression. La contrainte au niveau de l'axe neutre (axe z) est nulle ($\sigma = 0$)

- Si le profil est symétrique (par rapport à l'axe neutre), on obtient comme montré à la Figure IV.7.a:

$$y_c = y_t = \Rightarrow \sigma_t = \sigma_c \quad (\text{le centre de gravité est au milieu de la poutre})$$

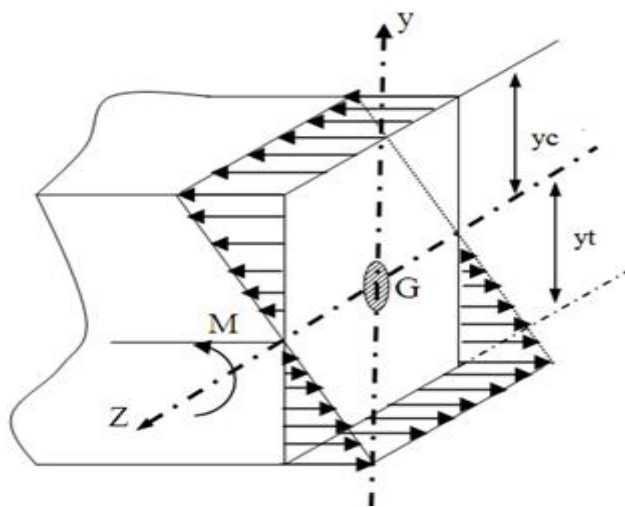


Figure IV.7.a. Diagramme de contrainte normale sous M_f (Poutre symétrique)

- Et si le profil est non symétrique (par rapport à l'axe neutre), on obtient comme montré à la Figure IV.7.b:

$$y_c \neq y_t = \Rightarrow \sigma_t \neq \sigma_c \quad (\text{on doit calculer le centre de gravité et déterminer } y_c \text{ et } y_t)$$

On aura donc deux contraintes l'une maximale et l'autre minimale

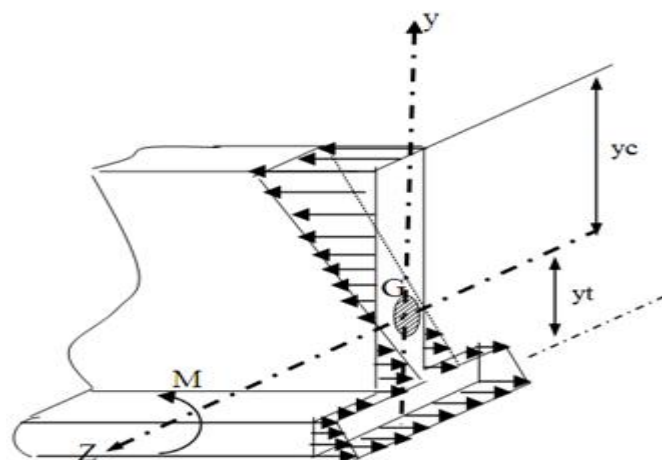


Figure IV.7.b. Diagramme de contrainte normale sous M_f (Poutre non symétrique)

IV.5.2. Contrainte tangentielle

Le glissement longitudinal est l'effort agissant parallèlement à l'axe d'une pièce fléchie et ayant tendance à faire glisser les fibres longitudinales l'une sur l'autre. Par conséquent, les contraintes tangentielles effectuent un véritable cisaillement de la matière dans tout plan horizontal d'une poutre fléchie sur lequel elles agissent.

Lorsqu'on a déterminé la section d'une poutre qui résiste au moment fléchissant maximal dû aux charges qui agissent sur cette poutre, il faut aussi vérifier les contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant qui accompagne le moment fléchissant. Pour des matériaux élastiques et homogènes, les contraintes tangentielles ou de cisaillement sont calculées par la relation IV.5.

$$\tau = \frac{T^{\max} S^*}{b I} \dots \dots \dots (IV.5)$$

S^* : surface au-dessus ou au-dessous de la fibre où τ est calculée [mm^3]

T^{\max} : effort tranchant maximal agissant dans la section [N]

I : moment d'inertie de la section envisagée par rapport à son centre de gravité [mm^4]

b : épaisseur de la section où τ est calculée [mm]

En considérant la Formule IV.5, on constate que T , b et I sont constants pour une section donnée, τ varie donc en fonction du moment statique S^*

La contrainte tangentielle maximale τ_{\max} se situe au niveau de la fibre moyenne. Pour les fibres extérieures (supérieure et inférieure), la contrainte tangentielle τ est nulle.

IV.6. Notion de l'axe neutre et dimensionnements

Si les fibres inférieures s'allongent et les fibres supérieures se raccourcissent, il doit donc logiquement exister des fibres qui vont conserver leur longueur. C'est le lieu géométrique des points d'une section vérifiant la condition $\sigma_x = 0$. Ce lieu est appelé : l'axe neutre de la section voir (Figure IV.8)

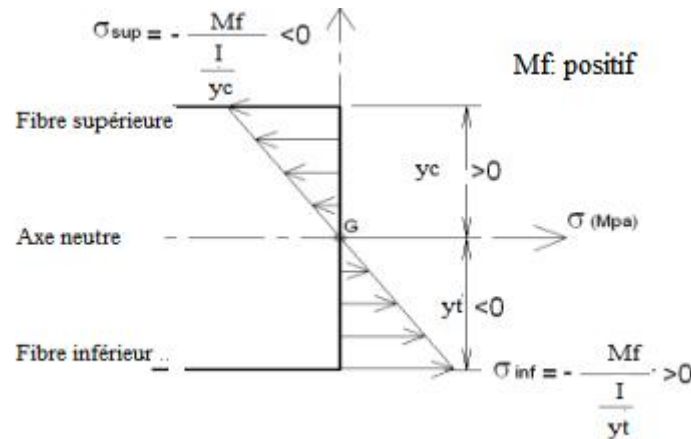


Figure IV.8. Diagramme de contrainte normale sous M_r (positif)

Dans le cas de la flexion pure et de la flexion simple, on peut montrer, par ailleurs, que la fibre neutre se confond toujours avec le centre de gravité de la section (sauf dans le cas particulier des pièces à fortes courbures).

Remarques

- L'axe neutre est le lieu géométrique des points où la contrainte normale σ est égale à 0. Il se confond avec l'axe passant par le centre de gravité. La contrainte normale σ qui agit sur les fibres au-dessus de l'axe neutre est une compression lorsque le moment sollicitant la poutre est positif, c'est-à-dire qu'il fléchit la poutre vers le bas.
- Si la section n'est pas symétrique par rapport à l'axe neutre, la distance y n'est pas la même de chaque côté de l'axe et par conséquent on aura deux valeurs de module de résistance (ou de flexion) S .

$$S_t = \frac{I_z}{y_t} \quad \text{et} \quad S_c = \frac{I_z}{y_c}$$

IV.7. Déformée d'une poutre soumise à la flexion (notion de la flèche)

Une poutre se déforme sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise. On désigne par flèche $V(x)$; le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à son abscisse (x). Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de la déformée d'angle $\theta(x)$ (Figure IV.9).

Il est important de pouvoir déterminer la valeur de la flèche en un point quelconque le long de la fibre moyenne d'une poutre. La norme limite la flèche pour la bonne tenue d'une structure quelconque en service. Donc en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise $[f_{adm}]$.

Une maîtrise de l'analyse des déformations d'une structure est importante pour visualiser le comportement de cette structure, et aussi pour calculer les systèmes hyperstatiques où l'on doit se servir des équations établies pour le calcul des déformations.

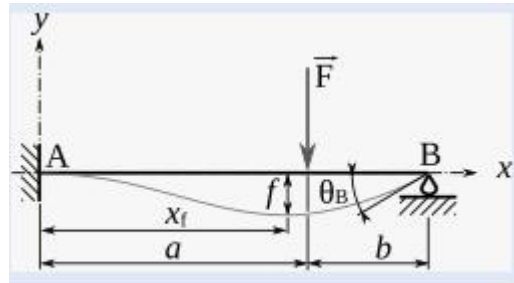


Figure IV.9. Notion de la flèche (déformation)

Parmi les méthodes de calcul des déformations nous avons la méthode de la double intégration et la méthode des paramètres initiaux.

IV.7.1. Méthode de la double intégration

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle. En intégrant une première fois on obtient l'équation de l'angle de rotation et en intégrant une deuxième fois on aura l'équation du déplacement. Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites et de continuité (en cas de poutre à plusieurs travées)

On calcule la flèche à partir de l'équation différentielle donnée ci-après :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \dots \dots \dots (IV.6)$$

M : moment fléchissant

E : module d'élasticité

I : moment d'inertie

EI : rigidité à la flexion

En intégrant une première fois l'expression du moment on obtient la pente ou la rotation de la déformée à l'abscisse x qui est donnée par :

$$\text{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$$

θ (très petit) $\Rightarrow \text{tg}\theta = \theta$

On écrit donc :

$$\text{tg}\theta = \theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \int M(x) dx \dots \dots \dots (IV.7)$$

θ est donné en radian.

Et en intégrant une seconde fois l'équation du moment (ou l'intégral de l'équation de la rotation), on obtient la flèche $V(x)$:

$$V(x) = \int \theta(x) dx = \frac{1}{EI} \iint M(x) dx \dots \dots \dots (IV.8)$$

Pour une poutre à plusieurs travées, le calcul de la déformée avec la méthode de la double intégration devient compliquée avec plusieurs constantes d'intégration à déterminer qui sont à 2 fois le nombre de travées. On utilise alors la méthode des paramètres initiaux pour trouver la déformée directement à n'importe quel point de la poutre.

IV.7.2. Méthode des paramètres initiaux

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes $C_1 = \theta_0$ et $C_2 = V_0$ qui sont en réalité les paramètres initiaux.

Ainsi si l'on prend l'origine des coordonnées le point situé à l'extrême gauche de la poutre et on fait prolonger toute charge répartie (rectangulaire ou triangulaire) jusqu'à la fin de la poutre et on retranche le chargement ajouté par un déchargement équivalent. L'expression de $V(x)$ est donnée par l'équation IV.9.

$$EIV(x) = EIV_x + EI\theta_0 x - \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} - \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} - \sum q_r \frac{(x-c)^4}{4!} + \sum q_{rt} \frac{(x-d)^4}{4!} - \sum \text{tg}\alpha \frac{(x-c)^5}{5!} + \sum \text{tg}\alpha \frac{(x-d)^5}{5!} \dots \dots \dots (IV.9)$$

M : moment concentré

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application du moment M

P : forces concentrées y compris les réactions

b : distance entre l'origine des coordonnées et le point d'application de la force P

q_r , q_{rt} et q_t : respectivement, charge répartie rectangulaire, décharge réparti rectangulaire et charge répartie triangulaire (du début d'application de la charge jusqu'à la fin de la poutre)

c : distances entre l'origine des coordonnées et le point d'application des charges réparties rectangulaires et triangulaires.

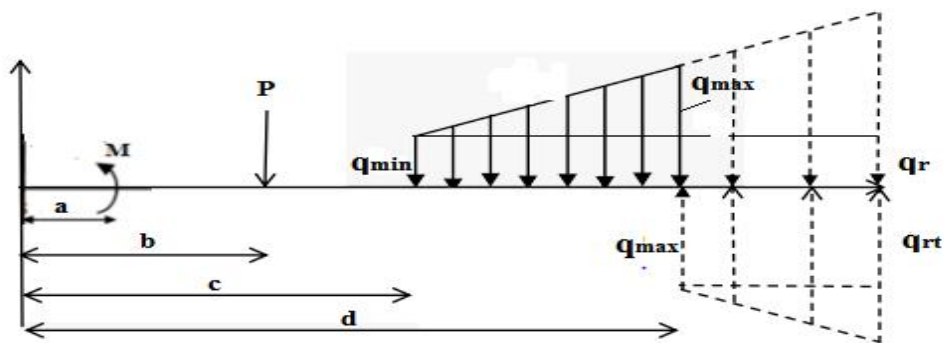
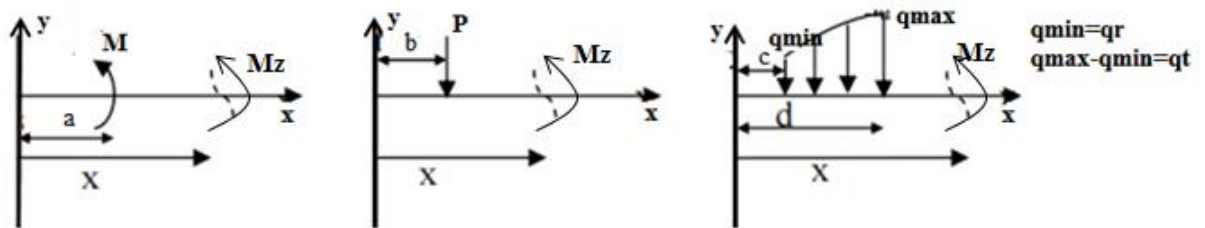
d: distances entre l'origine des coordonnées et le point d'application des décharges réparties rectangulaires et triangulaires.

Avec :
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{qt}{d-c} = \frac{q_{\max}-q_{\min}}{d-c}$$

$Q_r = q_{\min}$

$Q_{rt} = q_{\max}$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :



Trait continu: charge réelle

Trait discontinu: prolongation de la charge et le déchargement

L'équation de la déformée $\theta(x)$ est obtenue par la dérivée de l'équation de la flèche $V(x)$.

On aura donc l'équation IV.10.

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \sum M \frac{(x-a)^1}{1!} - \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} - \sum q_r \frac{(x-c)^3}{3!} + \sum q_{rt} \frac{(x-d)^3}{3!} - \sum \operatorname{tg}\alpha \frac{(x-c)^4}{4!} + \sum \operatorname{tg}\alpha \frac{(x-d)^4}{4!} \dots \dots \dots (IV.10)$$

Les deux paramètres initiaux V_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appuis de la poutre.

Cisaillement simple

V.1. Définition

V.2. Cisaillement

V.2.1. Cisaillement simple

V.2.2. Cisaillement pur

V.3. Contrainte et déformation élastique au cisaillement

V.4. Condition de résistance en cisaillement

V.1. Définition

Une poutre est sollicitée au cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, perpendiculaire à la ligne moyenne, et qui tendent à la cisailer.

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons E1 et E2 glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (voir Figure V.1)

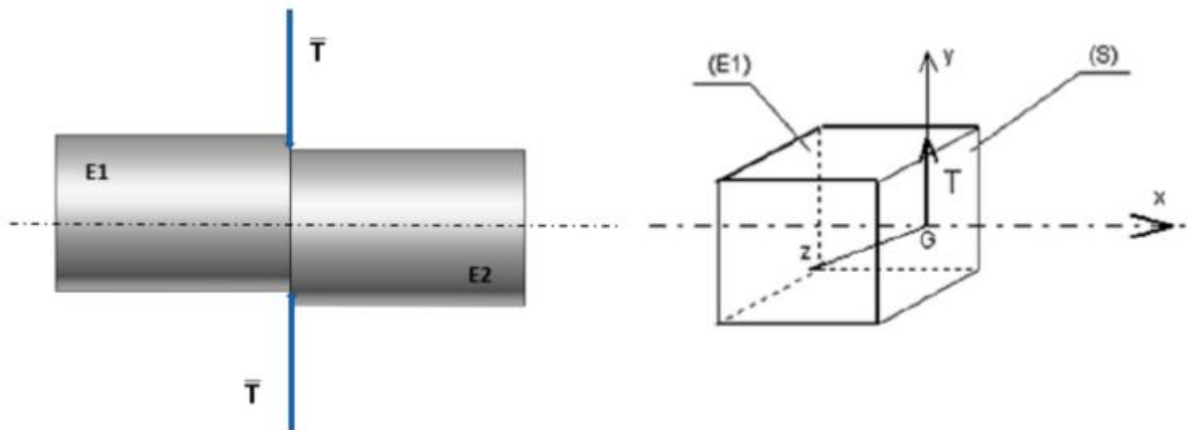


Figure V.1. Cisaillement

V.2. Cisaillement

La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la RDM car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière. Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

V.2.1. Cisaillement pur

Si l'on admet que les faces d'une pièce sont libres de toute autre contrainte que τ , alors on dit qu'elles sont sollicitées en cisaillement pur. Sous l'influence de ces contraintes, l'élément va se déformer et les deux faces en question vont glisser l'une par rapport à l'autre. L'angle γ , infiniment petit, qui définit cette distorsion, s'appelle "angle de glissement" (Figure V.2)

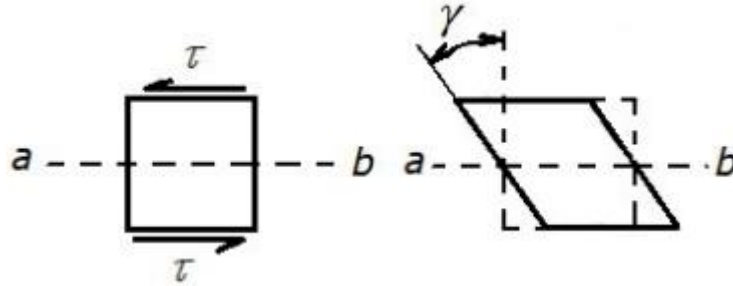


Figure V.2. Cisaillement pur (angle de glissement)

Dans le domaine élastique, les déformations sont proportionnelles aux contraintes normales. La loi de Hooke ($\sigma = E \epsilon$) est l'expression mathématique dans le cas de la traction. Dans le cas du cisaillement, il en est de même et l'on dira que l'angle de glissement γ est proportionnel à la contrainte tangentielle de cisaillement τ . Cela s'exprime de la façon suivante :

$$\tau = G \cdot \gamma \dots \dots \dots (V.1)$$

γ : glissement relatif

G : module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (MPa).

Pour les matériaux élastiques, le module d'élasticité en cisaillement G (module d'élasticité transversal) est relié au module d'élasticité longitudinal E par la relation:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \dots \dots \dots (V.2)$$

μ : coefficient de poisson

V.2.2. Cisaillement simple

Dans différents assemblages de constructions (assemblages boulonnés, clavetés, rivetés, soudés, dans les entailles à bois, etc.), le cisaillement est toujours accompagné soit d'une flexion, soit d'une traction ou d'une compression. C'est pourquoi dans les plans de cisaillement, hormis les contraintes tangentielles, nous trouvons encore des contraintes normales. Mais comme les valeurs de ces contraintes normales sont petites

devant les contraintes tangentielles, pratiquement on effectue un calcul de cisaillement.

Conséquence: un état de charge tel que dans toute section droite il n'existe qu'un effort tranchant ne peut donc se produire.

V.3. Contrainte et déformation élastique au cisaillement

Pour une poutre de section S (Figure V.3), sollicitée au cisaillement simple, la valeur de la contrainte tangentielle est égale au rapport de l'effort tranchant T par la section S.

$$\tau = \frac{T}{S} \dots \dots \dots (V.3)$$

τ : contrainte tangentielle en tout point de la section (N/mm² ou MPa)

S : aire de la section droite cisailée de la pièce (mm²)

T : effort tangentiel (tranchant) (N)

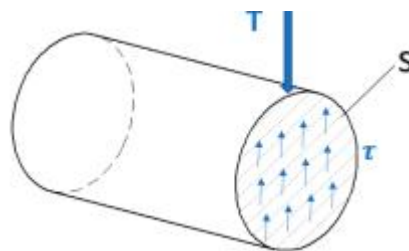


Figure V.3. Contrainte de cisaillement sous un cisaillement simple

La déformation élastique au cisaillement γ est défini comme suit:

A partir du diagramme contrainte de cisaillement/déformation donné en Figure V.4, nous pouvons constater qu'au niveau de la zone élastique (partie linéaire):

$$\text{tg} \alpha = G = \frac{\tau}{\gamma} \dots \dots \dots (V.4)$$

G : module d'élasticité transversale ou module de Coulomb (MPa)

Des deux relations V.1 et V.3, on aura:

$$\frac{T}{S} = G \gamma \dots \dots \dots (V.5)$$

On exprime la déformation au cisaillement γ en fonction de la contrainte tangentielle :

$$\gamma = \frac{\tau}{G S} \dots \dots \dots (V.6)$$

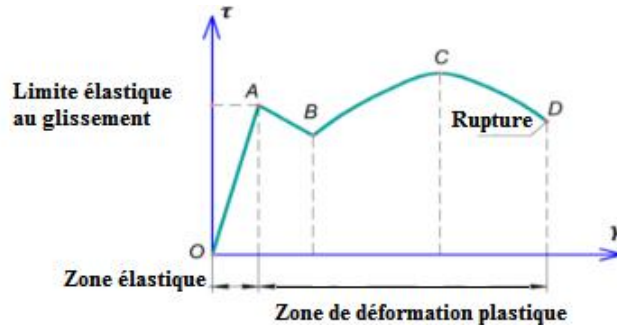


Figure V.4. Diagramme de contrainte/déformation au cisaillement

τ : contrainte tangentielle (contrainte de cisaillement)

γ : déformation angulaire

OA : zone de déformation élastique (réversible)

ABCD : zone de déformation permanente (plastique).

V.4. Condition de résistance au cisaillement

Afin qu'une pièce résiste au cisaillement, il faut être certain de rester dans la zone de déformation élastique.

Pour des raisons de sécurité, la contrainte tangentielle τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée résistance pratique au glissement R_{pg} .

En général, on adopte un coefficient de sécurité (S) donné par la Formule V.7.

$$S = \frac{R_{eg}}{R_{pg}} \dots \dots \dots (V.7)$$

R_{pg} : résistance pratique au glissement (N/mm² ou MPa)

R_{eg} : résistance élastique au glissement (N/mm² ou MPa)

S : coefficient de sécurité (sans unité).

La condition de résistance d'une pièce au cisaillement est donnée par la relation (V.8)

$$\tau = \frac{\tau}{S} \leq R_{pg} = \frac{R_{eg}}{S} \dots \dots \dots (V.8)$$

V.5. Cas des assemblages par rivets

Les assemblages par rivets servent aux pièces d'épaisseur faible ou moyenne, comme les tôles et les profilés, en charpente. Ils nécessitent un perçage préalable des pièces à assembler, ainsi que l'emploi de riveteuses, machines qui servent à écraser l'extrémité du rivet opposée à la tête, afin de réaliser l'assemblage. Si le système assemblé se trouve sollicité en traction, l'effort de traction va être transmis au rivet qui va travailler en cisaillement pur.

Les étapes de calcul sont données comme suit:

1. Déterminer les efforts et les caractéristiques: déterminer l'effort total à reprendre par l'assemblage pour chaque rivet ainsi que le diamètre du rivet et le nombre de rivets nécessaires pour l'assemblage.
2. Calculer la contrainte de cisaillement: calculer la contrainte de cisaillement agissant sur chaque rivet en divisant l'effort unitaire par la section de cisaillement du rivet. La section du cisaillement du rivet se calcule par en multipliant la surface du cercle du rivet par le nombre de plans de cisaillement.

La contrainte de cisaillement τ est calculée par la formule V.9.

$$\tau = \frac{T}{nA} \dots \dots \dots (V.9)$$

T: effort de cisaillement

n: nombre de rivets

A: section cisaillée donnée par et $A = \frac{\pi D^2}{4}$

3. Vérification de la résistance de l'assemblage: comparer la contrainte de cisaillement calculée à la contrainte admissible du rivet ($\tau < \tau_{adm}$).
4. Prendre en considération la résistance à l'arrachement des rivets et les facteurs de sécurité donnés en paragraphe V.4.

A travers les deux exemples donnés ci-après, nous exposons la méthode de vérification de contrainte de cisaillement dans les assemblages par rivets souvent rencontrés en charpente métallique. Ceci implique le calcul des efforts appliqués et de la résistance de l'assemblage, en utilisant des formules qui prennent en compte les dimensions des rivets et leur nombre. Le processus inclut la détermination de l'effort à reprendre par l'assemblage, la vérification de la résistance caractéristique en cisaillement par rapport aux modes de rupture possibles, et la validation du diamètre et du nombre de rivets choisis.

Exemple 1

On veut assembler, à l'aide de rivets dont le diamètre de chacun vaut 20 mm et d'un couvre joint, deux tôles métalliques de 140 mm de largeur et 10 mm d'épaisseur. L'ensemble est soumis à un effort de traction $F = 10\,000$ daN, comme montré par la Figure 1.1.

1. Déterminer le nombre de rivets nécessaires à cet assemblage si la contrainte admissible de cisaillement $[\tau]$, pour chaque rivet, est égale à la 90 MPa.
2. Vérifier la résistance du système si la contrainte admissible pour chacune des deux tôles est 12 daN/mm².

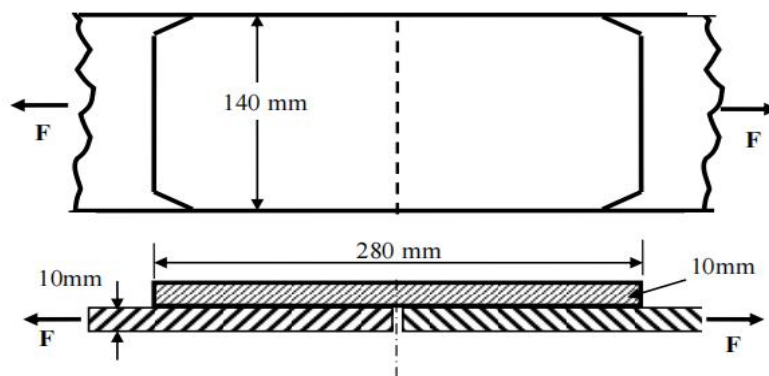


Figure 1.1

Le plan de cisaillement est donné par la Figure 1.2

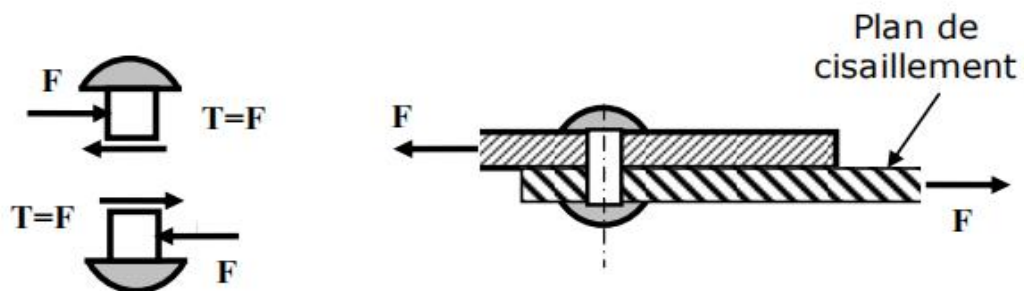


Figure 1.2

Solution de l'exemple 1

1. Nous avons ici un seul plan de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisailée, au niveau du plan de cisaillement est:

$$T = \frac{F}{n}$$

Où n est le nombre de rivets.

S'il y a un seul plan de cisaillement, alors: $T=F$

La contrainte de cisaillement sur la section cisailée (revenant à chaque rivet) est:

$$\tau = \frac{T}{nA} \quad \text{et} \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

La condition de résistance étant:

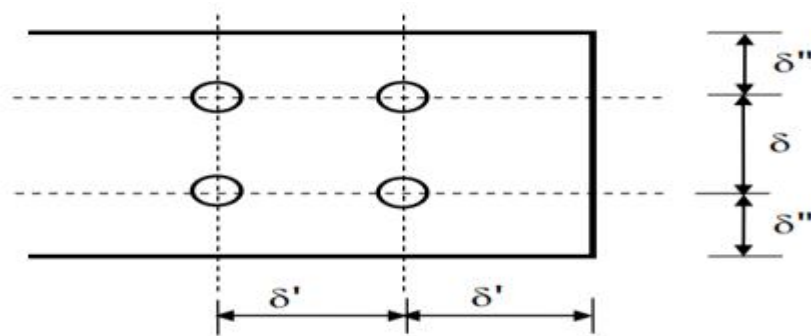
$$\tau \leq [\tau]$$

Alors, on écrit:

$$\frac{100000}{\frac{\pi D^2}{4}} \leq 90 \Rightarrow n \geq \frac{40000}{9 \cdot \pi \cdot 20^2} = 3.5$$

Le nombre de rivets nécessaire à cet assemblage est donc: $n=4$

Les dispositions pratiques des rivets se fait selon les conditions schématisées sur la Figure 1.3:



$\delta = 3D$ et δ'' au voisinage de $1.5D$ ($1.5D \leq \delta'' \leq 2.5D$)

Figure 1.3

Selon ces conditions, le nombre de rivets obtenu est disposé sur la Figure 1.4.

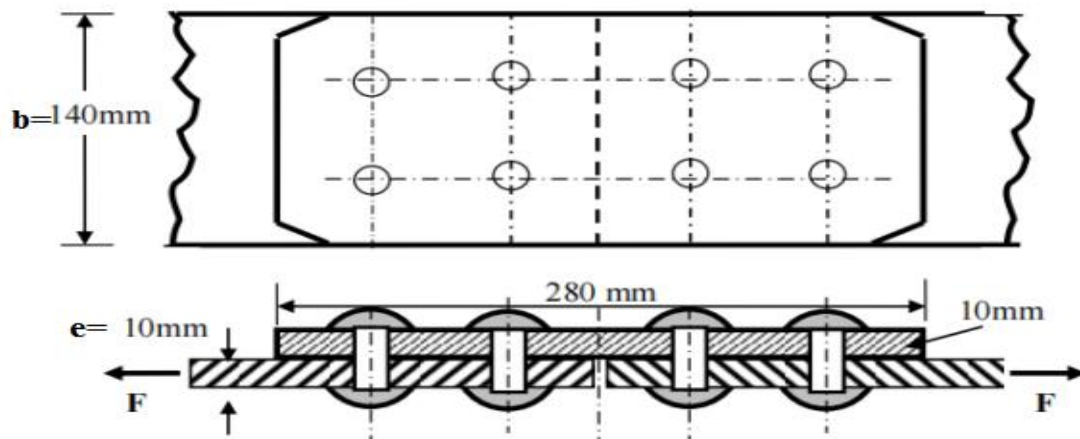
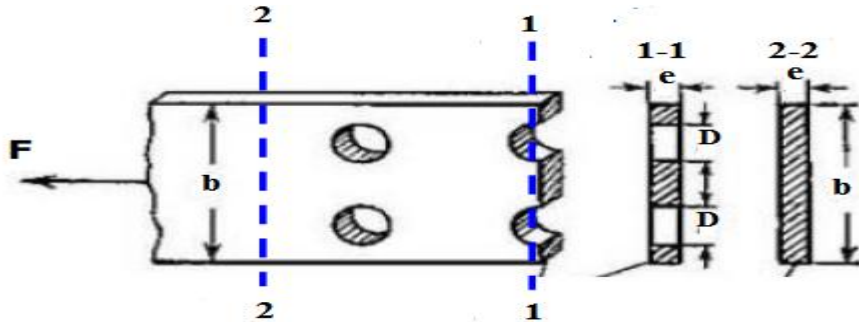


Figure 1.4

2. Pour vérifier la résistance du système, on doit vérifier la résistance de chacune des deux tôles au niveau de la section dangereuse qui passe naturellement par les axes des rivets, comme montrée sur la Figure 1.5.



La section la plus défavorable est la section 1-1

$$\sigma_{1-1} = N/A_{1-1}; \quad N=F, \quad A_{1-1} = e (b-2D)$$

$$\sigma_{1-1} = 10000 / 10(140-2*20) = 10 \text{ daN/mm}^2 < 12 \text{ daN}$$

La condition de résistance pour la traction est vérifiée, alors le système résiste à l'effort de traction appliqué.

Exemple 2

Trois tôles en acier sont assemblées entre elles par deux rivets de diamètre chacun égale à 17 mm (voir Figure 2.1)

1. Vérifier la résistance des rivets si la contrainte admissible de cisaillement $[\tau] = 900 \text{ kg/cm}^2$.

2. Déterminer l'épaisseur minimale de chacune des deux tôles si $[\sigma] = 1200 \text{ kg/cm}^2$.

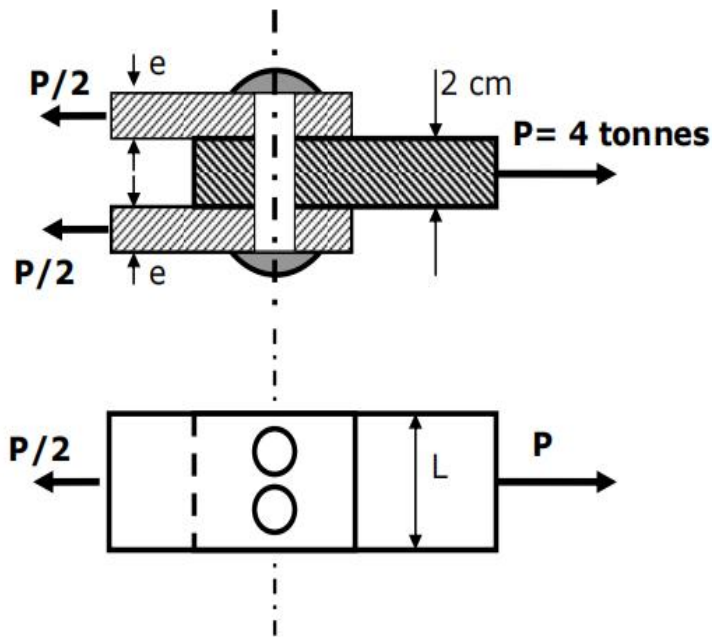


Figure 2.1

Solution de l'exemple 2

1. Nous avons ici deux plans de cisaillement (Figure 2.2). La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisillée, au niveau d'un **seul plan** de cisaillement est $T = F/2$

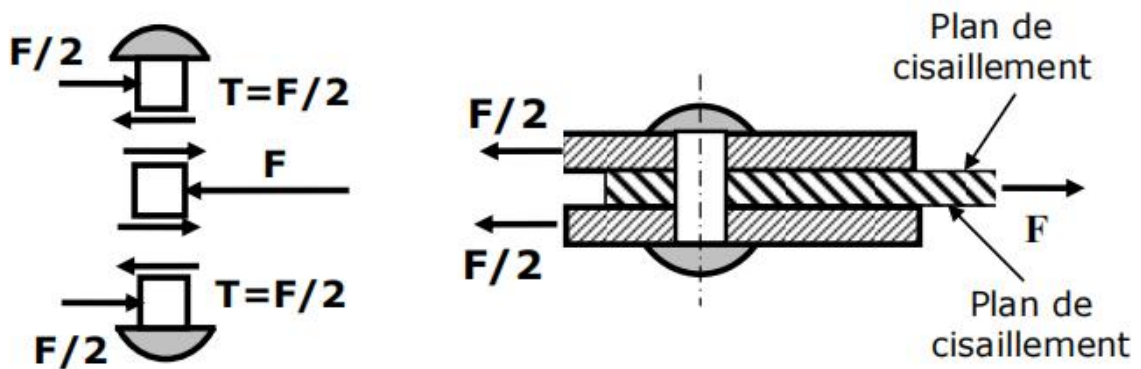


Figure 2.2

S'il y'a n rivet alors: $T = F/2n$

La contrainte de cisaillement sur la section cisillée (revenant à chaque rivet) est:

$$\tau = \frac{T}{nA} \quad \text{et} \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

La condition de résistance étant: $\tau \leq [\tau]$

Alors, on écrit

$$\frac{2F}{n \cdot \pi \cdot D^2} \leq [\tau]$$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot \pi \cdot 17^2} = 440.6 \text{ Kg/cm}^2 \leq 900 \text{ Kg/cm}^2$$

La résistance des rivets est bien vérifiée.

2. La contrainte normale dans une des deux tôles à la section dangereuse est:

$$\sigma_{1-1} = N/A_{1-1} = \frac{F/2}{e(b-2D)}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{F/2}{e(5-2 \cdot 1.7)} = \frac{2 \cdot 10^3}{16e} < 1200 \Rightarrow e \geq 1.04 \text{ cm}$$

Donc l'épaisseur minimale que devrait avoir chacune de deux tôles est au moins égale à 10,4 mm.

VI.1. Définition

VI.2. Moment de torsion

VI.3. Contrainte tangentielle ou de glissement

VI.4. Déformation élastique de torsion

VI.5. Condition de résistance à la torsion

VI.1. Définition

La torsion est une sollicitation où un moment de torsion (ou couple) appliqué à une poutre (généralement de section circulaire, pleine ou creuse), tendant à la faire tourner autour de son axe longitudinal. L'effet principal est une déformation en cisaillement.

Le couple tend à faire tourner une section d'une poutre autour de son axe longitudinal.

Les hypothèses de calcul de la torsion sont:

- La poutre doit être circulaire (pleine ou creuse) et les sections droites restent planes et circulaires pendant la déformation.
- Matériau homogène, isotrope et suit la loi de comportement élastique (la loi de Hooke)
- Petites déformations
- Moment de torsion constant le long de la poutre

VI.2. Moment de torsion

Soit un tronçon de barre circulaire de longueur L et de rayon R constant, encastré à l'extrémité A et libre à l'extrémité B. On soumet cette barre à un couple appliqué dans la section à l'extrémité libre B et qui produit un moment de torsion M_t (voir Figure VI.1). Ce dernier fait subir une déformation angulaire Θ_x au tronçon de la barre.

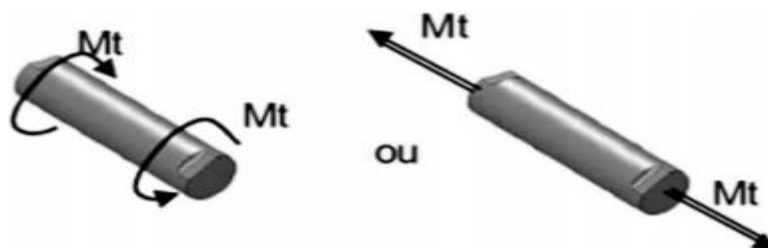


Figure VI.1. Essai de torsion

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle Θ_x autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1). On obtient une courbe illustrée à la Figure VI.2 semblable à celle de l'essai de traction : elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion M_t . A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

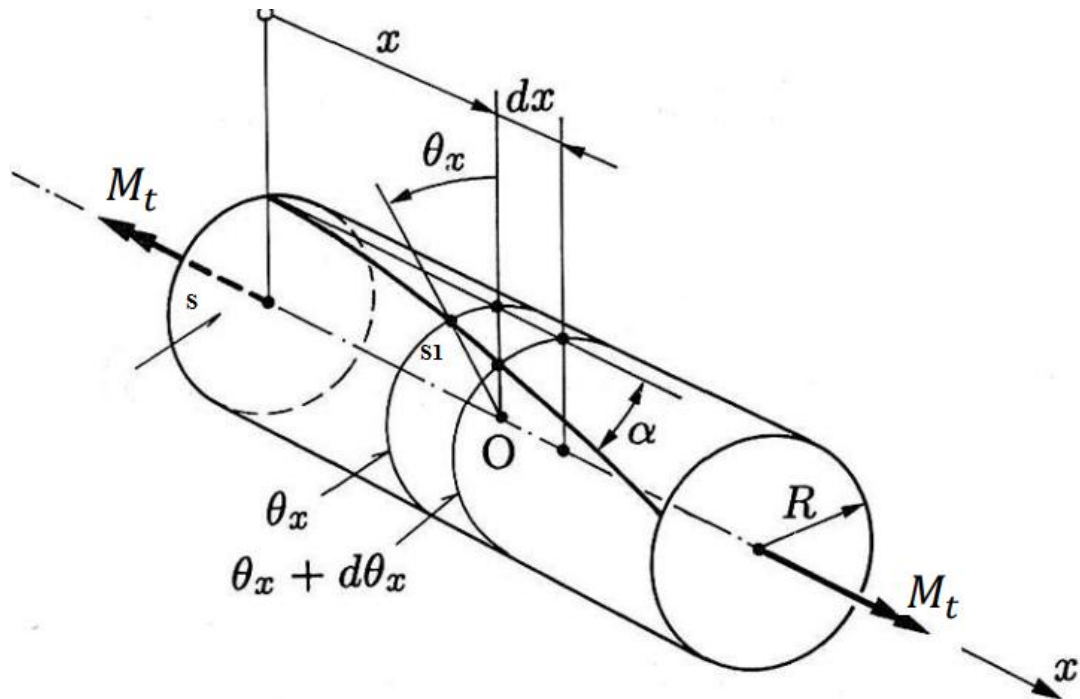


Figure VI.2. Courbe de déformation angulaire sous la torsion

Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et chaque section subit une rotation Θ_x autour de l'axe x , et cette rotation est proportionnelle à sa distance x . Les fibres se déforment donc suivant une hélice et la ligne moyenne reste droite.

L'expérience montre que le rapport de la relation VI.1, reste toujours constant.

$$\chi = \frac{\Theta_x}{x} \dots\dots (VI.1)$$

χ est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].

Θ_x : Angle de rotation de la section [rad].

x : Distance séparant de la section [mm]

On considère un petit élément de longueur dx d'une fibre : après déformation, le rectangle $abcd$ devient un parallélogramme $abc'd'$ (Figure VI.3). Seuls les angles droits varient.

$$rd\theta = v dx \Rightarrow v = r \frac{d\theta}{dx} = r \chi \dots \dots \dots (VI.2)$$

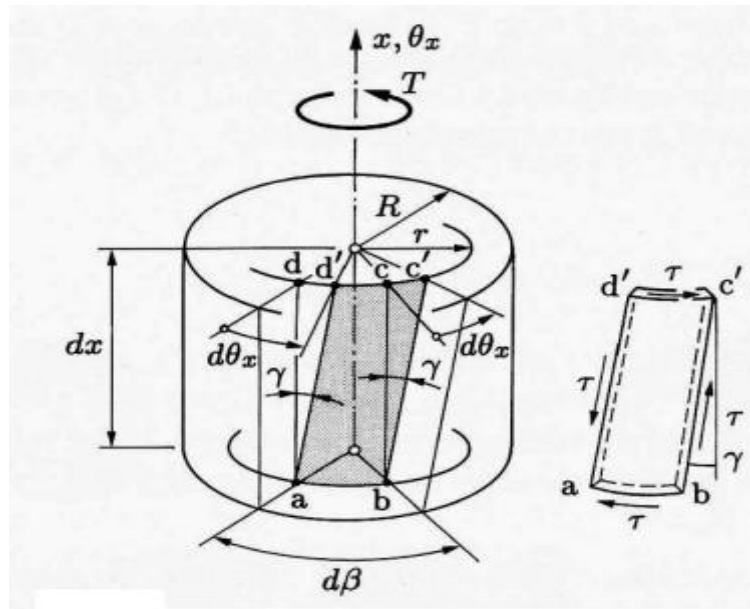


Figure VI.3. Schéma de déformation d'un cylindre sous la torsion

Les points c et d (Figure VI.3) se déplacent respectivement en c' et d' , la génératrice cc' et dd' subissent alors une déviation γ comparable à celle observée dans l'étude du cisaillement simple. La distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, ce qui implique que l'allongement $\Delta x = 0$, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\epsilon_x = 0$. On admet ainsi que la composante normale est nulle.

VI.3. Contrainte tangentielle ou de glissement

Sous l'effet d'un moment de torsion M_t , il se crée à l'intérieur de la matière une contrainte de cisaillement τ . Cette contrainte n'est pas uniforme dans la section. Elle est nulle au centre (axe neutre) et maximale en surface.

On peut montrer, à partir de la loi de Hooke (relation VI.3), qu'un petit élément soumis uniquement à des contraintes tangentielles τ (état de cisaillement pur) se déforme en faisant apparaître un angle γ (appelé angle de cisaillement) proportionnel à τ

$$\tau = \nu G \dots \dots \dots (VI.3)$$

On admet que la contrainte de cisaillement τ en un point donné de la section est proportionnelle à la distance radiale de ce point du centre de gravité de la section (τ est donc nulle au centre de la section et maximale sur les fibres périphériques de la section).

La contrainte tangentielle en un point quelconque d'une section circulaire de la barre est donnée par la relation VI.4.

$$\tau = \frac{C M_t}{J} \dots\dots\dots(VI.4)$$

τ : contrainte tangentielle

J: moment d'inertie polaire de la section

C: distance radiale du point à partir du centre de la section circulaire

Pour une section circulaire de rayon R,

$$J = \frac{\pi R^4}{2} \dots\dots\dots(VI.5)$$

Au niveau des fibres périphériques, $C = R$ et la contrainte de cisaillement est maximale. La contrainte maximale τ_{\max} se calcule avec la formule fondamentale de la torsion pour les sections circulaires. On aura donc la relation VI.6.

$$(VI.4) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{R M_t}{J} \dots\dots\dots(VI.6)$$

La déformation angulaire unitaire ν est reliée à la contrainte de cisaillement par la relation VI.7.

$$(VI.3) \Rightarrow \nu = \frac{\tau}{G} \dots\dots\dots(VI.7)$$

G: module d'élasticité au cisaillement ou module de Coulomb

VI.4. Déformation élastique de torsion

La déformation angulaire (Θ) d'une barre engendrée par un couple appliqué à son extrémité libre produisant un moment de torsion M_t , provoque des contraintes de cisaillement τ agissant dans les plans des sections de la barre (Figure VI.4).

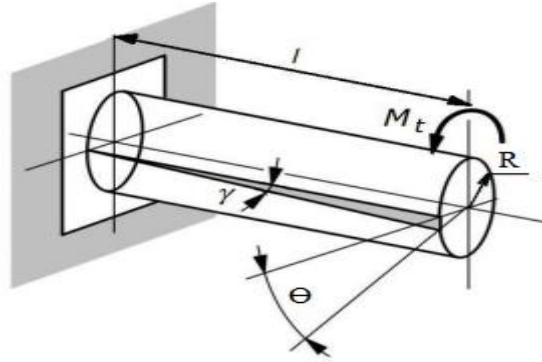


Figure VI.4. Déformation élastique sous la torsion

L'angle de rotation total Θ en radians sur la longueur L de la barre est donné par la relation VI.8.

$$\Theta = \frac{DD'}{R} \dots \dots \dots (VI.8)$$

Or: $DD' = \nu L$ (voir Figure VI.5)

$$\Theta = \frac{\nu L}{R} \dots \dots \dots (VI.9)$$

$$(VI.7) \Rightarrow \Theta = \frac{\tau L}{GR} \dots \dots \dots (VI.10)$$

$$(VI.6) \Rightarrow \Theta = \frac{M_t L}{GJ} \dots \dots \dots (VI.11)$$

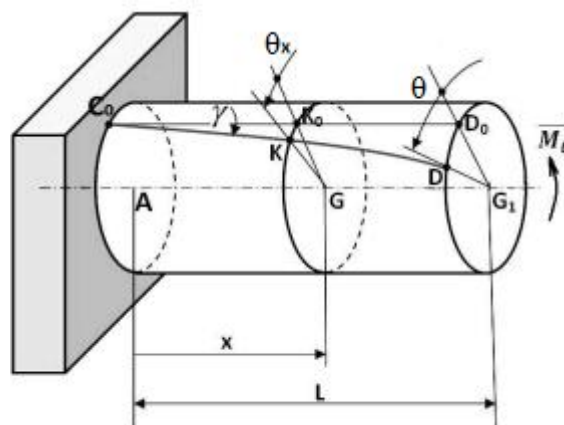


Figure VI.5. Déformation angulaire unitaire/angle de rotation totale

VI.5. Condition de résistance à la torsion

Pour qu'une pièce résiste en toute sécurité à la torsion, la contrainte maximale de cisaillement τ_{\max} ne doit jamais dépasser la résistance pratique au cisaillement du matériau. La condition s'écrit :

$$\tau_{\max} \leq R_{pg} \dots \dots \dots (VI.12)$$

R_{pg} est la résistance pratique au glissement (cisaillement) du matériau (MPa).

La résistance pratique R_{pg} (critère de coulomb) est obtenue en divisant la limite élastique en cisaillement (R_{eg}) du matériau par un coefficient de sécurité s .

$$R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} \dots \dots \dots (VI.13)$$

R_{eg} : Limite élastique au cisaillement

Pour la plupart des matériaux isotropes (acier, aluminium, etc.), on utilise le critère de Coulomb qui la relie à la limite élastique en traction R_e (beaucoup plus courante dans les tables de matériaux):

$$R_{eg} \approx R_e / \sqrt{3} \text{ (pour les aciers)}$$

$$R_{eg} \approx 0.5 \times R_e \text{ (pour les aciers doux)}$$

S : Coefficient de sécurité supérieur à 1.

En combinant les formules (VI.12), (IV.13 et (IV.6), on obtient la condition de résistance complète :

$$\frac{R M_t}{J} \leq \frac{R_{eg}}{s} \dots \dots \dots (VI.14)$$

Cette inégalité peut être utilisée pour:

- La vérification de la contrainte à la torsion, on connaît les dimensions (R , J), la limite élastique du matériau (R_e , donc R_{eg}) et le moment de torsion (M_t). On calcule τ_{\max} et on vérifie qu'elle est bien inférieure à R_{pg} .
- Dimensionnement d'une pièce, on connaît le moment de torsion (M_t), la limite élastique du matériau (R_e , donc R_{eg}) et le coefficient de sécurité (s). On doit déterminer la dimension de la pièce (son diamètre D) par la résolution de la

formule (VI.14): $R \leq \frac{J R_{eg}}{M_t s}$

Références bibliographiques

1. Khamis Hadjazi. Support de cours en Résistance des Matériaux, Université d'Oran (2013/2014).
2. ESTP. Contraintes et déformations dans les poutres, cours de Résistance des Matériaux.
3. S.Kesteloot. Cours: contraintes normales et tangentiels
4. Zamila Harichane. Polycopié de Résistance des Matériaux, Université de Chlef (2011)
5. Bensalah Abdellah. Cours de Résistance des Matériaux, Iset Nabeul
6. M.Bensaada . Polycopié de Résistance des Matériaux, Université de Biskra (2020)
7. G.Coolay. Résistance des Matériaux
8. O.Débordes. Rappels de Résistance des Matériaux, cours ESIM (1991)
9. N.Bourahla. Résistance des Matériaux de base, Université de Blida (1998)
10. Arame Samikiane. Analyse et calcul des structures. Edition Gaetan Morin, Québec, (1994)