

Corrigé de l'exercice 1 (10pts) I- On a les matrices A et B suivantes :

$$\blacksquare A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Le calcul (01pts)

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} = (-1)(2)(-1) - (-1)(-1)(-2) + (1)(1)(-2) - (1)(2)(2) \\ = 2 + 2 - 2 - 4 = -2.$$

2. La transposée et le format (01pts)

$$\blacksquare B^t = (2 \quad -1 \quad 2).$$

$$\blacksquare B \text{ est de format } (3,1) \quad \blacksquare B^t \text{ est de format } (1,3).$$

3. Les deux produits (01.5pts)

$$\blacksquare B^t \times A = (2 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (L_1 \times C_1 \quad L_1 \times C_2 \quad L_1 \times C_3) = (1 \quad -4 \quad 2). \quad \text{(01pts)}$$

Avec :

$$\blacksquare L_1 \times C_1 = (2 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2)(-1) + (-1)(1) + (2)(2) = -2 - 1 + 4 = 1.$$

$$\blacksquare L_1 \times C_2 = (2 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)(0) + (-1)(2) + (2)(-1) = 0 - 2 - 2 = -4.$$

$$\blacksquare L_1 \times C_3 = (2 \quad -1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)(1) + (-1)(-2) + (2)(-1) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

$$\blacksquare A^t \times B = A^t \times (B^t)^t = (B^t \times A)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{(0.5pts)}$$

II- La matrice inverse :

4. Le déterminant (01pts)

En développant par les cofacteurs de la 2^{ème} colonne, on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0)A_{12} + (2)A_{22} + (-1)A_{32} = 2A_{22} - A_{32}.$$

Où $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Ainsi :

$$\blacksquare A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \quad \blacksquare A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1.$$

Et par conséquent : $\det A = 2(-1) - (-1) = -1.$

5. Le pourquoi A est inversible (0.5pts)

La matrice A est inversible car $\det A \neq 0.$

6. La matrice inverse par Gauss-Jordan (3pts)

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow (-1)L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1 \quad (01pts)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad (01pts)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow (2)L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad L_2 \leftarrow L_2 + \left(\frac{1}{2}\right)L_3 \quad (01pts)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) = (I_3|A^{-1}). \text{ Ainsi : } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

III- La résolution de l'équation matricielle :

7. Le calcul (0.5pts)

$$3I_3 - 2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. La matrice X (01.5pts)

On a la matrice A est inversible, donc l'équation "AX = 3A - 2A² + I₃" admet une seule solution :

$$X = A^{-1}(3A - 2A^2 + I_3) = 3(A^{-1} \times A) - 2(A^{-1} \times A^2) + (A^{-1} \times I_3) = 3I_3 - 2A + A^{-1}. \quad (01pts)$$

Et d'après les résultats précédents, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (0.5pts)$$

Corrigé de l'exercice2 (04pts) On a le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée \tilde{A} (0.5pts)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

2. Ecriture matricielle de (S) (0.5pts)

$$\text{En posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ on a : } (S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Vérification que (S) est de Cramer (0.5pts) On a par Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)(-1)(4) + (1)(2)(4) + (2)(2)(1) - (2)(-1)(4) - (1)(2)(1) - (1)(2)(4)$$

$$= -4 + 8 + 4 + 8 - 2 - 8 = 6 \neq 0$$

D'où le système (S) est de Cramer.

4. Résolution de (S) par Cramer (02.5pts)

Comme le système est de Cramer ($\det A \neq 0$), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer :

(0.5pts)

$$\blacksquare x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \blacksquare y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \blacksquare z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(4) + (1)(2)(-2) + (2)(-4)(1) - (2)(-1)(-2) - (-1)(2)(1) - (1)(-4)(4) = 4 - 4 - 8 - 4 + 2 + 16 = 6.$$

(0.5pts)

$$\blacksquare |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-4)(4) + (-1)(2)(4) + (2)(2)(-2) - (2)(-4)(4) - (1)(2)(-2) - (-1)(2)(4) = -16 - 8 - 8 + 32 + 4 + 8 = 12.$$

(0.5pts)

$$\blacksquare |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-2) + (1)(-4)(4) + (-1)(2)(1) - (-1)(-1)(4) - (1)(-4)(1) - (1)(2)(-2) = 2 - 16 - 2 - 4 + 4 + 4 = -12.$$

(0.5pts)

Finalement, l'unique solution du système (S) est : $\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(0.5pts)

Corrigé de l'exercice3 (06pts) Résolution par la méthode de Gauss du système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + 2y - z + 2t = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 2t = 0 \\ -x - 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$$

■ L'échelonnement de la matrice augmentée (02pts)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (-1)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \end{array} = \tilde{A}_e.$$

■ Le système (S_e) associé à la matrice \tilde{A}_e (0.5pts)

$$(S_e) \begin{cases} x + 2y - z + 2t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

Ainsi (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) : nombre d'équations < nombre de variables).

■ **La résolution de (S_e) (01.5pts)**

Le système échelonné (S_e) se résout par rapport à la 1^{ère} variable de chaque équation x, z (les variables principales); les variable y, t sont libres. Et puis par substitution, on obtient alors :

$$\begin{cases} x = -2y + z - 2t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

■ **Les solutions du système (S) (02pts)**

En posant $t = \alpha$ et $y = \beta$, les solutions du système (S) sont données par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta - 4\alpha \\ \beta \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Fin du corrigé