Université Abderrahmane Mira-Bejaia
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Département des sciences commerciales
Laboratoire (facultatif) ....

Polycopié pédagogique

Dossier numéro (à remplir par l'administration) :…………………………………….

Titre

FONDEMENTS DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE

Préparer par : Dr. BOUROUAHA Abdelhammid
Maître de conférences classe A

Cours destiné aux étudiants de

Licence (spécialité et niveau) : **Licence 2, Sciences commerciales**

Master (spécialité et niveau) : ……………………………………………………………………….

Année : **2024-2025**

Sommaire

Sommaire ....

Introduction générale 1

1 Chapitre I : Notion de base en recherche opérationnelles et programmation linéaire 3

2 Chapitre II : La résolution graphique d'un programme linéaire 22

3 Chapitre III : La méthode du SIMPLEXE 39

4 Chapitre IV : La Dualité et l'analyse de sensibilité 69

5 Chapitre V : Les Problèmes linéaires en nombres entiers : méthode des coupes 81

6 Chapitre VI : Le problème de transport 95

Conclusion générale :... 111

Bibliographie :.. 112

Table des matières.. 114

Introduction générale

Le processus de prise de décision au sein d'une entreprise n'est pas aisé, car il exige des acteurs de terrain des efforts considérables et une analyse approfondie afin de formuler le problème avec précision, d'identifier les informations requises, d'analyser et d'évaluer les différentes solutions possibles, puis d'apprécier les résultats obtenus. Ce processus permet ainsi d'aboutir à la décision la plus appropriée, garantissant à l'entreprise une meilleure efficacité dans la conduite de ses activités.

C'est dans ce contexte que la recherche opérationnelle a été développée en tant qu'application scientifique des méthodes mathématiques et statistiques, visant à aider à la résolution de divers problèmes administratifs et économiques auxquels le décideur est confronté dans l'accomplissement de ses tâches, et qui peuvent être quantifiés. La recherche opérationnelle se caractérise par la diversité des méthodes qu'elle mobilise pour l'étude de ces problèmes, chacune ayant son propre champ d'application, notamment la programmation linéaire, les modèles de transport, entre autres.

Ce cours a pour objectif de présenter les fondements de la recherche opérationnelle, depuis la programmation linéaire et ses algorithmes jusqu'à l'analyse de sensibilité, en passant par les problèmes de transport. Il adopte une démarche pédagogique basée sur la simplicité et l'illustration par des exemples d'application détaillés.

Le présent cours de Fondements de la Recherche Opérationnelle (FRO) est destiné aux étudiants de deuxième année de licence en sciences commerciales à l'Université de Béjaïa. Les notions de base abordées permettent aux étudiants d'acquérir des connaissances théoriques et un savoir-faire pratique relatifs à la programmation linéaire et à la recherche opérationnelle.

Le cours est organisé en six chapitres, chacun traitant d'un aspect théorique fondamental de la recherche opérationnelle. Il débute par un premier chapitre consacré, en premier lieu, à l'initiation à la recherche opérationnelle, en présentant ses définitions, son origine, son importance ainsi que ses principaux domaines d'application. Dans un second temps, ce chapitre introduit la programmation linéaire à travers la formulation des problèmes sous forme de programmes linéaires, permettant à l'étudiant de développer sa capacité à modéliser un problème réel en un modèle mathématique optimisable. Une fois le programme linéaire établi, le deuxième chapitre présente sa résolution à l'aide de la méthode graphique, une approche intuitive adaptée aux problèmes à deux variables. Le troisième chapitre est consacré à l'algorithme du simplexe, une méthode algébrique puissante permettant de résoudre des programmes linéaires plus complexes. Le quatrième chapitre explore les concepts de dualité en programmation linéaire ainsi que l'analyse de sensibilité, essentiels pour comprendre la stabilité des solutions optimales et l'impact des variations des paramètres du modèle. Le cinquième chapitre traite des problèmes linéaires à variables entières et présente la méthode des coupes pour leur résolution. Enfin, le sixième et dernier chapitre aborde les problèmes de transport, en proposant des techniques spécifiques pour l'optimisation des coûts et des flux dans les réseaux de distribution.

En somme, ce polycopié a pour vocation de fournir aux étudiants une base solide en recherche opérationnelle à travers une approche progressive, illustrée par des exemples concrets et des applications pratiques. Les connaissances développées tout au long de ce support constituent une étape essentielle dans la formation des futurs gestionnaires, en les préparant à prendre des décisions optimales dans un environnement professionnel de plus en plus complexe et concurrentiel.

Chapitre I : Notion de base en recherche opérationnelles et programmation linéaire

Chapitre I : Notion de base en recherche opérationnelles et programmation linéaire

Introduction

Dans un environnement économique de plus en plus complexe, les organisations et les entreprises sont contraintes de prendre des décisions rapides et efficaces, fondées sur des analyses rigoureuses plutôt que sur la seule intuition ou l'expérience. C'est dans ce contexte qu'a émergé le domaine de la recherche opérationnelle (RO), défini comme « l'application de méthodes analytiques avancées visant à aider à la prise de décisions plus rationnelles et plus efficaces ».(Hillier & Lieberman, 2021).

Le présent chapitre a pour objectif d'initier l'étudiant aux principes fondamentaux de la recherche opérationnelle et de présenter l'un de ses outils majeurs. Il est structuré en deux sections principales. La première section propose une introduction générale à la recherche opérationnelle. Elle débute par la définition et l'origine de la discipline, puis expose ses objectifs et ses finalités. Cette section aborde également les principaux domaines d'application de la recherche opérationnelle au sein des organisations modernes. La deuxième section est consacrée à la programmation linéaire, en tant que technique centrale de la recherche opérationnelle. Elle présente les concepts de base, les hypothèses fondamentales, la formulation d'un modèle de programmation linéaire, ainsi que son rôle dans la résolution des problèmes d'optimisation.

1.1 Introduction à la recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est une discipline scientifique essentielle pour l'analyse et la résolution des problèmes complexes de prise de décision auxquels sont confrontées les organisations modernes. Face à la multiplicité des contraintes, à la rareté des ressources et à l'incertitude de l'environnement économique, elle propose une approche rationnelle et structurée, fondée sur des modèles mathématiques et des méthodes quantitatives, afin d'optimiser les choix et d'améliorer la performance des systèmes.

Cette section vise à présenter les fondements de la recherche opérationnelle à travers sa définition, son évolution, ses objectifs et ses principaux domaines d'application. Elle constitue une base conceptuelle nécessaire à la compréhension des méthodes d'optimisation, notamment la programmation linéaire, abordée dans la section suivante.

1.1.1 Aperçu historique de la recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est née dans un contexte militaire, au début de la Seconde Guerre mondiale, lorsque les forces armées britanniques ont fait appel à des scientifiques pour optimiser l'utilisation de leurs ressources (radars, avions, sous-marins, etc.). Le pionnier Patrick Blackett a dirigé l'un des premiers groupes de recherche opérationnelle afin d'améliorer l'efficacité des opérations militaires (Blackett, 1950). Blackett a souligné que « la recherche opérationnelle a démontré que l’approche scientifique pouvait être appliquée avec succès aux opérations militaires pour guider la stratégie et l’utilisation des ressources ».

Après la guerre, cette approche a été rapidement adoptée dans les domaines civils, notamment dans l’industrie, les transports et la gestion des stocks, connaissant un fort développement dans les années 1950-1960, en particulier aux États-Unis.

1.1.2 Définition de la recherche opérationnelle

L’une des premières définitions de la recherche opérationnelle a été donnée par Blackett, qui a défini la recherche opérationnelle comme « l’application de la méthode scientifique à l’étude et à la direction des opérations militaires » (Blackett, 1952) Selon Churchman, la recherche opérationnelle est l’application de la méthode scientifique, par des équipes interdisciplinaires, à des problèmes relatifs à la direction et à la coordination de systèmes complexes(Churchman et al., 1957). Parmi les définitions récentes, la recherche opérationnelle est décrite comme « la science qui consiste à développer et à appliquer des modèles mathématiques et des méthodes analytiques afin d’aider à la prise de décisions rationnelles ».(Hillier & Lieberman, 2021). Selon Taha, la recherche opérationnelle consiste à « appliquer des méthodes scientifiques à des problèmes complexes de gestion afin de déterminer la meilleure solution possible, compte tenu des contraintes et des objectifs définis »(Taha, 2017).

En résumé, la recherche opérationnelle est une discipline scientifique apparue durant la Seconde Guerre mondiale, visant à améliorer la prise de décisions stratégiques grâce à des méthodes scientifiques. Initialement utilisée dans le domaine militaire, elle s’est ensuite étendue à la gestion des organisations complexes. Elle repose sur la modélisation mathématique, l’analyse quantitative et l’optimisation des ressources limitées. Aujourd’hui, elle constitue un outil essentiel d’aide à la décision dans des environnements complexes et contraints.

1.1.3 Les objectifs et les finalités de la recherche opérationnelle

Parmi les objectifs de la recherche opérationnelle, on peut citer :

1. Aider à la prise de décision rationnelle ;
2. Modéliser des systèmes complexes ;
3. Optimiser l’utilisation des ressources ;
4. Analyser la performance des systèmes ;
5. Tester et comparer les alternatives.

De plus, l’utilisation de la recherche opérationnelle permet de :

a. Améliorer la performance organisationnelle ;

b. Réduire les coûts et le gaspillage ;

c. Apporter un soutien stratégique et tactique à la gestion.

1.1.4 Domain application

La recherche opérationnelle trouve des applications dans de nombreux secteurs grâce à sa capacité à modéliser et optimiser des systèmes complexes. Parmi ces domaines :

Logistique et transport : elle permet d'optimiser les itinéraires et de réduire les coûts de transport.

Production industrielle : elle aide à planifier efficacement la fabrication, organiser les ateliers et minimiser les coûts de maintenance.

Finances : elle facilite la gestion des portefeuilles, la prévision financière et l'allocation optimale des ressources.

Elle est également utilisée dans d'autres secteurs tels que la santé, le marketing, les télécommunications ou l'énergie, offrant des solutions d'optimisation adaptées à chaque contexte.

La recherche opérationnelle est une discipline née dans un contexte militaire et qui s'est progressivement imposée comme un outil scientifique d'aide à la décision dans de nombreux domaines comme logistique, industrie, finance, santé, etc. Elle repose sur la modélisation mathématique, l'analyse quantitative et l'optimisation. La recherche opérationnelle permet de résoudre des problèmes complexes en tenant compte des contraintes et des objectifs spécifiques à chaque situation.

1.2 La Programmation Linéaire

La programmation linéaire est une méthode d'optimisation mathématique permettant de résoudre des problèmes où l'on cherche à maximiser ou à minimiser une fonction objectif linéaire, tout en respectant un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'égalités ou d'inégalités linéaires. Ces modèles sont largement utilisés dans divers domaines tels que la production, la logistique, la gestion des ressources ou encore la planification financière.

L'objectif de cette section est de permettre aux étudiants de maîtriser la formulation mathématique de problèmes concrets sous forme de programmes linéaires. Cela implique d'identifier les variables de décision, de définir clairement la fonction objectif à optimiser et de traduire les contraintes du problème sous forme d'inégalités que la solution doit respecter. Cette étape de modélisation est essentielle, car elle constitue la base nécessaire à l'application des méthodes de résolution qui seront étudiées par la suite.

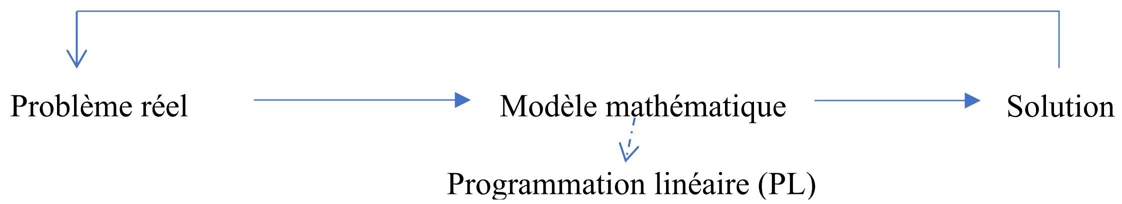
1.2.1 Formulation des modèles de programmation linéaire

L'adoption de la gestion scientifique et de la recherche opérationnelle est devenue une nécessité pour toutes les entreprises, quelles que soient leur taille et leur nature, en particulier face à une concurrence intense, à des ressources limitées et à de multiples alternatives. C'est dans ce contexte que la recherche opérationnelle s'est développée, notamment dans les pays développés. Le processus de décision y est centré sur le choix d'une solution optimale à un problème donné.

Une définition possible de la recherche opérationnelle est la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (mathématiques et informatique) appliquées aux phénomènes d'organisation, visant soit à maximiser un profit, une performance ou un rendement, soit à minimiser un coût ou une dépense. La recherche opérationnelle constitue avant tout un outil d'aide à la décision (Jean-françois Scheid, 2011). La recherche opérationnelle est également un outil mathématique d'aide à la décision, permettant de trouver une solution optimale ou, pour des problèmes complexes, une solution la plus proche possible de l'optimum (Adrien Goëffon, 2010).

La recherche opérationnelle aide les chefs d'entreprise et les décideurs à prendre des décisions optimales pour atteindre leurs objectifs, qui se répartissent en deux catégories : maximiser un profit ou minimiser un coût. Elle repose sur une interprétation scientifique du problème. Il est nécessaire de commencer par identifier le problème et rassembler les informations pertinentes, puis d'identifier et d'évaluer les solutions alternatives afin de prendre des décisions rationnelles, dans le but d'assurer la rentabilité et d'optimiser les résultats.

Figure 1-1: processus de la programmation linéaire



La source : (Adrien Goëffon, 2010)

1.2.2 Concepts importants

Avant d'aborder la manière dont ces problèmes sont formulés et traités, il convient de définir certains concepts clés :

1.2.2.1 Le modèle

Un modèle est défini comme la représentation mathématique d'un problème. Autrement dit, c'est la formulation du problème sous forme d'équations ou d'expressions mathématiques. Selon (Fabian Bastin, 2010, p. 2), « Un modèle est une construction mathématique utilisée pour représenter certains aspects significatifs de problèmes du monde réel »

1.2.2.2 La modélisation

Le processus de modélisation consiste à formuler et à représenter un problème sous une forme mathématique.

1.2.2.3 La programmation

La programmation consiste en un ensemble d'étapes à suivre pour atteindre un objectif précis, défini dès le départ. La meilleure solution obtenue à l'issue de ce processus est appelée la solution optimale.

1.2.2.4 Linéaire

La linéarité signifie que la relation entre les variables du modèle doit être linéaire, c'est-à-dire que l'exposant (la puissance) de chaque variable doit être égal à un.

1.2.2.5 La programmation linéaire

Le terme « programmation » désigne une série d'étapes organisées, manuellement ou automatiquement, pour atteindre la solution qui maximise ou minimise la fonction du modèle (fonction objectif) sous un ensemble de contraintes et dans une période donnée. Ainsi, la programmation linéaire est une approche mathématique qui permet d'optimiser l'allocation des ressources disponibles à différents usages, dans le but de maximiser les profits ou de minimiser les coûts. Elle peut également être définie comme une méthode aidant à prendre des décisions concernant la répartition optimale d'un ensemble de ressources limitées entre plusieurs utilisations possibles.

1.2.3 Les conditions d'utilisation de la programmation linéaire

Pour utiliser la programmation linéaire, certaines conditions doivent être remplies, les principales étant :

1- Détermination mathématique précise du problème : il faut identifier les variables de décision et leurs coefficients, exprimés sous forme de constantes connues. La fonction d'objectif doit être définie pour mesurer l'efficacité de l'entreprise (profit, quantité de production, coûts, etc.) et atteindre l'objectif de la programmation. La linéarité consiste à maximiser ou minimiser cette fonction selon les besoins du modèle.

2- Prise en compte des ressources disponibles : les ressources à disposition de l'entreprise ne doivent pas être dépassées. Les contraintes sont exprimées sous forme d'inégalités ou d'égalités afin de s'assurer que les ressources utilisées restent dans les limites disponibles

3- Relations linéaires entre variables et contraintes : les relations mathématiques doivent être linéaires et les variables de décision doivent être directement liées aux contraintes du problème étudié.

4- Non-négativité des variables de décision : les quantités utilisées ou transférées d'un centre à un autre, qui influencent la fonction objectif, ne doivent pas être négatives. Cette condition permet de définir le domaine des solutions acceptables et de déterminer la solution optimale.

5- Influence des variables sur l'objectif : les variables de décision doivent affecter le résultat de manière mesurable. Toute augmentation ou diminution d'une variable influence l'atteinte de l'objectif fixé dans le programme.

6- Respect des limites imposées par les ressources : les changements des variables de décision sont soumis aux restrictions imposées par les matériaux, la capacité des machines et le temps disponible. Chaque ressource a des limites connues, et celles-ci doivent être prises en compte dans la formulation du problème.

1.2.4 Les hypothèses de la programmation linéaire

La programmation linéaire repose sur un cadre théorique précis et sur un ensemble d'hypothèses qu'il convient de formuler lors de la modélisation du problème, afin de permettre sa résolution. Ces hypothèses peuvent être résumées comme suit :

1.2.4.1 Linéarité

La relation entre les variables du problème est linéaire, ce qui signifie que la fonction objectif ainsi que les contraintes imposées au problème, exprimées sous forme d'équations ou d'inégalités, sont de premier degré.

1.2.4.2 Non-négativité

La condition de non-négativité stipule que toutes les variables de décision du modèle de programmation linéaire doivent être supérieures ou égales à zéro. Cette hypothèse se justifie par le fait que les grandeurs qu'elles représentent, telles que les volumes de production ou les charges horaires, ne peuvent en aucun cas prendre des valeurs négatives.

1.2.4.3 Confirmation

L'ensemble des éléments du problème est supposé connu et limité. En effet, la technique de la programmation linéaire ne s'applique qu'aux problèmes de prise de décision en situation de certitude. Ainsi, les relations qui prévalent dans le modèle sont considérées comme stables, et tous les coefficients associés aux variables doivent être connus, déterminés et fixés à l'avance.

1.2.4.4 Fragmentation

Dans un contexte économique ou managérial, la fragmentation signifie que la production peut être fractionnée (par exemple, 2,5 unités produites) et que les ressources sont parfaitement divisibles (par exemple, une heure et demie de travail). La programmation linéaire repose implicitement sur l'hypothèse de fragmentation, selon laquelle les variables de décision sont parfaitement divisibles et peuvent être décomposées en unités élémentaires contribuant de manière additive à la fonction objectif et aux contraintes du modèle.

1.2.4.5 Proportionnalité

Chaque unité de production identique consomme la même quantité de ressources disponibles. Par exemple, si la production d'une unité d'un produit donné nécessite deux unités de matière première, la production de vingt unités de ce produit requiert quarante unités de matière première.

1.2.4.6 Supplémentaire

Cela signifie que la quantité totale de ressources utilisées par l'ensemble des activités est égale à la somme des ressources consommées par chaque activité prise séparément.

1.2.5 Les composants principaux d'un modèle de programmation linéaire PL

La construction du modèle mathématique de tout problème passe par les étapes suivantes :

1.2.5.1 Les variables de décision

Quelles sont les variables de décision de notre PL ?

Les variables de décision sont les inconnues du programme linéaire (Bernard Fortz, 2013, p. 3).

Elles représentent les éléments du modèle sur lesquels le décideur peut agir afin de générer différentes configurations de solution (Fabian Bastin, 2010). À titre d'exemple, elles peuvent correspondre aux quantités de produits à fabriquer, au nombre d'employés à mobiliser, ou encore aux volumes de ressources à allouer. Ainsi, les variables de décision varient selon la nature du problème étudié et les objectifs poursuivis par l'entreprise.

1.2.5.2 Formulation de la fonction objectif :

La fonction objectif représente le but de la situation étudiée ou le problème que l'on souhaite résoudre. Elle est formulée sous forme d'équation mathématique et permet d'attribuer une valeur à chaque configuration possible du modèle. Le terme « objectif » reflète le fait que l'on cherche à optimiser cette fonction, soit en la maximisant, soit en la minimisant, selon les besoins du problème (Fabian Bastin, 2010, p. 2).

Le décideur cherche à atteindre un objectif donné, tel que la maximisation du profit. Dans ce cas, la fonction objectif peut être exprimée sous la forme générale suivante :

Max Z = $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i;$

Avec

$c_i: paramètre$; $x_i: variable\ de\ decision$

Max Z = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (dans le cas du profit ou bien bénéfice)

Max est l'abréviation de Maximisation,

Min Z = $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (dans le cas des coûts ou bien des charges)

Min est l'abréviation de Minimisation,

$x_1, x_2 \ldots x_n$ Désignent le nombre d'unités produites par les produits 1, 2 ... n, respectivement, ou ce que l'entreprise doit acquérir de machines ou de moyens de transport.

Ou d'autres variables problématiques, $c_1, c_2 \ldots c_n$ désignent le bénéfice par unité de produits 1, 2 ... n, respectivement, et Z représente le bénéfice total dans le cas Max, et la somme des coûts dans le cas de Min.

L'explication économique

Max : maximiser le bénéfice de l'entreprise. Il s'agit de la fonction objectif qui vise à maximiser le bénéfice (ou le niveau de production) de l'entreprise. Les paramètres $c_1, c_2, \ldots c_n$représentent les bénéfices unitaires associés à chaque produit à fabriquer, tandis que les variables de décision $x_1, x_2, \dots x_n$ indiquent les quantités produites de chaque produit.

Min : minimiser les coûts et les charges de l'entreprise. Cette fonction objectif a pour but de minimiser les coûts (ou le niveau de production) de l'entreprise. Les paramètres $c_1, c_2, \dots c_n$ correspondent aux coûts unitaires de chaque matière première utilisée, et les variables de décision $x_1, x_2, \dots x_n$ représentent les quantités consommées.

1.2.5.3 Formulation des contraintes

Les contraintes représentent des limitations imposées aux variables de décision. Elles sont généralement formulées sous forme d'expressions mathématiques et constituent des éléments déterminants du problème, qui ne peuvent être dépassés. Elles encadrent la recherche de solutions et conditionnent la réalisation de l'objectif fixé.

Ces contraintes peuvent traduire, par exemple, la disponibilité des matières premières, le nombre requis de personnel, la durée du travail ou d'autres restrictions opérationnelles. Elles limitent également les ressources pouvant être allouées pour atteindre un objectif donné, en précisant notamment ce qui peut être produit, vendu ou transféré depuis une usine donnée, ainsi que les quantités minimales et maximales à livrer à un entrepôt spécifique, entre autres.

D'une autre manière, les contraintes représentent les limitations sur les variables(Fabian Bastin, 2010, p. 2). Les contraintes sont indispensables à la définition de l'objectif à atteindre, car elles représentent les limites à ne pas dépasser. Elles ne dépendent pas de la fonction objectif : en effet, les contraintes précisent les quantités à utiliser et les seuils à ne pas dépasser, tandis que la fonction objectif exprime l'équation du bénéfice à maximiser ou des coûts à minimiser.

L'écriture mathématique d'une contrainte est comme suit :

Dans le cas de Max Z : la forme des contraintes est comme suite :

$$c_1\, x_1 \;+\; c_2\, x_2 \;+ \cdots +\; c_n\, x_n \leq B$$

Avec :

$x_1\,, x_2, \dots, x_n$: les variables de décisions

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$: les paramètres

A : le stock (la quantité) à ne pas dépasser.

Dans le cas de Min Z : la forme d'une contrainte est comme suite :

$$c_1\, x_1 \;+\; c_2\, x_2 \;+ \cdots +\; c_n\, x_n \geq B$$

Avec :

$x_1\,, x_2, \dots, x_n$: les variables de décisions

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$: les paramètres qui formulent le membre gauche.

B : le stock (la quantité) nécessaire a utilisé (au minimum) appelée aussi second membre.

L'explication économique

D'un point de vue économique, les contraintes représentent des limites à respecter afin d'atteindre l'objectif de l'entreprise. Par exemple, si l'objectif est de maximiser le bénéfice à travers la production de différents types de produits, l'entreprise fait face à plusieurs contraintes, telles que le nombre limité d'employés, les stocks restreints de matières premières, etc. Ainsi, pour atteindre son objectif, l'entreprise doit impérativement respecter les limites liées aux ressources disponibles.

Dans le cas d'un problème de minimisation, la réalisation de l'objectif nécessite également le respect de contraintes minimales afin d'assurer la continuité de l'activité. En effet, pour minimiser les coûts et les charges d'une entreprise ou d'une activité, celle-ci doit garantir un niveau minimal de production ou d'activité, tout en utilisant une quantité minimale de ressources, notamment de matières premières.

1.2.5.4 L'exigence de variables non négatives

Cela signifie que les quantités cibles des variables de décision ne peuvent pas être négatives, car une telle situation n'a aucun sens dans la réalité économique. Autrement dit, une entreprise peut décider de ne pas produire un produit donné, mais elle ne peut en aucun cas planifier la production d'une quantité négative.

$$x_1، x_2، \ldots x_n \geq \mathbf{0}$$

1.2.6 Les différentes formes d'un programme linéaire

1.2.6.1 La forme mixte

On peut dire qu'un programme linéaire est écrit sous forme mixte lorsqu'il comporte des contraintes de différents types, c'est-à-dire lorsque l'on retrouve simultanément des inégalités de type ≤, ≥ et éventuellement des égalités = dans le système de contraintes.

1.2.6.2 La forme canonique

On peut dire que le programme linéaire est écrit dans la forme canonique juste dans l'existence de deux conditions :

a- Les contraintes du PL doivent être :
- Dans le cas Max Z : ≤
- Dans le cas Min Z : ≥

b- Toutes les variables de décisions respectent la condition de la non-négativité.

1.2.6.3 La forme standard

La forme standard c'est la forme qui contient que la signe =.

En résumé, en recherche opérationnelle, la modélisation d'un problème consiste à identifier :

1- Les variables de décision (les inconnues du modèle) ;
2- Les différentes contraintes auxquelles ces variables sont soumises ;
3- L'objectif à atteindre, exprimé sous forme d'une fonction d'optimisation (maximisation ou minimisation).

1.2.7 Exemples :

Exercice 1-1: exemple explicative – problème de production -

Un constructeur d'automobiles propose deux modèles à la vente. Les voitures de ce constructeur sont tellement à la mode qu'il est certain de vendre tout ce qu'il parvient à produire, au moins au prix catalogue actuel de 18 000 € pour les voitures du premier modèle, et 10 000 € pour les voitures du deuxième modèle. Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier. La construction d'une voiture du deuxième modèle nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'une voiture du premier modèle nécessite une unité de caoutchouc et deux unités d'acier. Sachant que son stock est de 400 unités de caoutchouc et de 600 unités d'acier.

Modéliser ce problème sous forme d'un program linéaire.

Solution 1-1: exemple explicative

Le tableau suivant résume les données présentées dans l'exercice

	Caoutchouc	Acier	Prix
x_1: voiture 1^{er} modèle	1	2	18000
x_2: voiture $2^{éme}$ modèle	1	1	10000
Ressources disponible	400	600	

1

La première étape : les variables de décision

Les produits dans l'exercice sont les deux modèles de voiture, donc on va donner une variable représentative pour chaque produit

Les variables de décision

x_1 : nombre des automobiles du premier modèle a fabriquées ;

x_2 : nombre des automobiles du deuxième modèle a fabriquées ;

2

La deuxième étape : la fonction d'objectif
La formulation mathématique de l'objectif, dans l'exercice repose sur l'identification des mots clés qui indiquent la nature de la fonction objectif de l'entreprise (maximiser ou minimiser).
Si on rencontre les mots « profit, bénéfice, rendement … », la fonction d'objectif sera à maximiser (Max) parce que l'entreprise cherche à maximiser le profit.
Si l'on rencontre les mots « coûts, charge, … », la fonction d'objectif sera à minimiser (Min) parce que l'entreprise cherche à minimiser le coût.

Pour calculer le profit, P= prix*quantité

Parce qu'il y a deux produits, donc le profit= prix1 * quantité 1 + prix 2 * quantité 2

La fonction d'objectif

$Max. Z = 18000\ x_1 + 10000\ x_2$ (Maximiser le profit)

3

La troisième étape : les contraintes
Les contraintes représentent les ressources utilisées. Et parce que le stock est limité, l'entreprise ne peut pas consommer plus que ce qui est disponible.

La consommation des ressources (matière première) ne peut pas dépasser le stock.

Chaque ressource est utilisée dans la production des deux produits.

Donc :

Les contraintes

$x_1 + x_2 \leq 400$ (Caoutchouc)

(La quantité du caoutchouc utilisée pour la fabrication des deux modèles ne peuvent pas dépasser la quantité dans le stock

$2\ x_1 + x_2 \leq 600$ (L'acier)

(La quantité du l'acier utilisée pour la fabrication des deux modèles ne peuvent pas dépasser la quantité dans le stock

$x_1, x_2 \geq 0$ (Contrainte de le non négativité)

La quantité produite ne peux jamais d'être inferieur a 0

Ainsi, la formulation finale du programme linéaire s'écrit comme suit :

Les variables de décisions :

- x_1 : Quantité (nombre d'unités) des automobiles de premier modèle a fabriqué,
- x_2 : Quantité (nombre d'unités) des automobiles de deuxième modèle a fabriqué,

$$(PL)\begin{cases} F.O: Max\ Z = 18000\ x_1 + 10000 x_2 \quad (maximiser\ le\ profit\ de\ l'entreprise) \\ 1\ x_1 + 1\ x_2 \leq 400\ (caoutchouc) \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 600\ (l'acier) \\ x_1, x_2 \geq 0\ (contraintes\ de\ non\ negativité) \end{cases}$$

Exercice 1-2: rattrapage 2019-2020 – problème de production -

Une usine de fabrication des articles scolaires (cahiers, carnets, livres) possède une machine automatique **A** et une machine manuelle **B**. La machine **A** fabrique du papier imprimé, et la machine **B** fait la coupe du papier selon le format demandé. Le marché peut absorber toute la production. Toutefois, due au manque de matière première, la fabrication des livres est réduite à un maximum de 600 livres par jour. Aussi, avec une forte demande durant la rentrée scolaire, au minimum 1000 cahiers et 2000 carnets doivent être fabriqués par jour. La machine **A** peut fonctionner au maximum 8,5 heures par jour. Les données concernant les coûts, les prix de vente et les taux de production sont indiqués ci-dessous :

Produits	Coûts-matériels (dinars/unité)	Main-d'œuvre (dinars/heure)	Prix de vente (dinars/unité)	Taux de production (unité/heure)
Livre	5.00	150.00	170.00	100
Cahier	3.00	30.00	30.00	200
Carnet	1.00	10	15.00	500

La question : Formuler ce problème sous forme d'un modèle linéaire.

Solution 1-2

1-les variables de décision

x_1 : Quantité des livres à produire

x_2 : quantité des cahiers à produire

x_3 : quantité des carnets à produire.

2-La fonction économique (fonction objectif)

$$(PL)\begin{cases} Max\ Z = (170 - 150/100\ -\ 5)\,x_1 + (30 - 30/200\ -\ 3)\,x_2 + (15\ -\ 10/500\ -\ 1)\,x_3 \\ Max\ Z = 163.5\,x_1\ +\ 26.85\,x_2\ +\ 13.98\,x_2 \\ \dfrac{1}{100}\,x_1\ + \dfrac{1}{200}\,x_2\ + \dfrac{1}{500}\,x_3 \leq 8.5\ (Temps\ Machine\ A) \\ x_1 \leq 600\ (Production\ des\ livre) \\ x_2 \geq\ 1000\ (Production\ des\ cahier) \\ x_3 \geq\ 2000\ (production\ des\ carnet) \\ x_1, x_2, x_3\ \geq 0\ (Non\ négativité) \end{cases}$$

Exercice 1-3: problème de transport

Une organisation possède quatre centres de distribution : (Tlemcen, Alger, Constantine et Béchar) de stocks de produits respectivement de : 120 kg, 100 kg, 100 kg et 100 kg, pour lesquels elle a reçu des commandes de ses antennes d'Oran (80 kg), Bejaia (190 kg) et Tamanrasset (150 kg).

Les coûts de transport d'un kilo de produits, suivant les liaisons routières considérées, sont donnés par le tableau suivant :

	Oran	Bejaia	Tamanrasset
Tlemcen	80DA	200DA	-
Alger	100DA	100DA	-
Constantine	-	400DA	900DA
Bechar	-	600DA	800DA

<u>Les questions</u>

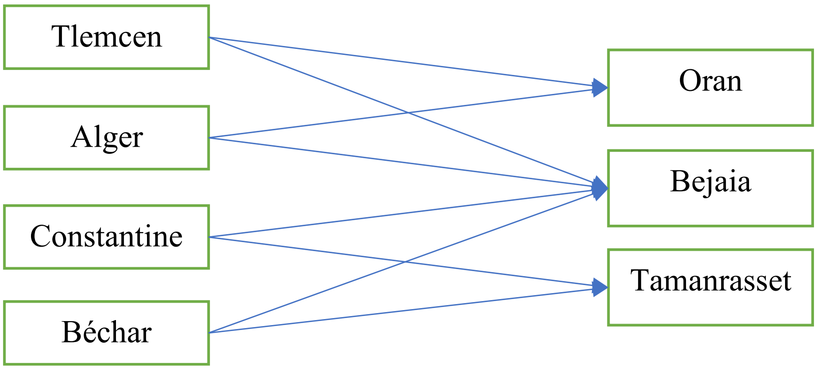
Représenter le problème sur un graphique.

Formuler mathématiquement le problème.

Solution 1-3: problème de transport

Di, i : 1, ..., 4 → les centres de distribution Tlemcen, Alger, Constantine et Bechar respectivement

Aj : j : 1, …, 3→ les antennes : Oran, Bejaia et Tamanrasset



Les variables de décisions :

$$x_{ij} : la\ quantité\ de\ produit\ à\ transporter\ de\ Di\ (i: 1 \ldots 4) vers\ l'antenne\ Aj, (j: 1 \ldots 3)$$

La fonction d'objectif :

$$Min\ Z = 80x_{11} + 200x_{12} + 100x_{21} + 100x_{22} + 400x_{32} + 900x_{33} + 600x_{42} + 800x_{43}$$

Les contraintes :

Les contraintes de l'offres :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 120 \\ x_{21} + x_{22} \leq 100 \\ x_{32} + x_{33} \leq 100 \\ x_{42} + x_{43} \leq 100 \end{cases}$$

Les contraintes de la demande :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 190 \\ x_{33} + x_{43} = 150 \end{cases}$$

Les contraintes de la non négativité :

$x_{ij} \geq 0; (i: 1,2,3,4; j: 1,2,3)$, avec $x_{13} = x_{23} = x_{31} = x_{41} = 0$

Exercice 1-4: Horaire de personnel

Nous souhaitons établir un horaire quotidien, sachant que chaque jour est divisé en périodes et en supposant que nous avons pu estimer un nombre minimum d'employés devant être affecté durant chaque période. Chaque jour est divisé en quarts de travail de 8 heures. Plusieurs quarts partagent une même période, mais chaque quart exige un salaire particulier. Nous souhaitons savoir combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période. Les données du problème sont données dans la Table suivante :

Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	Minimum employés
6-8	X					48
8-10	X	X				79
10-12	X	X				65
12-14	X	X	X			87
14-16		X	X			64
16-18			X	X		73
18-20			X	X		82
20-22				X		43
22-24				X	X	52
0-6					X	15
Salaire	170	160	175	180	195	

Solution 1-4 :

Le programme linéaire :

Les variables de décisions :

$x_1 : le\ nombre\ d'employés\ dans\ le\ quart\ 01$

$x_2 : le\ nombre\ d'employés\ dans\ le\ quart\ 02$

$x_3 : le\ nombre\ d'employés\ dans\ le\ quart\ 03$

$x_4 : le\ nombre\ d'employés\ dans\ le\ quart\ 04$

$x_5 : le\ nombre\ d'employés\ dans\ le\ quart\ 05$

La fonction d'objectif :

$Min\ Z = 170\ x_1 + 160x_2 + 175x_3 + \ 180x_4 + 195x_5 (minimiser\ les\ charges\ (salaires))$

Les contraintes :

$x_1 \geq 48 \qquad (06 - 08)$

$x_1 + x_2 \geq 79 \qquad (08 - 10)$

$x_1 + x_2 \geq 65 \qquad (10 - 12)$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \qquad (12 - 14)$

$x_2 + x_3 \geq 64 \qquad (14 - 16)$

$x_3 + x_4 \geq 73 \quad (16 - 18)$
$x_3 + x_4 \geq 82 \quad (18 - 20)$
$x_4 \geq 43 \quad (20 - 22)$
$x_4 + x_5 \geq 52 \quad (22 - 24)$
$x_5 \geq 48 \quad (00 - 06)$
Non négativité :
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Exercice 1-5:

Une entreprise fonctionne avec cinq (05) catégories d'employés réparties selon leurs jours de repos. Chaque employé travaille cinq jours consécutifs suivis de deux jours de repos, et son salaire dépond de la catégorie à laquelle il appartient.

Catégorie	**Cat 01**	**Cat 02**	**Cat 03**	**Cat 04**	**Cat 05**
Jours Repos	Vendredi-Samedi	Samedi-Dimanche	Lundi-Mardi	Mardi-Mercredi	Jeudi-Vendredi
Salaire	50 000 DA	48 000	45 000 DA	42 000 DA	52 000 DA

Les demandes quotidiennes minimales en employés dépendent du jour de la semaine, selon le tableau ci-dessous.

Jour	**Samedi**	**Dimanche**	**Lundi**	**Mardi**	**Mercredi**	**Jeudi**	**Vendredi**
Demande	15	40	35	38	40	30	10

L'entreprise veut savoir combien de personnes de chaque catégorie doit-on faire travailler de façon à satisfaire la demande et à minimiser le coût du personnel.

<u>**La question**</u> : Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Solution 1-5

<u>Les variables de décision :</u>

x_i : le nbre des personnes de chaque catégorie doit on travailler, i=1→5

<u>La fonction d'objectif : (minimiser les couts du personnel)</u>

Min Z= $50000x_1 + 48000x_2 + 45000x_3 + 42000x_4 + 52000x_5$

<u>Les contraintes :</u>

$x_3 + x_4 + x_5 \geq 15$ (Samedi)
$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 40$ (dimanche)
$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 35$ (lundi)
$x_1 + x_2 + x_5 \geq 38$ (mardi)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 40$ (mercredi)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 30$ (jeudi)
$x_2 + x_3 + x_4 \geq 10$ (vendredi)
$x_i \geq 0$, i = 1,2,3,4,5 (non-négativité)

Exercice 1-6

Une entreprise désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant de deux produits bruts : orge et arachide.

– La quantité nécessaire par portion est de 1KG.

– L'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéines et au plus 20% de fibres.

Le tableau suivant présente les quantités ainsi les couts de chaque composant :

Quantité par kilogramme d'aliment			Couts
Aliment	Protéines	Fibres	£/KG
Orge	0.5	0.2	10
Arachide	0.4	0.6	45

Question

Résoudre le problème de cette entreprise par la méthode de la programmation linéaire.

Solution 1-6

Les variables de décisions

x_1 = quantité d'orge par portion

x_2 = quantité d'arachide par portion

La fonction d'objectif

MinZ= 10 x_1 + 45 x_2 (minimiser les couts)

Les contraintes

$x_1 + x_2 \geq 1$ (contrainte de quantité)

$0.5\ x_1 + 0.4\ x_2 \geq 0.3\ (x_1 + x_2)$ (contrainte de protéine)

$0.2\ x_1 + 0.6\ x_2 \leq 0.2\ (x_1+x_2)$ (contrainte de fibres)

$x_1, x_2 \geq 0$ (contrainte de non-négativité)

Exercices

Exercice 1-7

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M1 et M2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour, chacun de ces modèles sont de 300 € pour M1 et de 200 € pour M2.

	Sciage	Assemblage	Sablage
M1	1	2	1
M2	2	1	1
Temps libres	20	22	12

La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle doit fabriquer pour maximiser son profit.

1. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 1-8:

Une entreprise de cimenterie a 4 stations (site) de production de ciment. Son approvisionnement en matière première est fait principale à partir de 6 carrières. La capacité de production de chaque carrière, les tailles des stocks (vides) disponibles aux différentes stations à alimenter sont données dans les tableaux suivants :

Station Taille des stocks/tonne

Station	Taille des stocks/tonne
1	50
2	60
3	20
4	90

Carrière Capacité carrière/tonne

Carrière	Capacité carrière/tonne
1	40
2	40
3	60
4	20
5	40
6	20

Les coûts unitaires de transport d'un kilo de matière première de la carrière i à la station j sont donnés par le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	9	12	9	6	9	10
2	7	3	7	7	5	5
3	6	5	9	11	3	11
4	4	6	11	2	2	10

1. L'offre et la demande sont-elles réalisables ?
2. Formuler mathématiquement le problème
3. Donnez une représentation graphique du problème

Exercice 1-9:

Mergin Équipements fabrique de gros transformateurs électriques. Les commandes de la compagnie pour les six prochains mois sont données dans le tableau ci-après. Les coûts de fabrication d'un transformateur sont sujets à des variations dues au cours des matières premières et au prix de la main d'œuvre. L'usine peut fabriquer jusqu'à 50 unités par mois en heures normales et 20 unités supplémentaires en heures supplémentaires.

Les coûts de ces deux types de production sont également donnés dans le tableau.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Nombre d'unités commandées	58	36	34	69	72	43
Coût en heures normales (K-euro)	18.0	17.0	17.0	18.5	19.0	19.0
Coût en heures supp. (K-euro)	20.0	19.0	21.0	22.0	22.0	23.0

Le coût de stockage d'un transformateur invendu est de 500 euros par mois. La compagnie possède 15 unités en stock début janvier et aimerait en avoir au moins 5 en stock fin juin (i.e. début juillet).

La question : Formuler le problème consistant à déterminer le plan de production le plus rentable sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 1-10:

Le self-service d'un hôtel offre chaque jour à ses clients quatre plats : plat1, plat2, plat3, plat4. Le prix d'une unité du plat1 vaut 0.5DT, du plat2 vaut 0.2DT, du plat3 vaut 0.3DT et du plat4 vaut 0.8DT. Le tableau suivant nous donne la quantité de vitamines V1, V2, V3 et V4 dans une unité de chaque plat :

Par unité	V1	V2	V3	V4
Plat1	400	3	2	2
Plat2	200	2	2	4
Plat3	150	0	4	1
Plat4	500	0	4	5

Un client suit un régime alimentaire doit manger au moins : 500 unités de V1, 6 unités de V2, 10 unités de V3 et 8 unités de V4.

Question : Déterminer le régime qui coûte le moins cher.

Exercice 1-11:

Un pays en voie de développement veut mettre en valeur une zone de 900 ha ou deux (02) cultures sont à priori possible : les dattes et le blé.

Les données relatives à ces 2 cultures sont les suivantes (pour 1 ha) :

	Dattes	**Blé**
Rendement en quintal	75	25
Prix de vente /quintal	60	60
Main-d'œuvre nécessaire (en nombre d'ouvriers)	1	2
Frais d'exploitation (salaire non compris)	3500	300
Eau nécessaire pour irriguer	14000 m3/an	6000 m3/an

Les salaires annuels sont dans tous les cas de 500 DA/ an et par personne.

- Les disponibilités des différents facteurs de production sont les suivants :

Terre : 900 ha, main-d'œuvre 1200 ouvriers agricoles, eau : 14000 000 m3/ an

La question : Modéliser ce problème sous forme d'un problème linéaire

Conclusion

La recherche opérationnelle constitue un outil fondamental d'aide à la décision, permettant de modéliser et d'analyser de manière rigoureuse des situations complexes rencontrées dans les organisations. Parmi ses principales méthodes, la programmation linéaire occupe une place centrale en offrant un cadre mathématique structuré pour formuler des problèmes de décision, à travers l'identification des variables de décision, la définition d'une fonction objectif et l'établissement de contraintes linéaires.

La programmation linéaire est une méthode essentielle de la recherche opérationnelle car elle permet de modéliser des problèmes en programme. Cette formulation ou modélisation passe en premier lieu par l'identification d'un ensemble de variables appelé des variables de décision. Une fonction d'objectif qui représente l'objectif de la situation (maximum ou minimum), en terminant par la formulation mathématique des contraintes linéaires à respecter. La programmation linéaire offre un cadre mathématique rigoureux pour prendre des décisions optimales dans des contextes où les ressources sont limitées et les relations entre les variables sont linéaires.

Cette méthode constitue la base des chapitres suivants qui aborderont les méthodes de résolutions, telles que la méthode graphique ou la méthode du simplexe.

Chapitre II : La Résolution Graphique d’un Programme Linéaire

Chapitre II : La résolution graphique d'un programme linéaire

Introduction

Après avoir formulé mathématiquement un problème sous forme de programme linéaire, il est important de déterminer les valeurs des variables qui constituent la solution optimale. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un programme linéaire et obtenir cette solution.

Parmi ces méthodes, la méthode graphique est l'une des plus simples. Elle permet de déterminer la solution optimale d'un programme linéaire et est particulièrement utilisée lorsqu'il y a deux variables de décision.

2.1 Types des solutions

Avant d'entamer les étapes de cette méthode, il est nécessaire de présenter les différents types de solutions. On distingue généralement trois types de solutions :

2.1.1 Solution réalisable ou admissible

Les solutions réalisables correspondent aux valeurs des variables de décision qui respectent l'ensemble des contraintes du problème.

2.1.2 Solution non réalisable ou inadmissible

Les solutions non réalisables correspondent aux valeurs des variables de décision qui ne respectent pas au moins une des contraintes du programme linéaire.

2.1.3 Solution optimale

La solution optimale est la ou les solutions réalisables qui permettent d'atteindre la valeur optimale de la fonction objectif : la plus grande valeur dans le cas d'une maximisation (Max Z), ou la plus petite valeur dans le cas d'une minimisation (Min Z).

2.2 Types des contraintes avec explication économiques

2.2.1 Contraintes saturées

Ce sont les contraintes actives ou contraintes liées pour lesquelles l'égalité est vérifiée :

$$\text{Quantité utilisée} = \text{quantité disponible.}$$

Autrement dit, il ne reste aucune ressource inutilisée ; la ressource disponible est entièrement consommée.

2.2.2 Contraintes non saturées

Ce sont les contraintes non actives pour lesquelles l'inégalité est vérifiée :

$$\text{Quantité utilisée} < \text{Quantité disponible.}$$

Autrement dit, il reste une partie des ressources ; la ressource disponible n'est pas totalement utilisée.

2.3 Exemple explicatif

Exercice 2-1 :

Résoudre le PL suivant par la méthode graphique :

a) $MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-1 :

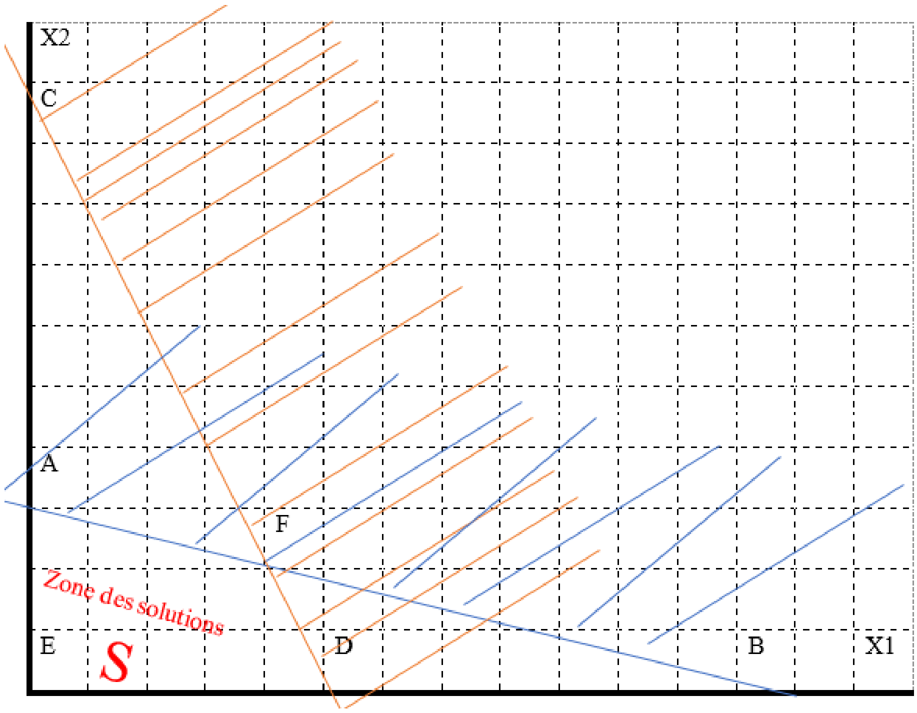
La première étape c'est de transformé les inégalités vers des équations ($\leq ou \ \geq vers \ =$)

$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

On doit tracer les lignes des équations,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0,3); B(12,0) \\ C(0,10); D(5,0) \end{cases}$$

Connaitre le côté qu'on doit éliminer, on base sur l'opération de l'inégalité, si on a $\leq$ donc on garde le côté inférieur et on élimine le côté supérieur. Si on a $\geq$ donc on garde le côté supérieur et on élimine le côté inférieur.



De plus pour connaitre la zone à barré, on sélectionne un point dans l'espace, et on remplace les cordonnées dans les contraintes et on cherche, s'il confirme l'inégalité, on garde le côté ou il y a le point et on barre l'autre côté, sinon on barre le côté et on garde l'autre. Généralement, on sélectionne l'axe (0,0).

La zone des solutions c'est la zone EAFD

2.3.1 La sélection de la solution optimale :

Pour connaitre la solution optimale, il y a deux méthodes :

A- <u>La méthode des sommets</u>

Cette méthode vise à remplacer les cordonnées des tètes du sommets (polygone EAFD) dans la fonction d'objectif et prendre celle qui confirme la fonction d'objectif.

La solution optimale :

E (0,0)➔Max Z= 0

À (0,3)➔Max Z= 6

F (4,2)➔Max Z= 16

D (5,0)➔Max Z= 15

La solution optimale c'est la solution réalisable qui confirme la fonction d'objectif, et parce que la fonction d'objectif est Max Z, donc on prend le point qui nous donne un Max Z. Pour cela, la solution optimale c'est (4,2) avec Max Z=16.

<u>La méthode de la droite d'isovaleur</u>

La droite d'isovaleur (appelée aussi droite d'iso-profit ou droite d'isocoûts), c'est la droite qui représente toutes les combinaisons de variables qui donnent la même valeur à la fonction d'objectif.

On a : $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

La droite d'isovaleur est définie par l'ensemble des points (x_1x_2) satisfaisant :

$c_1x_1 + c_2x_2$ = A (avec A : une constante)

Cette droite peut être réécrite sous forme explicite :

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{A}{c_2}$$

Sa pente est donc $-\frac{c_1}{c_2}$ et son ordonnée a l'origine dépend de A

Pour notre exemple :

$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

La pente c'est -3/2

Pour tracer la droite d'isovaleur, on donne une valeur arbitraire à Z, par Z=12, après on calcule les cordonnées qui confirme cette valeur.

$3x_1 + 2x_2 = 12$=> les cordonnées (x_1, x_2) peuvent être (4,0) ; (0,6) ; (2,3)

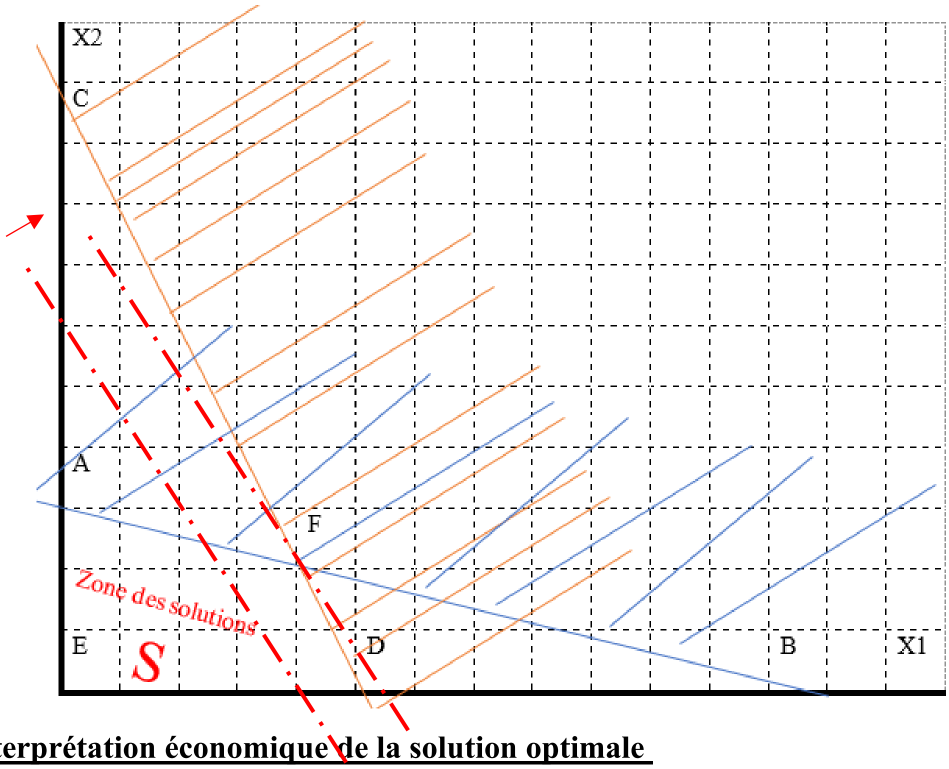
La droite d'isovaleur c'est la droite en ligne rouge pointiez.

Pour trouver la solution optimale dans il suffit que :

- Dans le cas de Max Z, on déplace la droite parallèlement dans le sens d'augmentation de A
- Dans le cas de Min Z, on déplace la droite parallèlement dans le sens contraire.

La solution optimale, c'est le dernier point admissible touché par la droite avant de quitter la région des solutions réalisable.

Dans notre exemple, on trouve selon la figure suivante que le dernier point touché par la droite d'isovaleur avant de quitter la zone des solutions réalisable c'est le point F (4,2)



Interprétation économique de la solution optimale

En respectant les contraintes, pour avoir la Max de profit qui égale a 16 , il faut produire 4 unités du produit représenté par la variable $x_1$et 2 unités du produit représenté par la variable x_1.

Exercice 2-2:

Résoudre le PL suivant par la méthode graphique :

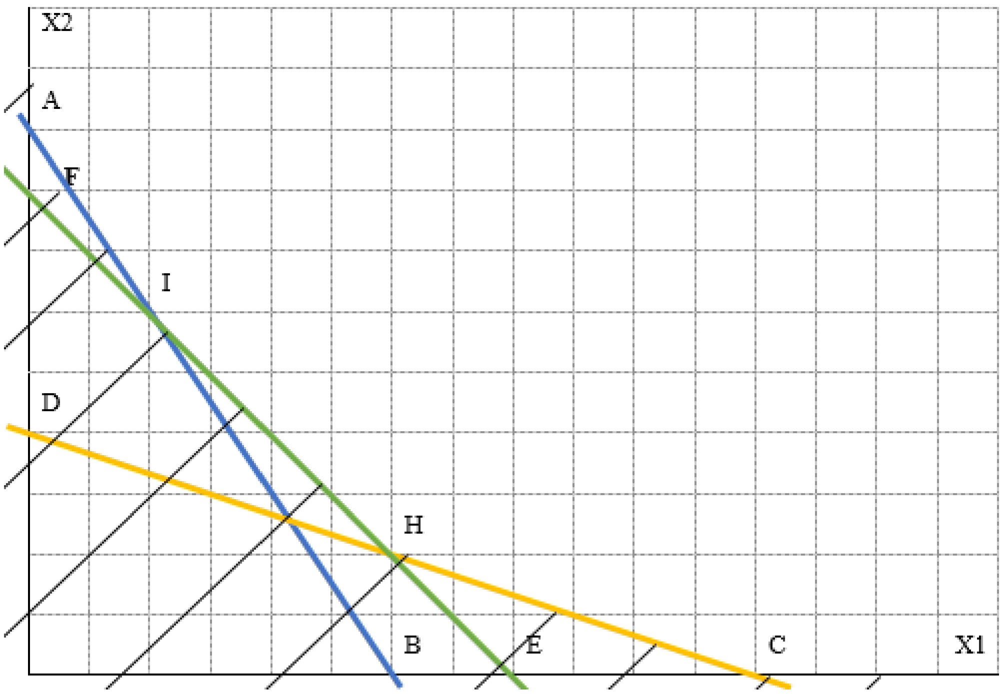
b) $MinZ = 6x_1 + 9x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-2:

$$MinZ = 6x_1 + 9x_2$$

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{array} \rightarrow \begin{cases} A(0,9)\,;B(6,0) \\ C(12,0)\,;D(0,4) \\ E(0,8)\,;F(8,0) \end{cases}$$



La zone des solutions : AIHC

À (0,9)➔Min Z= 81

I (2,6)➔ Min Z= 66

H (6,2)➔ Min Z= 54→ solution optimale unique

C (12,0)➔ Min Z= 72

2.4 Différents cas

2.4.1 Illimité de solution dans un segment

Exercice 2-3:

Résoudre le PL suivant par la méthode graphique :

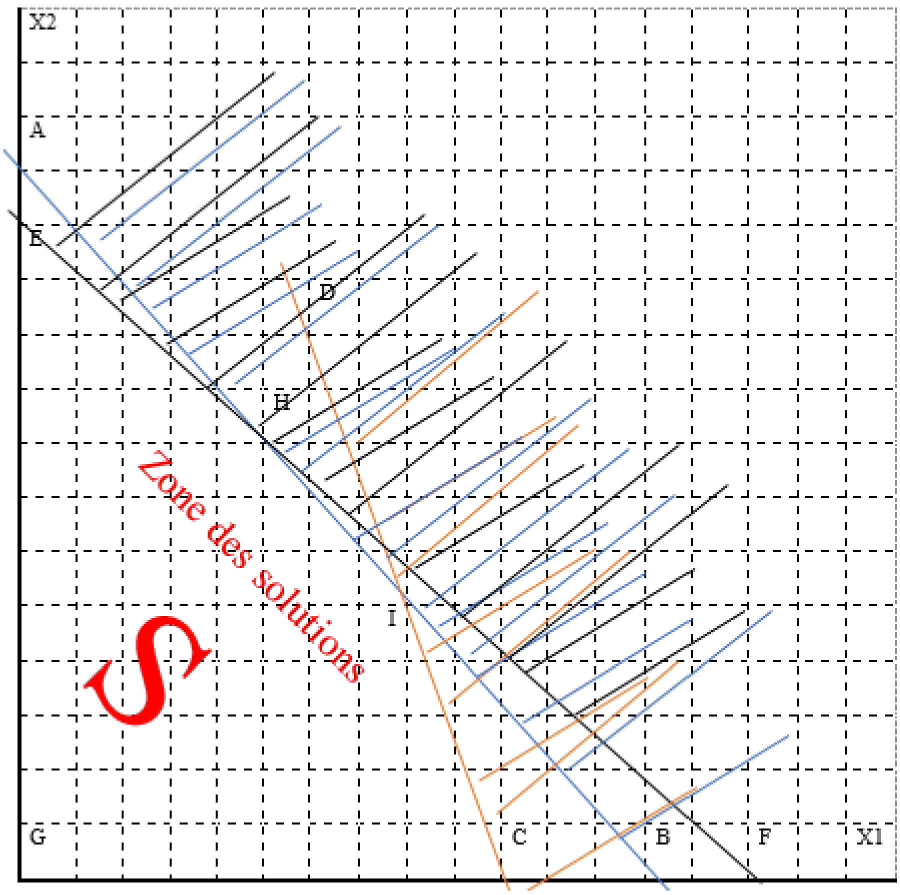
c) $MaxZ = 4x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1;\ x_2 \geq \end{cases}$$

Solution 2-3:

$MaxZ = 4x_1 + 4x_2$

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 13 \\ 5x_1 + 2x_2 = 50 \\ 4x_1 + 5x_2 = 60 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A(0,13)\,;B(13,0) \\ C(10,0)\,;D(6,10) \\ E(0,12)\,;F(15,0) \end{cases}$$



La zone des solutions : GEHIC

G (0,0)➔Max Z= 0

E (0,12)➔ Max Z= 48

H (5,8)➔ Max Z= 52

I (8,5)➔ Max Z= 52

C (10,0)➔ Max Z= 40

On trouve qu'il y a de deux points dans le même segment qui est le [HI] donne la plus grande valeur pour la fonction d'objectif Z. Dans cette situation, on dit que la solution optimale est « infinité de solutions optimal » dans le segment [HI] avec Max=52

Pour confirmer l'illimité de solution, on peut utiliser la fonction suivante pour ressortir les solutions optimales : $Xopt_n = \alpha Xopt_1 + (1-\alpha)Xopt_2$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$

Exemple : on donne une valeur pour α et on calcule la nouvelle solution., et avec chaque α, il y aura une nouvelle solution optimale.

Exemple : $\alpha = 0{,}3$

$$Xopt_n = 0.3 * \binom{5}{8} + (1-0.3) * \binom{8}{5} = \binom{0.3*5}{0.3*8} + \binom{0.7*8}{0.7*5} = \binom{1.5}{2.4} + \binom{5.6}{3.5} = \binom{7.1}{5.9}$$

Pour vérifier, Max Z= 4*7.1+ 4*5.9=52

2.4.2 Situation non bornée

Exercice 2-4:

Résoudre le PL par la méthode graphique :

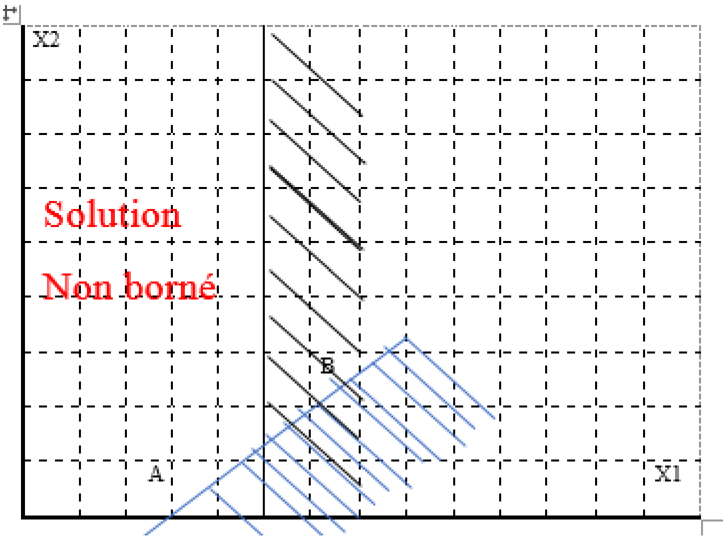
d) $MaxZ = -2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-4:

$MaxZ = -2x_1 + 3x_2$

$$\begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ x_1 = 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A(3,0)\,;B(6,2) \\ droite \end{cases}$$



Solution non-borné veux dire on ne peut pas énumérer la solution optimale, parce que dans le cas de Maximum, on chercher les solutions dans le haut (le cas minimum, on cherche les solutions dans le bas), et parce que la zone des solutions et ouverte dans le haut ; il n'y a pas une limite de la zone qui nous aide à énumérer la solution dans la maximisation). Dans cette situation, on dit que la solution est non bornée.

2.4.3 Situation de Pas de solution

Exercice 2-5:

Résoudre le PL par la méthode graphique

e) $MinZ = 3x_1 + 2x_2$

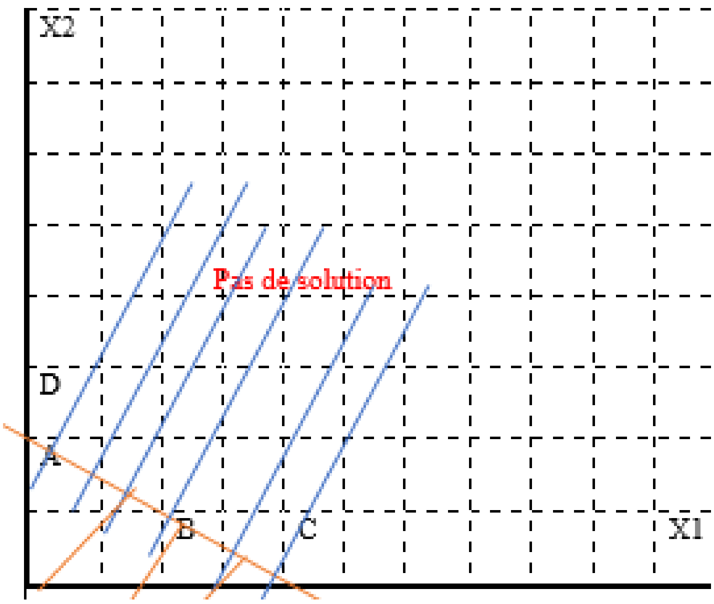
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 - 4x_2 \leq -8 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-5:

$MinZ = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 = -8 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A(0,1)\,;B(2,0) \\ C(4,0)\,;D(0,2) \end{cases}$$

Dans cette situation, on trouve il n'y a pas une zone de solution,



2.4.4 Solution optimale unique

Exercice 2-6:

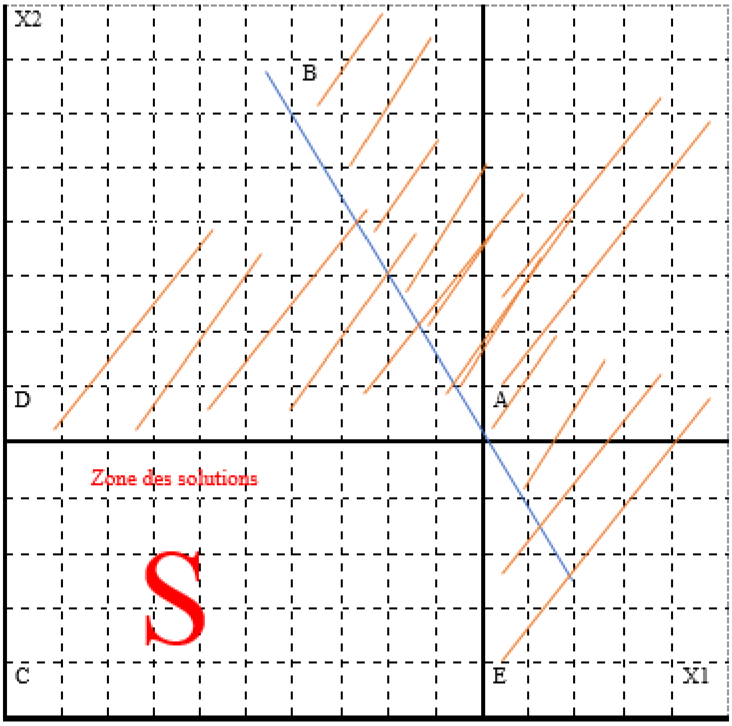
f) $MaxZ = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-6:

$MaxZ = x_1 + x_2$

$$\left.\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 40 \\ x_1 = 10 \\ x_2 = 5 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{cases} A(10{,}5)\,;B(6{,}11) \\ droite \\ droite \end{cases}$$



La zone des solutions CDAE

La solution optimale :

C (0,0)➔Max Z= 0

D (0,5)➔Max Z= 5

A (10,5)➔Max Z= 15 → la solution optimale

E (10,0)➔Max Z= 10

Exercice 2-7:

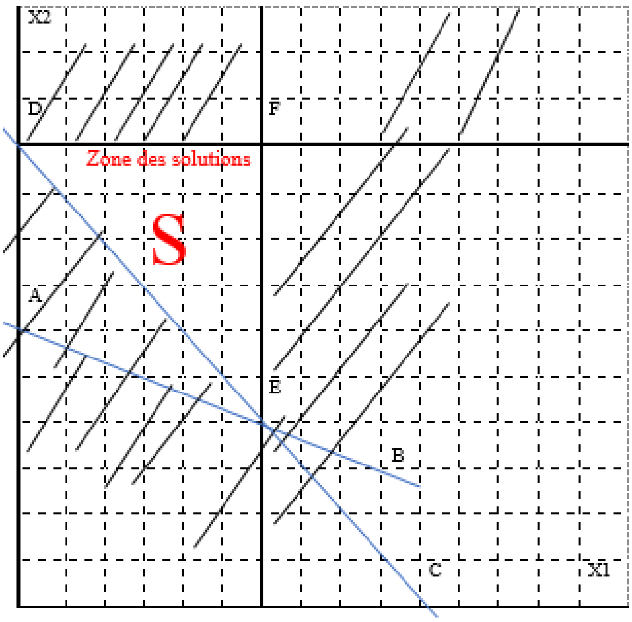
g) $MaxZ = 10\,x_1 + 5\,x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 36 \\ 5x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-7:

$MaxZ = 10x_1 + 5x_2$

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 + 6x_2 = 36 \\ 5x_1 + 5x_2 = 50 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \end{matrix}\right. \rightarrow \begin{cases} A(0{,}6)\,;B(9{,}3) \\ C(10{,}0), D(0{,}10) \\ droite \\ droite \end{cases}$$



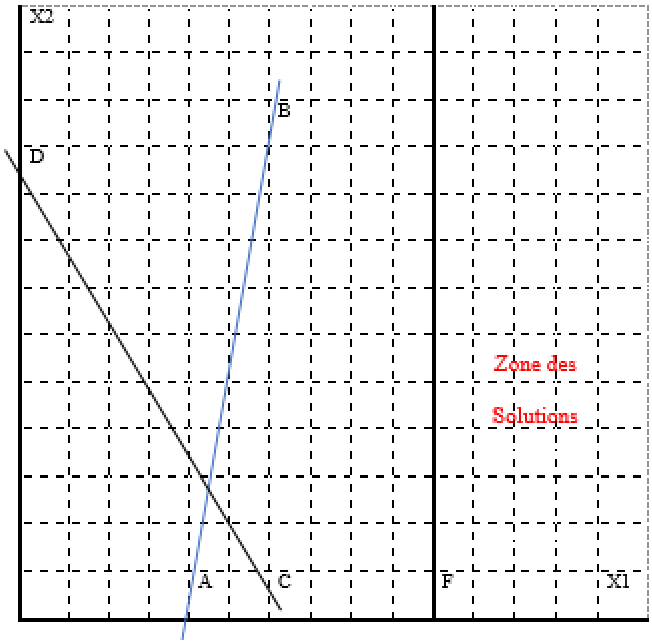
La zone des solutions DFE

D (0,10)➔Max Z= 50

F (6,10)➔ Max Z= 110 →solution optimale

E (6,4)➔Max Z= 80

Exercice 2-8:



h) $Min\ Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 2-8:

$$MinZ = x_1 + x_2$$

$$\begin{matrix} 5x_1 - x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 = 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} A(2,0)\ ; B(3,5) \\ C(3,0)\ ; D(0,9/2) \\ droite \end{cases}$$

Solution optimale F(5,0)→Min Z= 5

2.5 Analyse du Post-optimale

2.5.1 Définition

L'analyse post-optimale, est appelée aussi analyse de sensibilité, elle consiste à étudier l'effet des modifications des paramètres du modèle (coefficient de la fonction d'objectif, coefficients du système des contraintes) sur la solution optimale déjà obtenue, sans rerésoudre entièrement le programme linéaire.

Selon Winston, l'analyse de sensibilité permet d'évaluer la robustesse de la solution optimale face à l'incertitude ou aux changements de données du modèle(Winston, 2003).

2.5.2 L'objectif de l'analyse post-optimale

L'analyse post-optimale est essentielle dans la prise de décision, car elle permet d'adapter les réponses sans tout recalculer, ce qui représente un gain en temps et en efficacité(Taha, 2017).

Parmi les objectifs de l'analyse post-optimal, on trouve :

- Vérifier la stabilité de la solution optimale,
- Déterminer dans quelles limites un paramètre peut varier sans affecter la solution
- Aider le décideur à anticiper les conséquences de scénarios économiques ou techniques.

2.5.3 Les situations de l'analyse post optimale

L'analyse du post optimale peut être appliquée dans les cas suivantes :

a- Changement du coefficient dans la fonction d'objectif comme l'augmentation du profit ou des coûts et on vérifie si le point optimal reste le même ou non.

b- Modification du second membre (ressources disponible) et on vérifie si la nouvelle contrainte est toujours respectée par la solution actuelle.

c- Ajouter ou supprimer une contrainte peut restreindre ou élargir la zone de solution donc peut influencer la solution

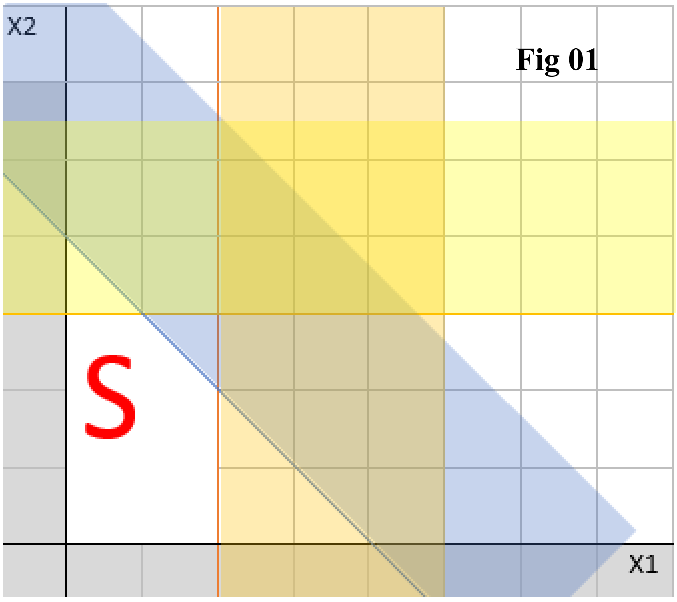
2.5.4 Exemple explicatif

$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

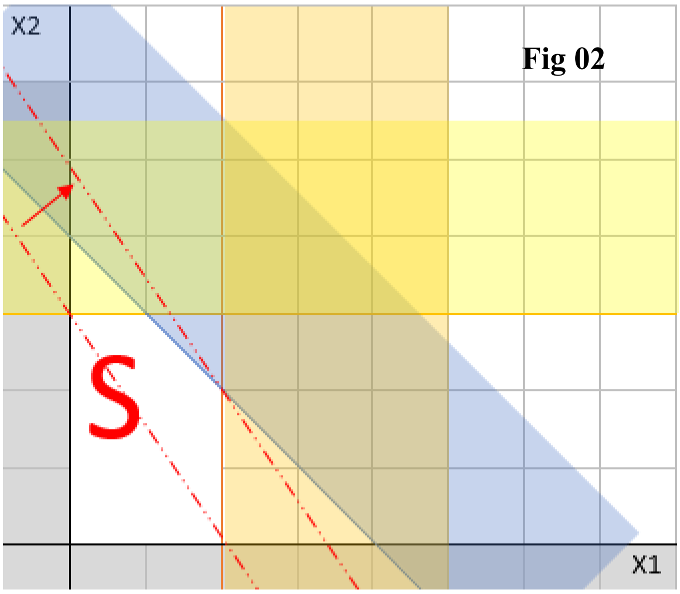
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution graphique :

S c'est la zone des solutions (Fig 01), en utilisant la droite d'isolateur,



On trouve que la solution optimale c'est le point (2,2) avec Max Z= 10 (Fig 02)

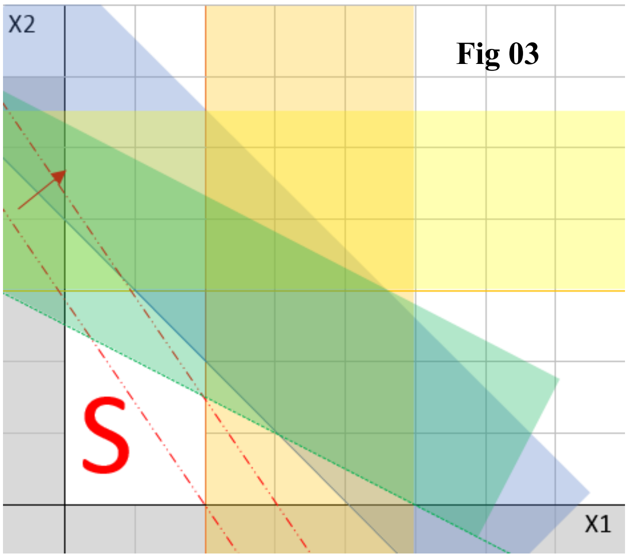


Apres l'ajout d'une contrainte :

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

La solution optimale c'est trouvé ne confirme pas cette contrainte, donc il y aura une autre solution optimale.

La nouvelle résolution graphique (Fig 03):



En utilisant la droite d'isovaleur, la solution optimale devient le point $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ avec max Z=9

En comparant entre la première solution optimale et la deuxième, on trouve qu'il y a une réduction dans le bénéfice car la deuxième contrainte créer des nouvelles conditions dans le programme linéaire.

2.5.5 Exercices

Exercice 2-9:

Résoudre le programme linéaire suivant par **la méthode graphique** :

$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2-10:

Résoudre le programme linéaire suivant par **la méthode graphique** :

$MaxZ = 4x_1 + 2x_2$

$3x_1 + 2x_2 \geq 06$

$x_1 + 3x_2 \leq 18$

$-x_1 + x_2 \geq 04$

$x_1, x_2 \geq 0$

Exercice 2-11:

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode graphique :

$MaxZ = 18x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 \geq -06 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$x_1; x_2 \geq 0$

2.5.6 Solution d'exercices

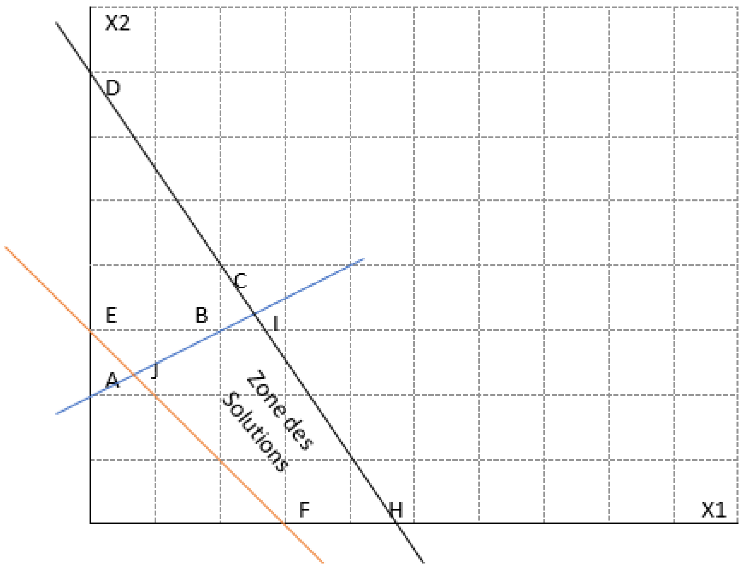
Solution 2-9:

$MaxZ = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0,2); B(2,3) \\ C(2,4); D(0,7) \\ E(0,3); F(3,0) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique :

Le graphe



La solution optimale :

F (3,0) ➔Max Z= $3 * 3 + 2 * 0$ = 9

H (14/3, 0) ➔Max Z= **14**

I(?,?)➔$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 14 \end{cases}$

x_1 = 5/2➔x_2=13/4

I(5/2,13/4)➔ Max Z= $3 * \frac{5}{2} + 2 * \frac{13}{4}$= 15/2+26/4= **14**

J(?,?)➔$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

x_2 =7/3 ➔$x_1 = 2/3$

J(2/3,7/3)➔ Max Z= $3 * \frac{2}{3} + 2 * \frac{7}{3}$= 20/3

La solution optimale : infinité de solution dans le segment [HI] avec Max Z= 14

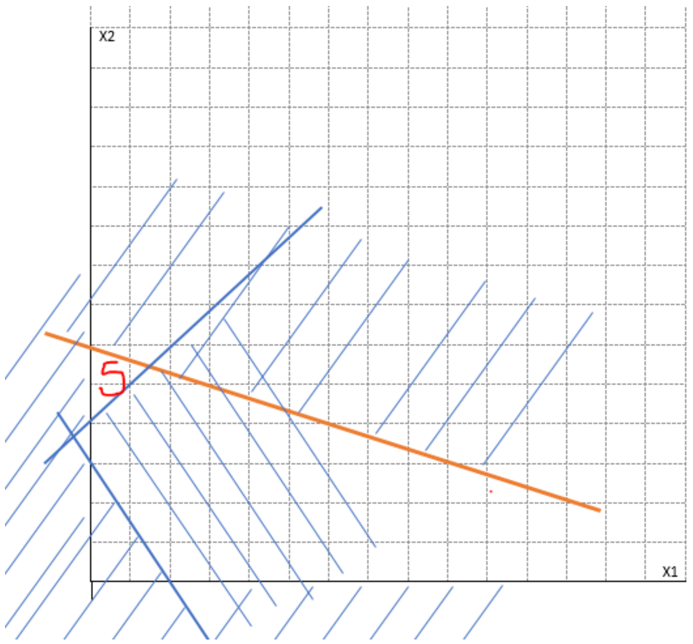
=(14/3, 0) * 0.3 + (5/2, 13/4) * 0.7 = (1,4 ; 0)+ (3.5/2 ; 9,1/4) = (6.3/2 ; 9.1/4)

Max Z = 3* 6.3/2 + 2 * 9.1/4 = 9.45 + 4.55 = 14

Solution 2-10:

Fonction	X1	X2	X1	X2
$3x1 + 2x2 = 06$	2	0	0	3
$x1 + 3x2 = 18$	6	4	0	6
$-x1 + x2 = 04$	0	4	1	5

Le graphe



La zone des solution S.

La solution optimale :

E(0 ; 4) ➔ max Z= 8

D(0 ;6)➔ max Z = 12

F(?, ?) ➔

$\begin{cases} x1 + 3x2 = 18 \\ -x1 + x2 = 04 \end{cases}$ $==> 4x2 = 22$ => x2=5,5 ; x1= 1,5

F (1,5 ; 5,5) ➔max Z= 17

F (1,5 ; 5,5) ➔max Z= 17 ➔ la solution optimale

Solution 2-11:

$$\boldsymbol{MaxZ = 18x_1 + 4x_2}$$

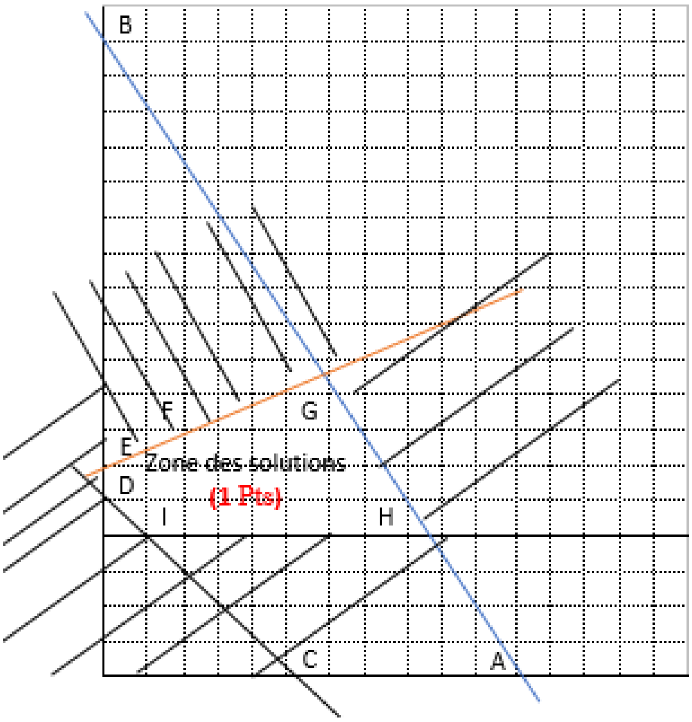
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ x_1 - 2x_2 \ge -06 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = -06 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(6{,}0); B(0{,}9) \\ C(2.5{,}0); D(0{,}2.5) \\ E(0{,}3); F(1{,}3.5) \\ x_2 = 2\ deroite \end{cases}$$

Résolution graphique :

Le graphe



La zone des solutions : IDEGH

La solution optimale :

I (1/2,2) ➔Max Z= 18∗ $1/2 + 4 * 2$ = 17

D (0, 2.5) ➔Max Z= $18 * 0 + 4 * 2.5$=10

E(0,3)➔ Max Z= $18 * 0 + 4 * 3$=12

G(?, ?)➔$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$

x_1 = 3➔x_2=9/2

G(3,9/2)➔ Max Z= $18 * 3 + 4 * 9/2$= 18+18= 72

H(?,?)➔ $\begin{cases} x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$➔$x_1 = \frac{14}{3}$

Max Z= 18 * 14/3 + 4 * 2= 92

La solution optimale : c'est H (14/3, 2) avec Max Z= 92

Exercice 2-12

Un petit atelier possède une machine automatique pouvant opérer durant un maximum de 7,5 heures par jour. Avec cette machine on veut fabriquer des chevilles et des boulons et on croit que le marché peut absorber toute la production. Toutefois, du a un manque de matière première, la fabrication des chevilles est réduite à un maximum de 1000 unités par jour. De plus, on considère qu'au moins 600 unités de chaque élément doivent être fabriquées. Les données concernant le taux de production, les couts et les prix de vente sont indiqués dans le tableau suivant :

Produits	Taux de production (Unités/Heure)	Couts-matériel (Dinars/Unité)	Main d'œuvre Dinars/Unité	Prix de vente Dinars/Unité
Cheville	300	0.03	3.00	0.08
Boulon	200	0.035	3.00	0.10

Le responsable de l'unité de production veut maximiser les bénéfices.

1. Formuler ce problème sous forme d'un modèle linéaire.
2. Résoudre ce problème par la méthode graphique.
3. Est-ce que la machine automatique est utilisée la pleine capacite ?
4. Si le prix de vente d'un boulon est de 0,11 DA au lieu de 0,10 DA, quelle conséquence aura ce changement sur le programme optimal de fabrication ?
5. Avec cette modification du prix de vente des boulons spécifique en 4), le responsable de l'atelier suggère de fabriquer 1 000 boulons et autant de chevilles. Que pensez-vous de cette suggestion ? Expliquer.

Solution 2-12:

1- Formulation du problème :

Les variables de décision :

- $x_1: nombre\ de\ chevilles\ à\ fabriquer\ par\ jour;$
- $x_2: nombre\ de\ boulons\ à\ fabriquer\ par\ jour.$

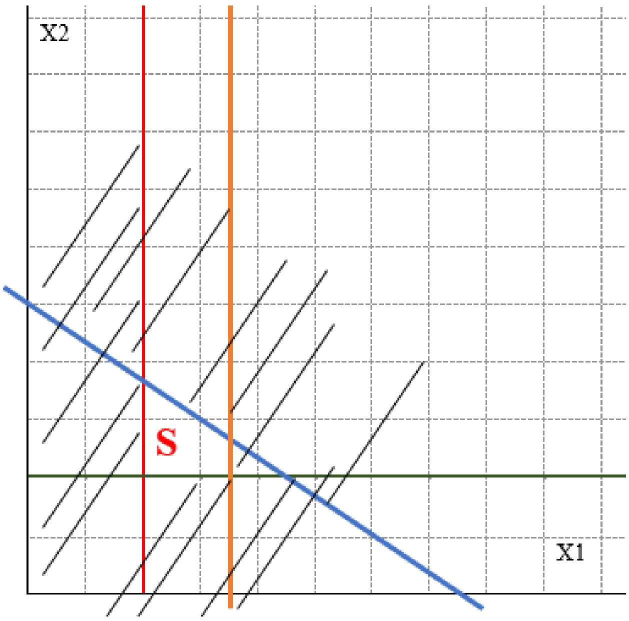
$$\begin{cases} Max\ Z = 0.04x_1 + 0.05x_2\ (maximiser\ le\ avec\ bénéfice) \\ bénéfice = prix\ de\ vente - coût.matériel - coût.MO \\ \frac{1}{300}x_1 + \frac{1}{200}x_2 \leq 7.5\ (contrainte\ de\ capacité\ de\ la\ machine) \\ x_1 \leq 1000 \\ x_1 \geq 600 \\ x_2 \geq 600 \\ x_1; x_2 \geq 0\ (contraintes\ de\ non\ négativité) \end{cases}$$

2- Résolution du problème par la méthode graphique :

3- La résolution graphique nous donne la solution optimale $X^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(1000, \frac{2500}{3}\right)$ avec Z^* =245/3 da.

4- L'unité de production fonctionne en pleine capacité, car $\frac{1}{300} * 1000 + \frac{1}{200} * \frac{2500}{3} = 7.5$.

Le graphe



5- Après cette augmentation du prix de vente des boulons, la fonction objectifs devient : $Max\ Z = 0.04x_1 + 0.06x_2$.

Graphiquement, on peut facilement vérifier que le programme linéaire admet une infinité de solutions $\forall y = \alpha A + (1-\alpha)\beta$ Avec $0 \leq \alpha \leq 1$ est une solution optimale avec $Z(y) = 90\ ou\ A = (1000, \frac{2500}{3})$ et $B = (600{,}1100)$

6- Cette proposition n'est pas réalisable car la contrainte de capacité n'est pas vérifiée :

$\frac{1}{300} * 1000 + \frac{1}{200} * 1000 \nleq 7.5$

2.6 Exercices

Exercice 2-13:

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 en utilisant un certain nombre de ressources : post opératoire (machine), main-d'œuvre et emballage. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantités limitées.

	Heure/machine	**Main d'œuvre**	**Emballage**
P1	3	4	2
P2	9	5	1
Ressource disponible	81	55	20

Les deux produits P1 et P2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 600 DA et 400 DA par unité.

1. Formuler le problème de programmation linéaire.
2. Résoudre ce problème par la méthode graphique.
3. Est-ce que le post opératoire est utilisé à plein temps ?

4. Est-ce que le stock de l'emballage est totalement consommé ?

Exercice 2-14:

Résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants :

Max Z= $3x_1+2x_2$ $\begin{cases} x_1+4x_2 \leq 12 \\ 2x_1+x_2 \leq 10 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	Min Z= $6x_1+9x_2$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2 \geq 18 \\ x_1+3x_2 \geq 12 \\ x_1+x_2 \geq 8 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	Max Z= $4x_1+4x_2$ $\begin{cases} x_1+x_2 \leq 13 \\ 5x_1+2x_2 \leq 50 \\ 4x_1+5x_2 \leq 60 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$
Max Z= -$2x_1+3x_2$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	Min Z= $3x_1+2x_2$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \leq 2 \\ -2x_1-4x_2 \leq -8 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	Max Z= x_1+x_2 $\begin{cases} 3x_1+2x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$
Max Z= $10x_1+5x_2$ $\begin{cases} 2x_1+6x_2 \geq 36 \\ 5x_1+5x_2 \geq 50 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	Min Z= x_1+x_2 $\begin{cases} 5x_1-x_2 \geq 10 \\ 3x_1+2x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1;x_2 \geq 0 \end{cases}$	

Conclusion

La résolution graphique d'un programme linéaire constitue une approche concrète de la programmation linéaire, s'inscrivant dans le prolongement de l'initiation à la recherche opérationnelle. Elle permet de modéliser un problème formulé sous forme de programme linéaire, de représenter graphiquement les contraintes et d'identifier ainsi la région des solutions réalisables ainsi que la solution optimale. Cette résolution peut être effectuée à l'aide de deux méthodes principales : la méthode des sommets et la méthode de la droite d'isovaleur.

Bien que cette méthode soit limitée aux problèmes comportant deux variables de décision, la résolution graphique offre une base solide pour comprendre et maîtriser les principes fondamentaux de la recherche opérationnelle. Elle permet notamment d'apprendre à résoudre un programme linéaire à deux variables et à déterminer graphiquement la solution optimale.

Chapitre III : La Méthode du SIMPLEXE

Chapitre III : La méthode du SIMPLEXE

Introduction

La méthode du simplexe est une méthode développée en 1947 par George Dantzig (Fabian Bastin, 2010, p. 16). Elle demeure aujourd'hui une méthode de référence pour la résolution de problèmes d'optimisation linéaire de grande taille. Il s'agit d'une méthode algébrique fondée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires. Dans ce cadre, on s'intéresse aux systèmes comportant un nombre n de variables supérieur ou égal au nombre m d'équations. La méthode du simplexe est considérée comme l'un des premiers algorithmes permettant de minimiser ou de maximiser une fonction objective sur un ensemble défini par des inégalités. Pendant longtemps, et encore aujourd'hui dans de nombreux contextes, l'algorithme du simplexe a été la méthode la plus utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation linéaire.

3.1 L'algorithme du Simplexe

L'algorithme du simplexe repose sur un processus itératif permettant de résoudre un problème d'optimisation linéaire sous contraintes. Il consiste à passer d'une solution de base admissible à une autre, dans le but d'améliorer progressivement la valeur de la fonction objectif.

3.1.1 Les étapes de l'algorithme du SIMPLEXE

3.1.1.1 Mettre le problème sous forme canonique

Cette étape permet de vérifier si le PL est bien écrit dans la forme canonique ou non.

La forme canonique globale du programme linéaire est écrite dans la forme suivante :

$$(forme - canonique)\begin{cases} MaxZ = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ , } \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

Il faut s'assurer que le problème linéaire est bien écrit sous la forme canonique.

3.1.1.2 La forme standard

Pour appliquer la méthode SIMPLEXE, le problème doit être mis sous forme standard. Pour passer de la forme canonique vers la forme standard, on ajoute des variables appelées des variables d'écart s_i.

$$(forme - standard)\begin{cases} MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i \ , \forall i = 1, \dots, m \\ x_j, s_i \ \geq 0 \end{cases}$$

Avec : x_j: *les variables de decisions* , s_i: *les variables d'ecart*

Le principe de la transformation c'est de transformer les inégalités vers des équations en ajoutant des variables qui couvre l'écart entre le côté gauche et le coté droite.

3.1.1.3 Solution de base

Il s'agit de la solution obtenue en fixant toutes les variables indépendantes à zéro. Nous qualifierons de variables hors base les variables indépendantes fixées à zéro. Les autres variables seront dites variables de base. Une solution de base est réalisable (ou admissible) lorsque toutes les variables de base ont une valeur positive. Une solution de base réalisable est dégénérée lorsqu'au moins une variable de base a la valeur 0. Il est possible de montrer qu'une solution de base réalisable est un sommet du polyèdre (Fabian Bastin, 2010, p. 17).

3.2 **Situation 01 : Cas de Maximisation (tous les contraintes ≤ 0)**

La forme globale du programme linéaire :

$$(forme - canonique)\begin{cases} MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \ \ \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

3.2.1 Cas 1 : Solution optimale unique

<u>Exemple explicatif :</u>

Max Z = 70 x_1+40 x_2 +60 x_3

Soumise aux contraintes

$4x_1+2x_2+4x_3 \leq 1000$

$2x_1+2x_2+x_3 \leq 800$

$x_1+3x_2+x_3 \leq 400$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$

Question : résoudre le P.L par la méthode simplex

3.2.1.1 La forme standard

La solution :

1- La forme standard :

On transforme le programme linéaire de la forme mixte vers la forme standard, afin d'obtenir un modèle ne comportant que des équations. Ensuite, on introduit des variables d'écart dans chaque équation afin de représenter l'écart entre les deux côtés de l'égalité.

La forme mixte		*La forme standard*
$Max\ Z = 70\,x_1+40\,x_2+60\,x_3$		$Max\ Z = 70\,x_1+40\,x_2+60\,x_3+0S_1+0S_2+0S_3$
Soumise aux contraintes		*Soumise aux contraintes*
$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+S_2=800 \\ x_1+3x_2+x_3+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1+0S_2+0S_3=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+0S_1+S_2+0S_3=800 \\ x_1+3x_2+x_3+0S_1+0S_2+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$

La méthode du simplexe est basée sur la construction de tableaux successifs. À cet effet, l'élaboration de ces tableaux suit les étapes suivantes :

3.2.1.2 Le 1er tableau du Simplexe

Le tableau doit contenir toutes les informations de notre PL qui sont :

- Les variables de décisions (x_1, x_2, x_3)

- Les variables d'écart (S_1, S_2, S_3)

- Les valeurs des paramètres des variables représenter par Cj

- Les ressources disponibles (citer dans le tableau par ***B rayon***)

L'élaboration du tableau est comme suite :

- Les deux premières colonnes contiennent les variables d'écarts avec leurs paramètres dans la fonction d'objectif.

- Les deux premières lignes contiennent toutes les variables (décision + écart) da la fonction d'objectif,

- Les cellules du tableau contiennent les paramètres des variables dans les contraintes,

- L'avant dernière colonne (***B rayon)*** contienne les valeurs des ressources disponibles

- L'avant dernière colonne $Z_j = \sum C_j\, x_j$ (la somme des résultats de la multiplication entre valeur de la première colonne multiplier par les valeurs dans la colonne de la variable)

Exemple :

Pour $x_1=0*4+0*2+0*1=0$

- La dernière ligne $Z = C_j - Z_j$ (la différence entre la première et l'avant dernière ligne)

Exemple : pour x_1= 70 - 0 = 70

C_j → ↓		70	40	60	0	0	0	**B rayon**	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	4	2	4	1	0	0	1000	1000/4 = 250
0	S_2	2	2	1	0	1	0	800	800/2 = 400
0	S_3	1	3	1	0	0	1	400	400/1 = 400
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	$Z = \sum C_j B_{rayon} = 0$	
$Z = C_j - Z_j$		70	40	60	0	0	0		

3.2.1.3 Les critères de sélection :

Pour sélectionner la variable entrante qui est appelée aussi la variable de la colonne de pivot, on suit les étapes suivantes :

- La sélection de la colonne du pivot qui représente la ligne de la variable entrante : c'est la colonne avec la plus grande valeur positive de ***Z*** (la dernière ligne) $\{\max(c_j - z_j)\ \text{avec}(c_j - z_j) \geq 0\}$ (donc on sélectionne la colonne avec Z= 70, c'est la colonne de la variable x_1 qui va remplacer la variable de la ligne du pivot S_1 dans le deuxième tableau.

- Calculer le **R_i = B rayon/colonne du pivot**

- **Exemple :** 1000/4 = 250

- La sélection de la ligne de pivot qui représente la ligne de la variable sortante : c'est la ligne avec la petite valeur positive de R_i (la dernière colonne) $\{MinR_i, avec\ R_i \geq 0\}$. Dans notre cas , $MinR_i = \{250, 400, 400\}$=250 ➔ donc la variable sortante c'est la variable S_1

3.2.1.4 Les cas exceptionnels

1- Dans le cas où le coefficient dans la colonne entrante est négatif ou nul, la ligne n'entre pas en compte dans le calcul du minimum

- Dans le cas les coefficients de la variable entrante sont tous négatifs ou nuls ou filent à l'infini, il n'y aura ni variable entrante, ni variable sortante ; donc dans cette situation on parle de problème non borné.

- Dans le cas ou plusieurs variables sont candidates à entrer dans la base, c-à-d que le maximum est atteint pour plusieurs variable hors bases, on applique la règle de blond qui dit « on choisis comme variable entrante celle d'indice i le plus petit (la plus gauche) ». C'est la même chose pour les variables sortantes, s'il y a plusieurs variables candidates pour quitter la base, c.-à-d. que le minimum est atteint dans plusieurs variables de base, on choisit comme variable sortante celle d'indice i le plus petit (la plus haute)

3.2.1.5 La valeur du pivot

- **Le pivot :** c'est le chiffre dans la case en commun entre la ligne du pivot et la colonne du pivot. Dans le premier tableau, le pivot c'est 4

- **Calculer le Z :** $Z = \sum C_j B_{rayon} = 0 * 1000 + 0 * 800 + 0 * 400 = 0$

- On termine les étapes jusqu'as on arrive à l'étape ou toutes les valeurs de la ligne $Z = C_j - Z_j$ sont négative ou nulle.

3.2.1.6 Le 2eme tableau du simplexe

Si le critère d'optimalité $MaxZ \leq 0$ n'est pas confirmé, on doit passer au deuxième tableau.

- On commence par la nouvelle ligne du pivot= $\frac{\text{l'ancienne ligne du pivot}}{\text{pivot}}$

= (4 2 4 1 0 0 1000)/4 = 1 ½ 1 ¼ 0 0 250

- La nouvelle ligne des autres variables qui restent (S_2 et S_1)

Nouvelle $S_2 = \begin{pmatrix} -valeur\ dans\ la \\ colonne\ du\ pivot \end{pmatrix} * (la\ nouvelle\ ligne\ du\ pivot) + ancienne\ ligne$

Exemple :

Nouvelle ligne S_2= -2 * (1 ½ 1 ¼ 0 0 250) + (2 2 1 0 1 0 800)

Nouvelle ligne S_2= 0 1 -1 -½ 1 0 300

C_j → ↓		70	40	60	0	0	0	***B rayon***	R_i
		x_1	↓x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
70	x_1	1	1/2	1	1/4	0	0	250	500
0	S_2	0	1	−1	−1/2	1	0	300	300
0	←S_3	0	5/2	0	−1/4	0	1	150	60
$Z_j = \sum C_j x_j$		70	35	70	70/4	0	0	$Z = \sum C_j B_{rayon} =$ 17500	
$Z = C_j - Z_j$		0	5	−10	−70/4	0	0		

Le critère d'optimalité ($\boldsymbol{Z = (Cj - Zj) \leq 0}$)n'est pas confirmé, donc on n'est pas encore arrivé à la solution optimale, donc on passe au tableau suivant.

On suit les mêmes règles pour le calcul Z_j , Z, R_i et même pour sélectionner la ligne du pivot et la colonne du pivot

Pour le troisième tableau du simplexe, on applique les mêmes règles que celles utilisées pour le deuxième tableau.

$C_j \rightarrow$ ↓		70	40	60	0	0	0	***B rayon***	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
70	x_1	1	0	1	3/10	0	−1/5	220	
0	S_2	0	0	−1	−2/5	1	−2/5	240	
40	x_2	0	1	0	−1/10	0	2/5	60	
$Z_j=\sum C_j x_j$		70	40	70	17	0	2	Z = 17800	
$Z=C_j - Z_j$		0	0	−10	−17	0	−2		

Le critère d'optimalité $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Cj} - \boldsymbol{Zj}) \leq \mathbf{0}$ est confirmé, donc, on est arrivé au dernier tableau. La colonne ***B rayon*** contient les valeurs de la solution optimale. Donc la solution optimale c'est :

Les variables de bases : x_1 **=220 ;** x_2**= 60 ;** S_2**=240 ;**

Les variables hors bases **:** $S_1=S_3=x_3=0$

Max Z= 70*220 + 0*240+40*60=17800

Exemple 2:

La résolution par la méthode Simplex le PL suivant :

$$Max\ Z = 500x_1 + 800x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 90 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard :

$$Max\ Z = 500x_1 + 800x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + S_1 = 50 \\ 10x_1 + 15x_2 + S_2 = 90 \\ x_1;\ x_1; S_1; S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cj		500	800	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	5	10	1	0	50	50/10= 5
0	S_2	10	15	0	1	90	90/15=6
$Zj = \sum CjXj$		0	0	0	0	$Z = 0$	
$Zj = Cj - Zj$		500	800	0	0		

Cj		500	800	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
800	x_2	1/2	1	1/10	0	5	10
0	S_2	5/2	0	-15/10	1	15	6
$Zj = \sum CjXj$		400	800	80	0	$Z = 4000$	
$Zj = Cj - Zj$		100	0	-80	0		

Le critère d'optimalité ($\boldsymbol{Z = (Cj - Zj) \leq 0}$)n'est pas confirmé, donc on n'est pas encore arrivé à la solution optimale, donc on passe au tableau suivant.

Cj		500	800	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
800	x_2	0	1	2/5	-1/5	2	
500	x_1	1	0	-3/5	2/5	6	
$Zj = \sum CjXj$		500	800	20	40	$Z = 4600$	
$Zj = Cj - Zj$		0	0	-20	-40		

Le critère d'optimalité ($\boldsymbol{Z = (Cj - Zj) \leq 0}$)est confirmé, donc la solution optimale c'est : x1= 6, x2= 2, s1=s2=0 avec Max Z= 4600

3.2.2 Cas 2 : La Solution non-bornée

Un programme linéaire est dit non borné (comme on a dit dans la résolution graphique) si son optimum est infini. On reconnait un tel cas, lorsqu'à une itération donnée du simplexe, tous les éléments de la colonne de la variable rentrante sont négatifs ou nuls.

Exemple explicatif :

$MaxZ = 2x_1 + 2x_2$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

La forme standard :

$MaxZ = 2x_1 + 2x_2$

$-x_1 + x_2 + s_1 = 1$

$x_1 - x_2 + s_2 = 1$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

La solution de base : $x_1 = x_2 = 0, s_1 = 1, s_2 = 1, MaxZ = 0$

Tableau 1 :

Cj		2	2	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	-1	1	1	0	1	/
0	S_2	1	-1	0	1	1	1
$Zj = \sum CjXj$		0	0	0	0	$Z = 0$	
$Zj = Cj - Zj$		2	2	0	0		

La variable entrante : $Max\{2,2\}$=1 => on applique la règle de blond, donc on choisit celle d'indice le plus petit x_1 ;

La variable sortante : $Min\{/,1\} = 1$➔ S_2 c'est la variable sortante et la valeur du pivot c'est 1.

Tableau 2 :

Cj		2	2	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	0	0	1	1	2	/
2	x_1	1	-1	0	1	1	/
$Zj = \sum CjXj$		2	-2	0	2	$Z = 0$	
$Zj = Cj - Zj$		0	4	0	-2		

Selon ce tableau, on trouve que tous les coefficients de la variable entrante x_2 sont négative ou nule {0,-1}, donc les valeurs de la colonne Ri seront négative ou à l'infinie. Donc on déduit directement que le problème est non borné

3.2.3 Cas 3 : infinité de solution optimale

Exemple explicatif :

$MaxZ = 8x_1 + 2x_2$

$4x_1 + x_2 \leq 32$

$4x_1 + 3x_2 \leq 48$

$x_1, x_2 \geq 0$

La forme standard :

$MaxZ = 8x_1 + 2x_2$

$4x_1 + x_2 + s_1 = 32$

$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 48$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

La solution de base : $x_1 = x_2 = 0 , s_1 = 32, s_2 = 48, MaxZ = 0$

Tableau 1 :

Cj		8	2	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	4	1	1	0	32	8
0	S_2	4	3	0	1	48	12
$Zj = \sum CjXj$		0	0	0	0	$Z = 0$	
$Zj = Cj - Zj$		8	2	0	0		

La variable entrante : $Max\{8,2\}$=8 => La variable entrante c'est x_1 ;

La variable sortante : $Min\{8,12\} = 8$➔ S_1 c'est la variable sortante et la valeur du pivot c'est 4.

Tableau 2 :

Cj		8	2	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
8	x_1	1	1/4	¼	0	8	32
0	S_2	0	2	-1	1	16	8
$Zj = \sum CjXj$		8	2	0	0	$Z = 64$	
$Zj = Cj - Zj$		0	0	-2	0		

Le critère d'optimalité ($\boldsymbol{Z = (Cj - Zj) \leq 0}$)est confirmé, donc on est arrivé à la solution optimale $x_1 = 8, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$ avec MaxZ=64 mais on remarque que la valeur $\boldsymbol{Z = (Cj - Zj)}$ de $x_2$est nulle, donc on déduit qu'il y a deux sommets optimaux. Pour le déterminer, on sélectionne la variable $x_2$comme variable entrante

La variable sortante : $Min\{32,8\} = 8$=> S_2 c'est la variable sortante

Tableau 3 :

Cj		8	2	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	S_1	S_2		
8	x_1	1	0	3/8	-1/8	6	
2	x_2	0	1	-1/2	1/2	8	
$Zj = \sum CjXj$		8	2	2	0	$Z = 64$	
$Zj = Cj - Zj$		0	0	-2	0		

Le critère d'optimalité (Z = (Cj – Zj)≤0)est toujours confirmé, donc la deuxième solution optimale (deuxième sommet optimal) c'est $x_1 = 6, x_2 = 8, s_1 = 0, s_2 = 0$ avec MaxZ=64.

Alors, on conclut qu'il y a une infinité de solutions optimale. Pour justifier, on applique la même règle de l'infinité de solution optimale dans la résolution graphique :

$$x_{optimale} = \alpha * x_{optimale1} + (1 - \alpha) * x_{optimale2}, \alpha \in [0,1]$$

3.2.4 Cas 4 : Pas de solution ou problème non réalisable

Un problème linéaire est dit non réalisable si certaines de ses contraintes sont contradictoires. Lorsqu'un tel cas se présente, la formulation doit être revue, on reconnaît tel modèle, à la fin de la phase 1 de la méthode des deux phases ou la méthode des big M par la présence d'une variable artificielle non nulle.

3.3 Situation 02 : cas de minimisation

Exemple :

$MinZ = 3x_1 - 6x_2$

$x_1 + 2x_2 \geq -1$

$2x_1 + x_2 \geq 0$

$x_1 - x_2 \geq -1$

$x_1 - 4x_2 \geq -13$

$-4x_1 + x_2 \geq -23$

$x_1, x_2 \geq 0$

<u>Question :</u> résoudre le PL par la méthode SIMPLEXE

<u>La solution :</u>

1- <u>La forme standard :</u>

On multiplie la fonction d'objectif par (-1), MaxW=-MinZ et même toutes les contraintes avec ≥ sauf bien sur la contrainte de la non négativité.

$MinZ = 3x_1 - 62x_2$ * (-1)➔ $Maxw = -3x_1 + 6x_2$

$x_1 + 2x_2 \geq -1$ * (-1)➔ $-x_1 - 2x_2 \leq 1$

$2x_1 + x_2 \geq 0$* (-1)➔ $-2x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1 - x_2 \geq -1$* (-1)➔ $-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 - 4x_2 \geq -13$* (-1)➔ $-x_1 + 4x_2 \leq 13$

$-4x_1 + x_2 \geq -23$* (-1)➔ $4x_1 - x_2 \leq 23$

$x_1, x_2 \geq 0$

Apres, on ajoute les variables d'écarts :

$Maxw = -3x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5$

$-x_1 - 2x_2 + s_1 = 1$

$-2x_1 - x_2 + s_2 = 0$

$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$

$-x_1 + 4x_2 + s_4 = 13$

$$4x_1 - x_2 + s_5 = 23$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$

La solution de base : $X^0 = \{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \{0,0,1,0,1,13,23\}$ avec $Maxw = 0$

Tableau 1 :

		-3	6	0	0	0	0	0	$B\ rayon$	Ri
	Cj	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5		
0	s_1	-1	-2	1	0	0	0	0	1	/
0	s_2	-2	-1	0	1	0	0	0	0	/
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	0	1	1
0	s_4	-1	4	0	0	0	1	0	13	13/4
0	s_5	4	-1	0	0	0	0	1	23	/
$\sum CjXj$		0	0	0	0	0	0	0	MaxW=0	
$Cj - \sum CjXj$		-3	6	0	0	0	0	0		

Tableau 2 :

		-3	6	0	0	0	0	0	$B\ rayon$	Ri
	Cj	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5		
0	s_1	-3	0	1	0	2	0	0	3	/
0	s_2	-3	0	0	1	1	0	0	1	/
6	x_2	-1	1	0	0	1	0	0	1	/
0	s_4	3	0	0	0	-4	1	0	9	3
0	s_5	3	0	0	0	1	0	1	24	8
$\sum CjXj$		-6	6	0	0	6	0	0	MaxW=6	
$Cj - \sum CjXj$		3	0	0	0	-6	0	0		

Tableau 2 :

		-3	6	0	0	0	0	0	$B\ rayon$	Ri
	Cj	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5		
0	s_1	0	0	1	0	-2	1	0	12	
0	s_2	0	0	0	1	-3	1	0	10	
6	x_2	0	1	0	0	-1/3	1/3	0	4	
-3	x_1	1	0	0	0	-4/3	1/3	0	3	
0	s_5	0	0	0	0	5	-1	1	15	
$\sum CjXj$		-3	6	0	0	2	1	0	MaxW=15	
$Cj - \sum CjXj$		0	0	0	0	-2	-1	0		

Le critère d'optimalité est vérifié $((Cj - \sum CjXj) \leq 0)$, donc la solution optimale est la suivante $X^* = \{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \{3, 4, 12, , 10, 0, 0, 15\}$ avec MaxW=15, donc Min Z=-15

3.4 Situation 03 : Cas de maximisation (les contraintes de tout sorte $\leq$; $\geq$; $=$)

Exemple :

$MaxZ = x_1 + 2x_2$

$2x_1 + 2x_2 \geq 8$

$-9x_1 - 3x_2 \geq -27$

$x_1, x_2 \geq 0$

Question : résoudre le PL par la méthode SIMPLEXE

La solution

2- La forme standard

Avant de transformer le PL vers la forme standard, il faut que le second membre (deuxième côté de l'équation) soit positif. Donc :

$-9x_1 - 3x_2 \geq -27$ (Multiplier par **(-1)**) ➔ $9x_1 + 3x_2 \leq 27$

La forme standard :

$MaxZ = x_1 + 2x_2$

$2x_1 + 2x_2 - s_1 = 8$

$9x_1 + 3x_2 + s_2 = 27$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

La solution de base : $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = -8, s_2 = 27$

On trouve que s_1 ne respecte la condition de la non négativité. Donc, on ne peut pas appliquer la méthode du SIMPLEXE comme sa parce que la solution de base n'est pas réalisable. Dans ce cas-là, on utilise une astuce mathématique qui se résume à l'introduction nouvelles variables, dite : **Variables Artificielles**

Une variable artificielle est une variable fictive introduite spécialement pour engendrer une solution de base accessible. Elle n'a pas de signification économique. Les variables artificielles sont conçues pour nous aider à utiliser la procédure de SIMLEXE et à formuler le tableau initial à partir de l'origine. On ajoute la variable artificielle dans la contrainte ou la variable d'écart de respecte pas la condition de la non-négativité

La forme canonique :	La forme standard :	Avec les variables artificielle
$MaxZ = x_1 + 2x_2$ $2x_1 + 2x_2 \geq 8$ $9x_1 + 3x_2 \leq 27$ $x_1, x_2 \geq 0$	$MaxZ = x_1 + 2x_2$ $2x_1 + 2x_2 - s_1 = 8$ $9x_1 + 3x_2 + s_2 = 27$ $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$	$MaxZ = x_1 + 2x_2$ $2x_1 + 2x_2 - s_1 + t_1 = 8$ $9x_1 + 3x_2 + s_2 = 27$ $x_1, x_2, s_1, s_2, t_1 \geq 0$

Tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme. Ainsi, ils perturbent le mécanisme d'optimalité objectif de la méthode. Ce qui nous obligent à les faire sortir le plutôt possible de la base.

Pour faire sortir les variables artificielles de la base, on peut avoir recours à l'une des deux méthodes :

3.4.1 Méthode de big M

La méthode de big M est une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associée un grand coût -M (problème de maximisation) dans la fonction d'objectif.

La fonction d'objectif est écrite comme suite :

$$MaxZ = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 - Mt_1$$

<u>Exemple explicatif (Max)</u>

Résoudre le PL suivant par la méthode SIMPLEXE

a) $MaxZ = x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1;\ x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard :

$$MaxZ = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0\,s_1 + 0\,s_2 - Mt_1 - Mt_2$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 20$$

$x_1 + x_3 + t_1 = 5$

$x_2 + x_3 - s_2 + t_2 = 10$

$x_1;\ x_2; x_3;\ s_1; s_2;\ t_1; t_2\ \geq 0$

La solution de base : $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $s_1 = 0$; $s_2 = 0$; $s_3 = 6$; $t_1 = 5$; $t_2 = 10$

Les variables de base : $s_1; t_1;\ t_2$

Les variables hors base : $x_1;\ x_2;\ x_3;\ s_2$

Tableau 1 :

Cj		1	-1	3	0	0	-M	-M	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2		
0	s_1	1	1	0	1	0	0	0	20	/
-M	t_1	1	0	1	0	0	1	0	5	5
-M	t_2	0	1	1	0	-1	0	1	10	10
$Zj = \sum CjXj$		-M	-M	-2M	0	M	-M	-M	Z= -15M	
$Cj - Zj$		1+M	-1+M	3+2M	0	-M	0	0		

Pour sélectionner la variable entrante, on applique la même règle, la plus grande valeur de ($Cj - Zj$), et pour la variable sortante, la variable avec la petite valeur de Ri.

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ; donc on passe au deuxième tableau

Tableau 2 :

Cj		1	-1	3	0	0	-M	-M	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2		
0	s_1	1	1	0	1	0	0	0	20	20
3	x_3	1	0	1	0	0	1	0	5	/
-M	t_2	-1	1	0	0	-1	-1	1	5	5
$Zj = \sum CjXj$		3+M	-M	3	0	M	3+M	-M	Z= 15-5M	
$Cj - Zj$		-2-M	-1+M	0	0	-M	-3-2M	0		

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ; donc on passe au troisième tableau

Tableau 3 :

Cj		1	-1	3	0	0	-M	-M	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2		
0	s_1	2	0	0	1	1	1	-1	15	
3	x_3	1	0	1	0	0	1	0	5	
-1	x_2	-1	1	0	0	-1	-1	1	5	
$Zj = \sum CjXj$		4	-1	3	0	1	4	-1	Z= 10	
$Cj - Zj$		-3	0	0	0	-1	-M-4	-M+1		

Le critère d'optimalité est vérifié ; donc la solution optimale c'est :

$x_1 = 0;\ x_2 = 5, x_3 = 5; s_1 = 15;\ s_2 = 0$ avec Max Z= 10

Exemple explicative (Min)

Résoudre le PL par la méthode Big M

$MinZ = 4x_1 + x_2$

$3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

La solution

La forme standard :

$MinZ = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Mt_1 + Mt_2$

$3x_1 + x_2 + t_1 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - s_1 + t_2 = 6$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$

$x_1, x_2, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0$

La solution de base : $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $s_1 = 0$; $s_2 = 4$; $t_1 = 3$; $t_2 = 6$

Les variables de base : $t_1;\ t_2;\ s_2$

Les variables hors base : $x_1;\ x_2;\ s_1$

Tableau 1

Cj		4	1	0	0	M	M	B rayon	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
M	t_1	3	1	0	0	1	0	3	1
M	t_2	4	3	-1	0	0	1	6	3/2
0	s_2	1	2	0	1	0	0	4	4
$Zj = \sum CjXj$		7M	4M	-M	0	M	M	Z= 9M	
$Cj - Zj$		4-7M	1-4M	M	0	0	0		

Pour sélectionner la variable entrante, on applique la règle de la plus petite valeur négative de ($Cj - Zj$), et pour la variable sortante, la variable avec la petite valeur positive de de Ri.

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ; donc on passe au deuxième tableau

Tableau 2

Cj		4	1	0	0	M	M	B rayon	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
4	x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
M	t_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5
0	s_2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3	9/5
$Zj = \sum CjXj$		4	4/3+5/3M	-M	0	4/3-4/3M	M	Z=4+2M	
$Cj - Zj$		0	-1/3-5/3M	M	0	-4/3+1/3M	0		

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ; donc on passe au troisième tableau

Tableau 3

Cj		4	1	0	0	M	M	B rayon	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
4	x_1	1	0	1/5	0	2/5	-1/5	3/5	3
1	x_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5	/
0	s_2	0	0	1	1	1	-1	1	1
$Zj = \sum CjXj$		4	1	1/5	0	4/5	-1/5	Z= 18/5	
$Cj - Zj$		0	0	-1/5	0	M-4/5	M+1/5		

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ; donc on passe au quatrième tableau

Tableau 4

Cj		4	1	0	0	M	M	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
4	x_1	1	0	0	-1/5	1/5	2/5	2/5	
1	x_2	0	1	0	3/5	-1/5	0	9/5	
0	s_1	0	0	1	1	1	-1	1	
$Zj = \sum CjXj$		4	1	0	-1/5	3/5	8/5	Z=17/5	
$Cj - Zj$		0	0	0	1/5	M-3/5	M-8/5		

Le critère d'optimalité (toutes les valeurs de $(Cj - Zj)$ sont supérieur ou égale à 0) est vérifier. La solution optimale est $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{9}{5}, s_1 = 0, s_2 = 1, t_1 = 0, t_2 = 0$ avec Min Z=17/5

3.4.2 Méthode en deux phases

La méthode en deux phases consiste à segmenter l'algorithme du SIMPLEXE en deux étapes. La première étapes, dite **phase I.** la phase I consiste à éliminer les variables artificielles de la base (ou au moins à les rendre nulles). Si tel est le cas, la **Phase II** débute avec le dernier tableau (dernière solution) de la phase I, l'algorithme se poursuit en examinant des solutions réalisables de base au problème originale selon les critères usuels de l'algorithme du SIMPLEXE.

Exemple explicatif – Maximisation

Résoudre par la méthode des deux phases le modèle de programmation linéaire suivant :

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 600$

$x_1 + x_2 \leq 225$

$5x_1 + 4x_2 \leq 1000$

$x_1 + 2x_2 \geq 150$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

La forme standard

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

$2x_1 + x_2 + s_1 = 600$

$x_1 + x_2 + s_2 = 225$

$5x_1 + 4x_2 + s_3 = 1000$

$x_1 + 2x_2 - s_4 = 150$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0, s_4 \geq 0.$

La solution de base $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 600;\ s_2 = 225;\ s_3 = 1000\ ; s_4 = -150$, est non réalisable.

Les variables hors base : x_1, x_2, et les variables de base s_1, s_2, s_3, s_4.

Pour cela, on introduit les variables artificielles :

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + t_1$

$2x_1 + x_2 + s_1 = 600$

$x_1 + x_2 + s_2 = 225$

$5x_1 + 4x_2 + s_3 = 1000$

$x_1 + 2x_2 - s_4 + t_1 = 150$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0, s_4 \geq 0, t_1 \geq 0$

La solution de base $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 600;\ s_2 = 225;\ s_3 = 1000\ ; s_4 = 0, t_1 = 150$, est réalisable.

Après avoir introduit les variables artificielles, nous avons modifié profondément l'expression de la fonction objective ; ceci va influencer la valeur de Z. Pour cela, nous allons appliquer la phase I de la méthode des deux phases en espérant une solution de base réalisable optimale de départ et nous allons pouvoir entamer la phase II.

Ceci se ferait en minimisant la somme des valeurs des variables artificielles.

$$\begin{cases} MinZ = t_1 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 = 600 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 225 \\ 5x_1 + 4x_2 + s_3 = 1000 \\ x_1 + 2x_2 - s_4 + t_1 = 150 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ t_1 \geq 0;\ t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Phase I :

Tableau initial :

C_J		0	0	0	0	0	0	1	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1		
0	s_1	2	1	1	0	0	0	0	600	600
0	s_2	1	1	0	1	0	0	0	225	225
0	s_3	5	4	0	0	1	0	0	1000	250
1	t_1	1	2	0	0	0	-1	1	150	75
$Zj = \sum CjXj$		1	2	0	0	0	-1	1	Z= 150	
$C_J - Z_J$		-1	-2	0	0	0	1	0		

La sélection de la variable entrante c'est de prendre la plus petite valeur négative de $(Cj - Zj)$

Tableau 1 :

C_J		0	0	0	0	0	0	1	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1		
0	s_1	3/2	0	1	0	0	1/2	-1/2	525	
0	s_2	1/2	0	0	1	0	1/2	-1/2	150	
0	s_3	3	0	0	0	1	2	-2	700	
0	x_2	1/2	1	0	0	0	-1/2	1/2	75	
$Zj = \sum CjXj$		0	0	0	0	0	0	0	Z= 0	
$C_J - Z_J$		0	0	0	0	0	0	1		

La valeur de Z^*=0, et les variables artificielles sont éliminé de la base. La phase une est terminé et la phase deux peut commencer avec la solution de base réalisable suivante $x_0 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 75, 525{,}150{,}700{,}0)$.

Mais vérifions d'abord que x_0 vérifie le problème standard :

$$2 * 0 + 75 + 525 = 600$$
$$0 + 75 + 150 = 225$$
$$5 * 0 + 4 * 75 + 700 = 1000$$
$$0 + 2 * 75 - 0 + 0 = 150$$

Phase II

Tableau 0 :

C_J		3	4	0	0	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	s_1	3/2	0	1	0	0	1/2	525	1100
0	s_2	1/2	0	0	1	0	1/2	150	300
0	s_3	3	0	0	0	1	2	700	350
4	x_2	1/2	1	0	0	0	-1/2	75	/
$Zj = \sum CjXj$		2	4	0	0	0	-2	Z= 300	
$C_J - Z_J$		1	0	0	0	0	2		

Tableau 1 :

C_J		3	4	0	0	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	s_1	1	0	1	-1	0	0	375	
0	s_4	1	0	0	2	0	1	300	
0	s_3	1	0	0	-4	1	0	100	
4	x_2	1	1	0	1	0	0	225	
$Zj = \sum CjXj$		4	4	0	4	0	0	Z= 900	
$C_J - Z_J$		-1	0	0	-4	0	0		

Toutes les valeurs de $C_J - Z_J$ sont négatifs ou nulles, donc nous sommes arrivés à la solution optimale $x^* = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0{,}225{,}375{,}0{,}100{,}300)$ avec $Z^* = 900$

Exemple explicative- Minimisation

Résoudre le PL suivant par la méthode de SIMPLEXE en deux phases :

$Min\ Z = x_1 + x_2$

$2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 + 7x_2 \geq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

La solution

La forme standard :

$Min\ Z = x_1 + x_2 + s_1 + s_2 + t_1 + t_2$

$2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 4$

$x_1 + 7x_2 - s_2 + t_2 = 7$

$x_1, x_2, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0$

La solution de base réalisable $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, t_1 = 4, t_2 = 7$

Pour résoudre le PL par la méthode en deux phases, en commence par la minimisation des variables artificielle dans la fonction d'objectif :

Le nouveau PL devient comme suite :

$Min\ Z = t_1 + t_2$

$2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 4$

$x_1 + 7x_2 - s_2 + t_2 = 7$

$x_1, x_2, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0$

La solution de base réalisable : $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, t_1 = 4, t_2 = 7$

Les variables de base : t_1, t_2

Les variables hors base : x_1, x_2, s_1, s_2

Phase I

Tableau 0 :

C_J		0	0	0	0	1	1	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
1	t_1	2	1	-1	0	1	0	4	4
1	t_2	1	7	0	-1	0	1	7	1
$Zj = \sum CjXj$		3	8	-1	-1	1	1	Z= 13	
$C_J - Z_J$		-3	-8	1	1	0	0		

- La variable entrante c'est la variable avec la plus grande valeur négative de $(C_J - Z_J)$, donc c'est x_2 , la variable correspondante avec -8
- La variable sortante c'est la variable t_2, la variable correspondante avec la plus petite valeur positive de Ri

Tableau 1 :

C_J		0	0	0	0	1	1	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
1	t_1	13/7	0	-1	1/7	1	-1/7	3	21/13
0	x_2	1/7	1	0	-1/7	0	1/7	1	7
$Zj = \sum CjXj$		13/7	0	-1	1/7	1	-1/7	Z= 3	
$C_J - Z_J$		-13/7	0	1	-1/7	0	8/7		

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié ($Z \neq 0$, et les variables artificielles existent toujours dans la base, donc on passe au tableau suivant :

Tableau 2 :

C_J		0	0	0	0	1	1	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2		
0	x_1	1	0	-7/13	1/13	7/13	-1/13	21/13	
0	x_2	0	1	1/13	-2/13	-1/13	2/13	10/13	
$Zj = \sum CjXj$		0	0	0	0	0	0	Z= 0	
$C_J - Z_J$		0	0	0	0	0	0		

La valeur de Z^{*}=0, et les variables artificielles sont éliminé de la base. La phase une est terminé et la phase deux peut commencer avec la solution de base réalisable suivante $x_0 = (x_1, x_2, s_1, s_2, t_1, t_2) = (21/13, 10/13, 0,0,0,0)$.

Mais vérifions d'abord que x_0 vérifie le problème standard :

$$2 * \frac{21}{13} + \frac{10}{13} - 0 + 0 = 4$$

$$\frac{21}{13} + \frac{7 * 10}{13} - 0 + 0 = 7$$

Phase II :

Tableau 0 :

C_J		1	1	0	0	$B\ rayon$	Ri
		x_1	x_2	s_1	s_2		
1	x_1	1	0	-7/13	1/13	21/13	
1	x_2	0	1	1/13	-2/13	10/13	
$Zj = \sum CjXj$		1	1	-6/13	-1/13	Z= 31/13	
$C_J - Z_J$		0	0	6/13	1/13		

Le critère d'optimalité est vérifié ($(C_J - Z_J) \geq 0$), la solution optimale est :

$x^{*} = (x_1, x_2, s_1, s_2) = (\frac{21}{13}, \frac{10}{13}, 0,0)$ avec $Z^{*} = 31/13$

3.5 Exercices et solutions

3.5.1 Exercices

Exercice 3-1

Résoudre par la méthode du simplexe le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 200x_1 + 100x_2 + 300x_3$$

$$\begin{cases} -100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 600 \\ 100x_1 + 200x_2 \leq 2400 \\ 50x_1 - 200x_2 + 100x_3 \leq 900 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3-2

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe :

$$MaxZ = 40x_1 + 60x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3-3

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe :

Max Z= 15 x_1 + 10 x_2

$x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1 + x_2 \leq 25$

$x_1, x_2 \geq 0$

Exercice 3-4

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe :

$MaxZ = 200x_1 + 100\, x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + \ x_2 \leq 480 \\ x_1 + x_2 \leq 150 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 440 \\ x_2 \leq 90 \end{cases}$$

Exercice 3-5

Résoudre par la méthode du simplexe le programme linéaire suivant :

$MaxZ = 4x_1 + 6x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + \ 6x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 22 \\ x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3-6

Résoudre le programme linéaire suivant par la **méthode du simplexe** :

$MaxZ = 20x_1 + 30x_2$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3-7

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe :

$MaxZ = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solution d'exercice

La forme mixte **La forme standard**

$$\begin{cases} MaxZ = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} MaxZ = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + s_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

La base initiale est $B = \{s_1, s_2, s_3\}$, donc la solution de base réalisable est $X^0 = (0,0,0,5,11,8)$ avec $Z(x^{(0)}) = 0$

<u>Le premier tableau</u>

- La première ligne contient les valeurs dans la fonction d'objectif
- La deuxième ligne contient les variables de notre P.L
- La deuxième colonne contient les variables d'écarts
- La première colonne contient les valeurs des variables d'écarts dans la fonction d'objectif
- Le contenu du tableau : on pose les valeurs des contraintes
- $ZJ = \sum cj.xj$, exemple : Z1= 0*2 + 0*4 + 0*3 = 0
- $Z = CJ - ZJ$, exemple Z= 5 – 0 = 5
- La sélection de la colonne du pivot (la colonne qui sélectionne la variable entrante), la valeur avec le Max Z (dernière ligne), dans notre exemple c'est la colonne de la valeur 5.
- Calculer le RI, $RI = \frac{Brayon}{la\ colonne\ de\ pivot}$
- La sélection de la ligne de pivot, (la ligne qui sélectionne la variable sortante), la valeur de Min RI (dernière colonne), dans notre exemple c'est la ligne de la valeur 5/2.

C.J		5	4	3	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
0 ←	s_1	2	3	1	1	0	0	5	5/2
0	s_2	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	s_3	3	4	2	0	0	1	8	8/3
	Z_j	Z1= 0	Z2= 0	0	0	0	0	Max Z= 0	
Z		5	4	3	0	0	0		

La case en commun entre la ligne de pivot et la colonne de pivot, on l'appelle « le pivot ». Donc la valeur de pivot c'est 2.

- Max Z c'est $MaxZ = \sum CJ * B\ rayon = 0 * 5 + 0 * 11 + 0 * 8 = 0$

Le deuxième tableau du SIMPLEXE

C.J		5	4	3	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
5	x_1	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2	5
0	s_2	0	-5	0	-2	1	0	1	/
0	s_3	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2	1
ZJ		5	15/2	5/2	5/2	0	0	Max Z= 25/2	
Z		0	-7/2	1/2	-5/2	0	0		

La nouvelle de X1 : on l'appelle aussi la nouvelle ligne de pivot

$$la\ nouvelle\ ligne\ de\ pivot = \frac{l'ancienne\ ligne\ de\ pivot}{pivot}$$

$$X1 = \frac{(2\ \ 3\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 5)}{2} \Rightarrow X1 = (1\ \ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{5}{2})$$

Pour calculer les autres lignes S2, S3, on suit les étapes suivantes

$$S2 = (-le\ chiffre\ dans\ la\ colonne\ de\ pivot) * la\ nouvelle\ ligne\ de\ pivot + l'ancienne\ ligne\ de\ S2$$

$$S2 = (-4) * \left(1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \frac{5}{2}\right) + (4\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 11) = (0\ -5\ \ 0\ -2\ \ 1\ \ 0\ \ 1)$$

La même règle pour calculer la nouvelle ligne de S3.

Pour les ZJ, Z, RI, les mêmes règles du premier tableau

Pour déterminer la solution optimale, lorsque toutes les valeurs de Z(situées dans la dernière ligne du tableau) sont négatives ou nulles, on considère que la solution finale est atteinte**.** Dans le cas contraire, la solution n'est pas encore optimale, et l'on continue à appliquer les mêmes étapes sur le tableau suivant**.**

Dans notre exemple, la valeur $\frac{1}{2}$indique que nous devons passer au troisième tableau. La variable x_3 est alors introduite pour remplacer la variable $s_3$dans la base.

Le troisième tableau du SIMPLEXE :

C.J		5	4	3	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2	
0	s_2	0	-5	0	-2	1	0	1	
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1	
ZJ		5	7	3	1	0	1	Max Z= 13	
Z		0	-3	0	-1	0	-1		

Toutes les valeurs de Z sont négatives ou nulles, donc notre solution est terminée. La solution optimale c'est X*= $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)$ = (2, 0, 1, 0, 1, 0) avec Z*=13

3.5.2 Solution d'exercices

Solution 3-1:

1-Forme standard :

$Max\ Z = 200x_1 + 100x_2 + 300x_3$ +0 S1+ 0S2+ 0S3

$$\begin{cases} -100x_1 + 200x_2 + 100x_3 + S1 = 600 \\ 100x_1 + 200x_2 + S2 = 2400 \\ 50x_1 - 200x_2 + 100x_3 + S3 = 900 \\ x_1, x_2, x_3, S1, S2, S3 \geq 0 \end{cases}$$

2-La base et la solution de base réalisable :

Tableau 1 :

C.J		200	100	300	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	-100	200	100	1	0	0	600	6
0	s_2	100	200	0	0	1	0	2400	/
0	s_3	50	-200	100	0	0	1	900	9
ZJ		0	0	0	0	0	0	Max Z= 0	
Z		200	100	300	0	0	0		

Tableau 2 :

C.J		200	100	300	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
300	x_3	-1	2	1	1/100	0	0	6	-6
0	s_2	100	200	0	0	1	0	2400	24
0	s_3	150	-400	0	-1	0	1	300	2
ZJ		-300	600	300	3	0	0	Max Z=	
Z		500	-500	0	-3	0	0	1800	

Tableau 3 :

C.J		200	100	300	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
300	x_3	0	-2/3	1	1/300	0	1/150	8	-12
0	s_2	0	1400/3	0	2/3	1	-2/3	2200	66/12
200	x_1	1	-8/3	0	-1/150	0	1/150	2	-6/8
ZJ		200	-2200/3	300	-100/300	0	500/150	Max Z= 2800	
Z		0	2500/3	0	100/300	0	-500/150		

Tableau 4 :

C.J		200	100	300	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
300	x_3	0	0	1	3/700	1/700	1/175	78/7	
100	x_2	0	1	0	1/700	3/1400	-1/700	66/14	
200	x_1	1	0	0	-1/350	1/175	1/350	102/7	
ZJ		200	100	300	6/7	25/14	15/7	Max Z= 47100/7	
Z		0	0	0	-6/7	-25/14	-15/7		

La solution optimale est : x_1 *= 102/7;* x_2 *= 66/14;* x_3 *= 78/7 ;* $s_1 = s_2 = s_3 = 0$

Max Z= 47100/7

Solution 3-2:

La forme standard :

$$MaxZ = 40x_1 + 60x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 70 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + s_3 = 90 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1 :

C_J		40	60	0	0	0	B_{rayon}	R_i
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	2	1	1	0	0	70	70
0	s_2	1	1	0	1	0	40	40
0	s_3	1	3	0	0	1	90	30
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	**MaxZ = 00**	
$Z = C_j - Z_j$		40	60	0	0	0		

Tableau 2 :

C_J		40	60	0	0	0	B_{rayon}	R_i
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	5/3	0	1	0	-1/3	40	24
0	s_2	2/3	0	0	1	-1/3	10	15
60	x_2	1/3	1	0	0	1/3	30	90
$Z_j = \sum C_j x_j$		20	60	0	0	20	**MaxZ = 1800**	
$Z = C_j - Z_j$		20	0	0	0	-20		

Tableau 3 :

C_J		40	60	0	0	0	B_{rayon}	R_i
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	1	-5/2	1/2	-1/3	15	
40	x_1	1	0	3/2	-1/2	-1/3	15	
60	x_2	0	0	-1/2	1/2	1/3	25	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	60	0	30	10	**MaxZ = 2100**	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-30	-10		

La solution optimale c'est $x_1 = 15$; $x_2 = 25$; $s_1 = 15$; $s_2 = s_3 = 0$; avec Max Z= 2100

Solution 3-3:

La forme standard :
Max Z= 15 x_1 + 10 x_2

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 40$

$4x_1 + 2x_2 + s_2 = 80$

$x_1 + x_2 + s_3 = 25$

Tableau 1 :

CJ		15	10	0	0	0	B	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	1	2	1	0	0	40	40
0	s_2	4	2	0	1	0	80	20
0	s_3	1	1	0	0	1	25	25
ZJ =		0	0	0	0	0	Z= 0	
ZJ		15	10	0	0	0		

Tableau 2 :

CJ		15	10	0	0	0	B	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	1	1	-1/4	0	20	20
15	x_1	1	1/2	0	1/4	0	20	40
0	s_3	0	1/2	0	-1/4	1	5	10
ZJ		15	15/2	0	15/4	0	Z=300	
ZJ		0	5/2	0	-15/4	0		

CJ		15	10	0	0	0	B	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1/4	-2	10	
15	x_1	1	0	0	1/2	-1	15	
10	x_2	0	1	0	-1/2	2	10	
ZJ		15	10	0	5/2	5	Z=325	
ZJ		0	0	0	-5/2	-5		

La solution optimale : x_1=15, x_2= 10, s_1=10, s_2= 0, s_3=0 avec max Z= 325

Solution 3-4:

La forme standard

$$MaxZ = 200x_1 + 100\,x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + \ x_2 + s_1 = 480 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 150 \\ 2x_1 + 4x_2 + s_3 = 440 \\ x_2 + s_4 = 90 \end{cases}$$

Tableau 1 :

C_j	→	200	100	0	0	0	0	B	R_i
↓		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rayon	
0	s_1	4	1	1	0	0	0	480	120
0	s_2	1	1	0	1	0	0	150	150
0	s_3	2	4	0	0	1	0	440	220
0	s_4	0	1	0	0	0	1	90	/
Z_j		0	0	0	0	0	0	Z= 0	
Z		200	100	0	0	0	0		

Tableau 2 :

C_j	→	200	100	0	0	0	0	B	R_i
↓		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rayon	
200	x_1	1	1/4	1/4	0	0	0	120	480
0	s_2	0	3/4	-1/4	1	0	0	30	40
0	s_3	0	7/2	-1/2	0	1	0	200	400/7
0	s_4	0	1	0	0	0	1	90	90
Z_j		200	50	50	0	0	0	Z= 24000	
Z		0	50	-50	0	0	0		

Tableau 3 :

C_j	→	**200**	**100**	**0**	**0**	**0**	**0**	**B**	**R_i**
↓		x_1	x_1	s_1	s_2	s_3	s_4	**rayon**	
0	x_1	**1**	**0**	**1/3**	**-1/3**	**0**	**0**	**110**	
0	x_2	**0**	**1**	**-1/3**	**4/3**	**0**	**0**	**40**	
0	s_3	**0**	**0**	**2/3**	**-14/3**	**1**	**0**	**60**	
0	s_4	**0**	**0**	**1/3**	**-4/3**	**0**	**1**	**50**	
Z_j		**200**	**100**	**100/3**	**200/3**	**0**	**0**	**Z= 26000**	
Z		**0**	**0**	**-100/3**	**-200/3**	**0**	**0**		

La solution optimale c'est : x_1= 110, x_2= 40, s1= s2= 0, s3= 60, s4= 50 avec MAX Z= 26000

Conclusion

La méthode du simplexe constitue l'un des piliers de l'optimisation linéaire. Grâce à un algorithme itératif, basé sur le passage d'une solution de base admissible à une autre, elle permet de résoudre efficacement une large gamme de problèmes économiques, industriels et logistiques.

Son efficacité repose sur une modélisation rigoureuse du problème sous forme standard et sur une interprétation géométrique puissante, consistant à rechercher l'optimum parmi les sommets du polyèdre des solutions réalisables.

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté les étapes fondamentales de l'algorithme du simplexe ainsi que les cas particuliers. Le simplexe demeure une approche incontournable, à la fois pour sa valeur pédagogique et sa pertinence pratique.

Chapitre IV : la Dualité et l'Analyse de Sensibilité

Chapitre IV : La Dualité et l'analyse de sensibilité

Introduction

Dans cette partie, on va étudier des notions relatives aux programmes linéaires comme le dual (programme dual), les coûts marginaux ainsi que des techniques de validation de la solution d'un programme linéaire, c'est-à-dire l'analyse de sensibilité. La dualité consiste à associer à chaque problème d'optimisation (primal) un problème dual, lié mathématiquement au premier. Cette relation permet non seulement de résoudre certains problèmes plus efficacement, mais aussi de donner une interprétation économique des résultats (valeurs d'ombre, prix marginaux). L'analyse de sensibilité, quant à elle, permet d'étudier l'impact de modification des paramètres (ressources, coefficients de la fonction d'objectif) sur la solution optimale. Elle aide à la robustesse des décisions prises dans un environnement incertain.

4.1 Interprétation économique

La dualité en programmation linéaire est un concept fondamental qui permet d'analyser un problème économique sous deux angles complémentaires : celui de la décision (le programme primal) et celui de la valorisation des ressources (le programme dual). Dans un programme primal, l'objectif est souvent de maximiser un profit ou de minimiser un coût en utilisant un ensemble de ressources limitées. Par exemple, une entreprise cherche à produire des biens 'qui sont des variables de décision). Tout en respectant des contraintes de disponibilité des ressources (matières premières, heures de travail etc.).

Par contre, le programme dual permet de répondre à la question : combien serons-nous prêts à payer pour obtenir une unité supplémentaire d'une ressource donnée ?

Ces valeurs sont appelées prix d'ombre ou valeurs duals. Ils représentent la valeur marginale d'une ressource rare dans le contexte du modèle étudié. La dualité relève du fait que le bénéfice maximal que l'on peut tirer d'une activité dans le programme primal est égal au coût minimal d'obtention des ressources nécessaires dans le programme dual. Cela reflète un principe d'équilibre économique où l'entreprise ne peut gagner plus que ce que les ressources utilisées valent sur le marché.

4.2 Le principe de la dualité

La dualité est une notion essentielle en programmation linéaire. A un programme linéaire donné que nous appelons primal**,** l'opération de dualité associe un autre programme linéaire dit son dual**,** qui ne sera défini qu'à l'aide des seules données du primal.

La dualité présente un double intérêt :

- Le programme dual a une interprétation économique importante : il constitue une autre vision du programme initial primal. En particulier, la dualité permet de montrer qu'un problème d'allocation optimale des ressources rares est aussi un problème de tarification optimale de ces ressources.

• Les propriétés liant le programme primal et son dual permettent de résoudre des problèmes de minimisation et de maximisation, ce qui est souvent plus facile, et de développer de nouveaux algorithmes qui se révéleront plus performants dans un grand nombre de situations.

4.3 La construction du modèle DUAL

Exemple explicatif :

Une entreprise fabrique deux types de meubles M1 et M2. La matière première passe par trois ateliers comme il est bien mentionné dans le tableau. Le temps nécessaire et dans chaque atelier pour la fabrication des deux types du meuble et même le temps disponible sont mentionnés dans le tableau suivant :

	M1	M2	Temps disponible
Menuiserie	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Vernissage	1	1	12

La vente génère un bénéfice de 300DA pour un meuble de type M1 et 200 DA pour un meuble de type M2.

Question : modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.

La solution :

Les variables de décision :

x_1: La quantité des meubles du types M1 a fabriqué

x_2: La quantité des meubles du types M2 a fabriqué

La fonction d'objectif :

$Max\ Z = 300x_1 + 200x_2$

Les contraintes :

$x_1 + 2x_2 \leq 20$ (Menuiserie)

$2x_1 + x_2 \leq 22$ (Assemblage)

$x_1 + x_2 \leq 12$ (Vernissage)

$x_1; x_2 \geq 0$

Le programme linéaire précédant c'est notre programme primal

S'il y a une proposition qu'il client voudrait acheter la totalité des ressources disponibles au sein de l'entreprise.

Le directeur de l'usine acceptera cette proposition si le prix proposé par le client lui apporte le même profit provenant de la vente des meubles. Donc, dans cette situation, le programme sera changé. Pour cela, on associe un prix unitaire à chaque ressource :

y_1 : le prix d'une heure de menuiserie

y_2 : le prix d'une heure d'assemblage

y_3 : le prix d'une heure de vernissage

Avec les disponibilités suivantes :

La menuiserie : 20 heures disponible

L'assemblage : 22 heures disponible

Le vernissage : 12 heures disponible.

Le client cherche à minimiser les frais d'achat des ressources, c'est-à-dire la fonction d'objectif du model dual sera comme suite :

$MinW = 20y_1 + 22y_2 + 12y_3$

Concernant les contraintes, la production de chaque meuble type M1 nécessite 1 heure de menuiserie, 2 heures d'assemblage et 1 heure de vernissage. Donc le revenu engendré par la vente de ces ressources est calculé comme suite :

$y_1 + 2y_2 + y_3$

Aussi, le profit engendré par la production et la vente d'un meuble de type M1 et 300 DA

Pour cela, la contrainte imposée par le modèle primal sur le dual est définie par :

$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 300$ Veut dire que le profit engendrer à travers les ventes des ressources disponibles doit être au minimum le profit engendrer dans le cas de la vente du meuble de type M1

La même chose pour le reste, donc deuxième contrainte sera comme suite :

$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$

- Donc, la forme finale du programme dual et la suivante :

Les variables de décisions :

y_1 : le prix d'une heure de menuiserie

y_2 : le prix d'une heure d'assemblage

y_3 : le prix d'une heure de vernissage

La fonction d'objectif :

$MinW = 20y_1 + 22y_2 + 12y_3$

Les contraintes :

$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 300$

$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$

$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Le tableau suivant montre les deux programmes :

Programme primal	Programme dual
Les variables de décision : x_1: La quantité des meubles du types M1 a fabriqué x_2: La quantité des meubles du types M2 a fabriqué **La fonction d'objectif :** $Max\ Z = 300x_1 + 200x_2$ **Les contraintes :** $x_1 + 2x_2 \leq 20$ (Menuiserie) $2x_1 + x_2 \leq 22$ (Assemblage) $x_1 + x_2 \leq 12$ (Vernissage) $x_1; x_2 \geq 0$	**Les variables de décisions :** y_1 : le prix d'une heure de menuiserie y_2 : le prix d'une heure d'assemblage y_3 : le prix d'une heure de vernissage **La fonction d'objectif :** $MinW = 20y_1 + 22y_2 + 12y_3$ **Les contraintes :** $y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 300$ $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$ $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 200$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

4.4 Les caractéristiques de la dualité

La dualité est caractérisée par les règles suivantes :

- Le sens de l'optimisation est inversé. La maximisation (resp. Minimisation) dans le programme primal devient une minimisation (resp. Maximisation) dans le programme dual.
- Les coefficients de la fonction d'objectif du primal deviennent les seconds membres des contraintes duales, et même les seconds membres des contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction objectif du dual
- Les signes dans les inégalités des contraintes ou dans la contrainte de positivité des variables de décision suivent des règles précises de transformation.

Le tableau suivant montre les règles de la dualisation (le changement de programme primal vers un programme dual) :

Primal	Devient	Dual
La fonction d'objectif		**La fonction d'objectif**
Minimisation	$\leftrightarrow$	Maximisation
Maximisation	$\leftrightarrow$	Minimisation
Nombre des contraintes	$\leftrightarrow$	Nombre des variables
Nombre des variables	$\leftrightarrow$	Nombre des contraintes
Types des contraintes	$\leftrightarrow$	**Types des variables principales**
$=$	$\leftrightarrow$	Quelconque
$\leq$	$\leftrightarrow$	$\geq$
$\geq$	$\leftrightarrow$	$\leq$
Types des variables de décision	$\leftrightarrow$	**Types des contraintes**
Quelconque	$\leftrightarrow$	$=$
$\geq$	$\leftrightarrow$	$\geq$
$\leq$	$\leftrightarrow$	$\leq$

Exemple 01 :

On a le programme linéaire primal suivant :

$MaxZ = x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \leq 14$

$-2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$2x_1 - x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

La question : créer le programme dual du programme primal précédant.

La solution 01 :

$MinW = 14y_1 + 12y_2 + 12y_3$

$y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1$

$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Exemple 02 :

Programme primal	Programme dual
$MinZ = 60x_1 + 90x_2$ $20x_1 + 5x_2 \geq 25$ $30x_1 + 20x_2 \geq 60$ $5x_1 + 10x_2 \geq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Maxw = 25y_1 + 60y_2 + 15y_3$ $20y_1 + 30y_2 + 5y_3 \leq 60$ $5y_1 + 20y_2 + 10y_3 \leq 90$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

4.5 Théorème des écarts complémentaires

Le principe du théorème des écarts complémentaires c'est de comment trouvé une solution d'un problème avec la solution de l'autre. Pour cela, on note que x^* c'est la solution optimale du primal et y^* c'est la solution optimale du dual. Il y les possibilités suivantes :

- Si $x_j^* > 0$, alors la j-ième contrainte du dual est saturée.
- Si la j-ième contrainte du dual n'est pas saturée, alors $x_j^* = 0$
- Si $y_j^* > 0$, alors la i-ième contrainte du primal est saturée.
- Si la i-ième contrainte du primal n'est pas saturée, alors $y_j^* = 0$

Exemple explicative :

Appliquer le théorème des écarts complémentaires au problème linéaire suivant :

Le programme primal :

$MaxZ = 100x_1 + 200x_2$

$x_1 + x_2 \leq 150$

$4x_1 + 2x_2 \leq 440$

$x_1 + 4x_2 \leq 480$

$x_1 \leq 90$

$x_1, x_2 \geq 0$

Le tableau de la solution optimal du primal est le suivant :

Cj → ↓		100	200	0	0	0		B rayon	
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
100	x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40	
0	s_2	0	0	-14/3	1	2/3	0	60	
200	x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110	
0	s_4	0	0	-4/3	0	1/3	1	50	
Zj		100	200	200/3	0	100/3	0	Z= 26000	
Z		0	0	-200/3	0	-100/3	0		

La solution optimale du programme primal 'est : $x^* = (x_1, x_2) = (40{,}110)$ avec Max Z= 26000

Le programme dual :

$MinZ = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$

$y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \geq 100$

$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 200$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

4.5.1 L'élaboration du tableau optimale du dual à partir du tableau optimal primal

L'élaboration du dernier tableau de la solution optimal du dual est le suivant :

- Le lien entre les variables d'écart du programme initial et les variables principales du programme dual est comme suite :

La solution optimale du dual :

$y_1^* = -Z_{s1} = 200/3$; $y_2^* = -Z_{s2} = 0$; $y_3^* = -Z_{s3} = -100/3$, $y_4^* = -Z_{s4} = 0$avec W=Z= 26000

Les variables d'écart (surplus) du programme dual :

$s_1^* = -Z_{x1} = 0$; $s_2^* = -Z_{x2} = 0$

Donc le tableau optimal du dual sera rempli comme suite :

$y_1^* = 200/3$; $y_2^* = 0$; $y_3^* = 100/3$, $y_4^* = 0$avec W=Z= 26000

- Les variables qui seront dans la base sont les variables non nulles, dans notre cas ce sont y_1^*et y_3^*, et ont ecrit leurs valeurs ans la colonne du B rayon

- Pour le contenue du tableau, on met 1 dans la case en commun entre la variable de base et la variable dans la ligne, les autres cases dans la colonne prend les valeurs 0.

- La règle pour calculer $\mathbf{w_j}$ c'est la même règle pour calculer $\mathbf{Z_j}$

- La règle pour calculer la dernière ligne **W** c'est la même règle pour calculer **Z**

- On a le nombre des variables des variables du programme dual est égale au nombre des variables du programme primal mais le nombre des variables de décisions dans le primal est égale au nombre des variable d'écart (ou surplus) dans le primale. Le tableau suivant montre comment on fait le lien entre les variables des deux programmes :

Variable du primal	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
Variables du dual	s_1	s_2	y_1	y_2	y_3	y_4

- Pour les valeurs dans la ligne du W, on met les valeurs des variables qui correspond dans la colonne B rayon du tableau primal
- Pour les cases restantes, on prend les valeurs des cases qui correspond dans le tableau primal en changement la signe + vers – et vice versa :

  Par exemple : $(y_1 y_2)$dual = : $(s_1 s_2)$primal = -(-14/3) =14/3

C_j →		150	440	480	90	0	0	**B rayon**	
↓		y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2		
150	y_1	1	14/3	0	4/3	-4/3	1/3	200/3	
480	y_3	0	-2/3	1	-1/3	1/3	-1/3	100/3	
$\boldsymbol{W_j}$		150	380	480	140	-40	-110	W= 26000	
W		0	60	0	50	40	110		

La solution du programme du dual est la suivante :

$y_1^* = 200/3$; $y_2^* = 0$; $y_3^* = 100/3$, $y_4^* = 0$avec W=Z= 26000

4.6 L'analyse de sensibilité

Il y a une question qu'on pose toujours qui est la suivante :

Est-ce que la solution optimale est sensible aux paramètres du programme linéaire ?

L'objectif de cette question, c'est que les paramètres utilisés ne sont que des estimations. Aussi, dans un environnement dynamique, les paramètres ou l'objectif de l'entreprise peuvent changer régulièrement. Pour cela, l'analyse des scénarios peut permettre de proposer des changements aux paramètres. Comme définition, l'analyse de sensibilité (post-optimale) permet de déterminer la sensibilité d'un programme linéaire par rapport aux données :

- Une variation des données entraîne-t-elle un changement important de la solution optimale ?

- L'analyse poste-optimale permet de déterminer des intervalles de variation des données pour lesquels la base optimale n'est pas modifiée. Pour cela, nous allons envisager deux situations :

- La variation des coefficients de la fonction d'objectif.
- La variation des coefficients des contraintes (coefficients des membres de droite).

Après, on va voir l'effet sur la solution optimale et comment varie la valeur optimale de l'objectif.

4.6.1 Variation des coefficients de la fonction d'objectif :

La question qui se pose est la suivante :

Si on augmente le prix de vente unitaire ou si l'on diminue le coût unitaire de production, quel est l'impact sur la valeur de l'objectif ?

Dans ce cas-là, nous sommes dans l'obligation de déterminer un intervalle dans lequel peut varier le coefficient d'une variable de décision sans que la solution optimale change, cet intervalle est appelé « **l'intervalle d'optimalité** »

Exemple explicatif :

Nous avons le programme linéaire suivant :

$$MaxZ = 300x_1 + 200x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 20 \text{ (Menuiserie)}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 22 \text{ (Assemblage)}$$
$$x_1 + x_2 \leq 12 \text{ (Vernissage)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

On va résoudre le Programme linéaire par la méthode SIMPLEXE

1- La forme standard :

$$MaxZ = 300x_1 + 200x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 20$$
$$2x_1 + x_2 + S_2 = 22$$
$$x_1 + x_2 + S_3 = 12$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

La base initiale B= {20,22,12}, et la solution de base réalisable c'est $X^0 = (0,0,20,22,12)$ avec $Z(x^{(0)}) = 0$.

Tableau 01 :

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	1	2	1	0	0	20	20
0	s_2	2	1	0	1	0	22	11
0	s_3	1	1	0	0	1	12	12
ZJ		0	0	0	0	0	Max Z= 0	
Z		300	200	0	0	0		

Tableau 02 :

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	3/2	1	-1/2	0	9	6
300	x_1	1	1/2	0	1/2	0	11	22
0	s_3	0	1/2	0	-1/2	1	1	2
ZJ		300	150	0	150	0	Max Z= 3300	
Z		0	50	0	-150	0		

Tableau 03 :

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1	-3	6	
300	x_1	1	0	0	1	-1	10	
200	x_2	0	1	0	-1	2	2	
ZJ		300	200	0	100	100	Max Z= 3400	
Z		0	0	0	-100	-100		

La solution optimale de ce programme c'est $x^* = (x_{1,}x_2) = (10{,}2)$ avec Z=3400.

A- Maintenant, on essaye d'étudier la variation du coefficient C_1 relatif à retirer de la vente d meuble type M1 (300). La modification : on modifie C_1 de la variable de décision de base par C_1', ou $C_1' = C_1 + \Delta$, ou Δ représente la valeur du changement dans le coefficient. Dans cette situation, on cherche à déterminer l'intervalle d'optimalité relatif au coefficient C_1. Pour cela, on remplace dans le dernier tableau la valeur de C_1 qui est 300 par C_1' qui est 300+Δ

C.J		300+Δ	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1	-3	6	
300+Δ	x_1	1	0	0	1	-1	10	
200	x_2	0	1	0	-1	2	2	
ZJ		300+Δ	200	0	100+Δ	100-Δ	Max Z= 3400+ 10Δ	
Z		0	0	0	-100- Δ	-100+Δ		

Afin de garder la même solution optimale, il faut que les coefficients de la dernière ligne (Z) soient toujours inferieur ou égale a zéro. Donc :

$-100 - \Delta \leq 0 \rightarrow \Delta \geq -100$

$-100 + \Delta \leq 0 \rightarrow \Delta \leq 100$

Donc l'intervalle de Δ est $[-100; +100]$ et l'intervalle d'optimalité de C_1'et le suivant :

$$C_1' = 300 + \Delta \rightarrow \begin{cases} C_1' = 300 - 100 = 200 \\ C_1' = 300 + 100 = 400 \end{cases}$$

Donc, l'intervalle d'optimalité de C_1' est $[200; 400]$; comme interprétation, quel que soit la valeur du coefficient C_1 compris entre 200 et 400, la solution optimale reste toujours la même, veut dire $(x_{1,}x_2) = (10{,}2)$, mais la valeur de la fonction d'objectif varie $Z \in [2400; 4400]$

La même chose pour le coefficient C_2.

4.6.2 Variation par rapport au second membre

La question posée dans cette situation est la suivante :

Si on augmente ou on diminue la capacité disponible d'une ressource, quel est l'impact sur la solution et la valeur optimale de la fonction d'objectif ?

Dans cette situation, on cherche un **intervalle de réalisabilité** (appelé aussi domaine de validité) pour lequel la solution optimale reste stable pour une variation du second membre.

Toujours l'exemple précédant :

$MaxZ = 300x_1 + 200x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 20$ (Menuiserie)

$2x_1 + x_2 \leq 22$ (Assemblage)

$x_1 + x_2 \leq 12$ (Vernissage)

$x_1, x_2 \geq 0$

Tableau 03 :

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1	-3	6	
300	x_1	1	0	0	1	-1	10	
200	x_2	0	1	0	-1	2	2	
ZJ		300	200	0	100	100	Max Z= 3400	
Z		0	0	0	-100	-100		

La solution optimale de ce programme c'est $x^* = (x_{1,}x_2) = (10,2)$ avec Z=3400.

On suit le même principe, on remplace le second membre d'une contrainte par exemple contrainte d'assemblage b_2 par $b_2' = b_2 + \Delta$. Dans les contraintes, $b_2 = 22$ vas remplacer par $b_2' = 22 + \Delta$.

Veut dire, on cherche ce qu'est l'intervalle de travail de l'unité d'assemblage sans que la solution optimale change ($x^* = (x_{1,}x_2) = (10,2)$) .Dans le tableau optimal, la colonne correspondante à la variable d'écart de la contraintes i (b_i), nous donne le coefficient de Δdans la colonne b_i'.

On détermine tout d'abord la variable d'écart correspondante a la contrainte avec variation (dans notre exemple deuxième contrainte). Donc, la variable d'écart correspondante a b_2c'est $S2$(S1 c'est la variable d'écart correspondante a la première contrainte et S3 c'est la variable d'écart correspondante a la dernière contrainte) .

Donc :$b_i' = b_i + \Delta S2$.

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1	-3	6	
300	x_1	1	0	0	1	-1	10	
200	x_2	0	1	0	-1	2	2	
ZJ		300	200	0	100	100	Max Z= 3400	
Z		0	0	0	-100	-100		

On calcule le tableau suivant :

C.J		300	200	0	0	0	B.rayon $b_i' = b_i + \Delta S2$	RI
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	s_1	0	0	1	1	-3	6+Δ	
300	x_1	1	0	0	1	-1	10+Δ	
200	x_2	0	1	0	-1	2	2-Δ	
ZJ		300	200	0	100	100	Max Z= 3400+100Δ	
Z		0	0	0	-100	-100		

Exemple

$b_2' = b_2 + \Delta S2 \rightarrow b_1' = 6 + \Delta * 1 = 6 + \Delta$

La solution optimale reste réalisable tant que :

$6 + \Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -6$
$10 + \Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -10$
$2 - \Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \leq 2$
Donc $-6 \leq \Delta \leq 2$

Donc, pour déterminer l'intervalle de réalisabilité (domaine de validité du coût marginal) :

$b_2' = 22 + \Delta \rightarrow 16 \leq b_2' \leq 24$

Ce changement entrainera une modification de la valeur de fonction d'objectif

$$\text{Max Z} = 3400 + 100\Delta => \begin{cases} \text{Max Z} = 3400 + 100 * (-6) = 2800 \\ \text{Max Z} = 3400 + 100 * (2) = 3600 \end{cases}$$

Donc, on trouve que l'intervalle de la valeur de la fonction d'objectif c'est : $2800 \leq Z \leq 3600$

On applique les mêmes étapes pour les autres coefficients qui correspond aux d'autre contraintes.

4.6.3 La relation entre l'analyse de sensibilité et la dualité

Les coefficients de la fonction objectif du primal correspondent aux secondes membres des contraintes du dual et inversement. Donc, faire varier le second membre des contraintes du primal revient à faire varier les coefficients de la fonction d'objectif du dual et inversement.

Conclusion

Ce chapitre a permis d'explorer deux concepts fondamentaux en recherche opérationnelle qui sont la dualité et l'analyse de sensibilité. La dualité permet de mieux comprendre un problème de programmation linéaire en mettant en relation le problème primal et son dual. Aussi, la dualité donne une interprétation économique des contraintes et des variables. Dans le deuxième volet du chapitre, l'analyse de sensibilité évalue l'impact des changements dans les données du problème sur la solution optimale. Ensemble, ces deux méthodes aident les utilisateurs à mieux prendre des décisions robustes et informées pour résoudre des problèmes

Chapitre V

Les Problèmes linéaires en nombres entiers : méthode des coupes

Chapitre V : Les Problèmes linéaires en nombres entiers : méthode des coupes

Introduction

Dans de nombreux problèmes d’optimisation du monde réel, les décisions à prendre sont de nature discrète : affecter des ressources limitées, planifier des tâches, ou déterminer des investissements. Ces situations ne peuvent être modélisées de manière efficace par la programmation linéaire classique lorsque les variables de décision doivent impérativement prendre des valeurs entières. La programmation linéaire en nombre entier (PLNE) s’impose alors comme un outil puissant permettant de modéliser et résoudre ces problèmes avec rigueur. Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux de la PLNE, ses principales méthodes de résolution, ainsi que des exemples concrets illustrant son utilité dans divers domaines tels que la logistique, la production ou la gestion de projets.

5.1 Définition d’un programme linéaire en nombre entier PLNE

La programmation Linéaire en Nombres Entiers PLNE est un cas spécial des problèmes d’optimisation où toutes les variables doivent avoir des valeurs entières et parfois même binaires (0-1), et cela est dû à la nature que représentent ces variables (Schrijver, 1998).

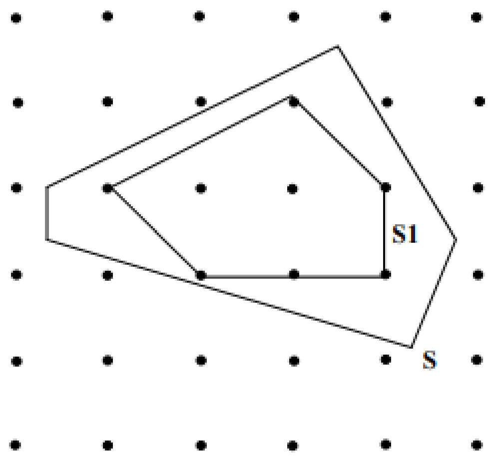


Figure 2: la différence entre la solution S et la solution en nombre entier S1

Les problèmes linéaires en nombres entiers (PLNE) sont des problèmes d'optimisation où certaines ou toutes les variables doivent prendre des valeurs entières.

La méthode des coupes (ou méthode de Gomory) est une technique pour résoudre ces problèmes en ajoutant progressivement des contraintes (coupes) pour éliminer les solutions non entières tout en conservant les solutions entières admissibles. Le but de ce chapitre et de savoir modéliser des problèmes, savoir utiliser des solveurs et même savoir comment les solveurs marchent à l’intérieur.

5.2 L’importance de la méthode PLNE

La programmation linéaire en variables entières est très importante, car la plupart des problèmes réels comportent des variables qui doivent, par nature, prendre nécessairement une valeur entière. Si l'on recherche le par exemple le nombre de personnes qui doivent travailler sur une certaine tâche à un instant donné, il importe peu que la solution optimale du problème en variables continues indique que 342.35 personnes sont nécessaires, car la partie fractionnaire est négligeable par rapport à la partie entière. Par contre, si une variable représente l'existence ou l'absence d'une usine, ou un nombre faible de navires destinés au transport de certaines marchandises, la solution d'un problème de PL qui donnerait 0.44 usine ou 3,55 navires n'est pas satisfaisante.

Pour cela, Si on essaie d'arrondir à une valeur entière voisine, il se peut que la solution ainsi trouvée soit éloignée de la solution optimale, ou même ne soit pas réalisable.

Dans de telles situations, il est donc souhaitable de pouvoir utiliser une méthode plus raffinée que la méthode du simplexe.

5.3 La formulation générale d'un PLNE

Rappelons la formulation d'un programme linéaire :

$$\begin{cases} MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La formulation d'un programme en nombres entiers la rassemble ; mais maintenant on a aussi des variables qui doivent prendre les valeurs entières :

$$\begin{cases} MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{p} f_k y_k \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + \sum_{k=1}^{p} d_{ik}\, y_k \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \\ y_k \in \mathbb{Z}_+, k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Ici, $\mathbb{Z}$ veut dire l'ensemble des nombres entiers, et $\mathbb{Z}_+$ veut dire l'ensemble des nombres entiers non-négatifs.

La différence entre PL et PLNE

Le tableau suivant présente les différences entre programme linéaire et programme linéaire en nombre entier :

Programme linéaire	Programme linéaire en nombre entier
Variables réelles (continues)	Variables entières (discrètes)
Solution optimale peut être fractionnaire	Solution optimale doit être entière
Résolution efficace avec l'algorithme du simplexe	Résolution plus complexe (NP-difficile)

5.4 Les étapes de la programmation linéaire en nombre entier

La programmation en nombres entiers est une méthode de programmation linéaire qui consiste à trouver la solution optimale d'un programme linéaire de manière à ce que la solution optimale contienne des variables à valeurs entières, ce qui nécessite de passer par plusieurs étapes :

- Première étape : Recherche de la solution optimale selon le programme original, si on trouve une solution optimale dont les variables n'ont pas de valeurs entières, on passe à la deuxième étape.

- La deuxième étape : elle est appelée branchement, dans laquelle de nouvelles contraintes sont ajoutées au programme original, dans le but d'obtenir une solution optimale dont les variables prennent des valeurs correctes, et le processus d'ajout de contraintes continue jusqu'à atteindre une solution optimale dont les variables prennent des valeurs correctes, et il y a deux méthodes, la première est la méthode branch and bound et la seconde est la méthode Cut, et comme la première méthode est la plus courante et la plus facile, nous nous limiterons à elle.

5.5 La méthode graphique de résolution du programme linéaire en nombres entiers

Afin d'illustrer la méthode de résolution graphique pour ce type de modèle, nous utiliserons l'exemple suivant d'un programme linéaire en nombres entiers

Exemple : Soit le programme linéaire suivant :

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

La question : résoudre le programme par la méthode graphique

La solution :

La méthode graphique de résolution de ce type de programme est basée sur la détermination de la solution optimale du programme selon la méthode utilisée pour résoudre les modèles de programmation linéaire (c'est-à-dire sans tenir compte de la dernière condition du programme ci-dessus), de sorte que si les valeurs des variables de base du modèle dans la solution optimale sont des entiers, il s'agit également d'une solution optimale de la programmation linéaire en nombres entiers. Toutefois, si la solution obtenue contient des nombres non entiers, de nouvelles techniques doivent être introduites pour optimiser la solution et rechercher la solution numérique correcte du programme.

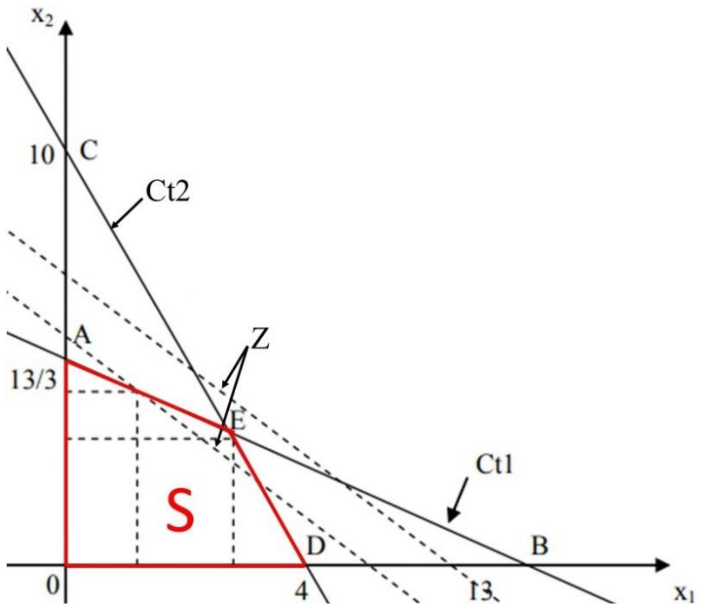
- Déterminer la solution optimale du programme sans tenir compte de la condition des nombres entiers. A ce stade, la représentation graphique de la solution du programme est préparée comme suit :

La forme standard :

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 13 \Rightarrow A\left(0,\dfrac{13}{3}\right); B(13{,}0) \\ 5x_1 + 2x_2 = 20 \Rightarrow C(0{,}10); D(4{,}0) \end{cases}$$

Figure 3:la représentation graphique



A travers ce dessin, la zone OAED c'est la zone des solutions réalisable qui ne sont pas conditionnelles à être des entiers, et le point de solution optimale c'est le point E, il s'agit du point d'intersection des lignes de contraintes du programme Ct1 et Ct2 pour lesquelles les valeurs suivantes sont estimées : Z*= 282/13 = 21,69. $x_1 = \frac{34}{13}, et x_2 = \frac{45}{13}$.

Pour obtenir une solution optimale avec des nombres entiers acceptables, certains peuvent approximer les valeurs de la solution optimale non entiers Z*= 282/13 = 21,69. $x_1 = \frac{34}{13}, et x_2 = \frac{45}{13}$ vers les Z valeurs entiers $Z = 18$ $avec$ $x_1 = 2, et x_2 = 3$.

Cependant, cette solution est mais n'est pas optimale, et il existe une meilleure solution qui est déterminée en déplaçant la ligne de la fonction objective vers le bas, puisque l'objectif est la région de solution et que la solution optimale se trouve au premier point ayant des coordonnées entières pour x1 et x2, dans le cas présent au point (1,4)

Donc, la solution optimale c'est $Z = 19\ avec\ x_1 = 1, et\ x_2 = 4$

Nous appelons alors ce point l'optimisation numérique correcte du programme.

Remarque :

Nous notons que la valeur de la fonction objective d'un modèle de programmation en nombres entiers est toujours inférieure ou égale à la valeur de la fonction objective du modèle de programmation linéaire correspondant.

En utilisant la méthode simplexe, la solution est comme suite :

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

La forme standard :

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 + s_1 = 13 \\ 5x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

La solution de base : $x_1 = x_2 = 0, s_1 = 13, s_2 = 20, MaxZ = 0$

Tableau 1 :

C.J		3	4	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2		
0	s_1	1	3	1	0	13	13/3
0	s_2	5	2	0	1	20	10
ZJ		0	0	0	0	Max Z= 0	
Z		3	4	0	0		

La condition de la négativité n'est pas confirmée, donc on passe le tableau suivant

$MaxZ = \{3{,}4\} = 4 \rightarrow x_2$ C'est la variable entrante,

$Min\ \theta = \left\{\frac{13}{3}; 10\right\} = 13/3 \rightarrow s_1$ C'est la variable sortante

Tableau 2 :

C.J		3	4	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2		
4	x_2	1/3	1	1/3	0	13/3	13/3
0	s_2	13/2	0	-2/3	1	34/3	34/13
ZJ		4/3	4	4/3	0	Max Z= 52/3	
Z		5/3	0	-4/3	0		

La condition de la négativité n'est pas confirmée, donc on passe le tableau suivant

$MaxZ = \left\{\frac{5}{3}, 0\right\} = 5/3 \rightarrow x_1$ C'est la variable entrante,

$Min\ \theta = \left\{\frac{13}{3}; \frac{34}{13}\right\} = 34/13 \rightarrow s_2$ C'est la variable sortante

Tableau 3 :

C.J		3	4	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2		
4	x_2	0	1	15/39	-1/13	135/39	
3	x_1	1	0	-2/13	3/13	34/13	
ZJ		3	4	42/39	5/13	Max Z= 282/13	
Z		0	0	-42/39	-5/13		

La condition de la négativité est confirmée, donc la solution optimale c'est $X^* = \{x_1^*, x_2^*\} = \left\{\frac{34}{13}; \frac{135}{39}\right\} avec\ MaxZ = \frac{282}{13}$,

En fait, la solution graphique pour ce type de modèles est considérée comme la meilleure et la plus facile, mais dès que le nombre de variables du modèle dépasse deux variables, elle devient inapplicable et nous sommes obligés de recourir à d'autres méthodes de solution, à savoir l'utilisation de la méthode mathématique selon les règles du Simplexe à l'aide de certaines techniques, que nous abordons dans les méthodes suivantes.

5.5.1 La méthode de Gomory

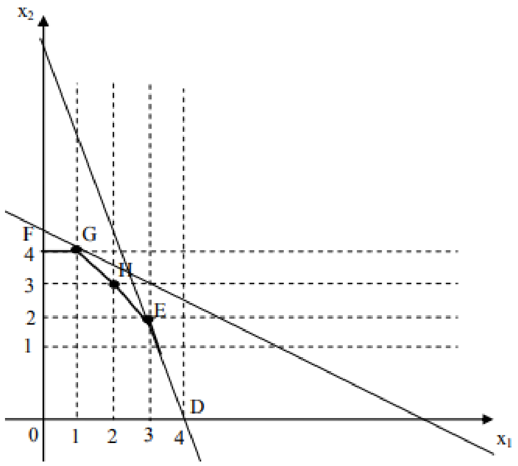
Définition de la méthode Gomory

La méthode de Gomory, développée par Ralph Gomory en 1958 (Gomory, 1958), est une technique classique pour résoudre des problèmes de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE). Elle repose sur l'ajout progressif de contraintes de coupe (appelées coupes de Gomory) au problème relaxé (sans contraintes d'intégrité) afin d'éliminer les solutions fractionnaires tout en conservant les solutions entières admissibles.

Exemple

Nous allons d'abord essayer de comprendre le principe de cette méthode graphiquement à travers la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** , alors que l'espace des solutions de la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** est la région OAED, qui est la région des solutions possibles pour le modèle de programmation linéaire correspondant (sans la condition des nombres entiers), et la solution optimale est l'une des solutions qui se trouvent sur les sommets de ce polygone, et parmi ces sommets nous remarquons que seuls les points O et D représentent une solution des nombres entiers.

Figure 4



Supposons que nous créons un autre polygone à l'intérieur du polygone précédent (OAED) qui contient toutes les solutions entières (OFGED), cela signifie qu'une solution optimale à un modèle de programmation en nombres entiers peut être trouvée en utilisant la méthode du Simplexe uniquement en ajoutant les contraintes nécessaires qui expriment les limites du nouveau polygone, à savoir les contraintes avec les nouvelles lignes : ED, GE, FG et le modèle obtenu possède les deux propriétés suivantes :

- Toute solution entière possible du modèle linéaire correspondant est également une solution possible du modèle de programmation en nombres entiers.

- Tous les sommets des polygones des solutions du modèle de programmation en nombres entiers sont des solutions en nombres entiers possibles.

Ces deux propriétés nous permettent de conclure qu'une solution optimale à un modèle de programmation en nombres entiers est une solution optimale en nombres entiers au modèle de programmation linéaire correspondant.

Dans la pratique, il n'est pas facile de créer un polygone contenant toutes les solutions entières dans les modèles comportant un grand nombre de variables. La méthode précédente consiste donc à créer une nouvelle contrainte (ou un hyperplan) à partir de la solution optimale originale (qui ne contient pas de nombres entiers), puis à résoudre le modèle obtenu par la méthode du simplexe, et ainsi de suite jusqu'à ce que la solution optimale contienne toutes les valeurs entières dont nous avons besoin, ce qui signifie que nous avons besoin de plusieurs hyperplans ayant les propriétés suivantes : ils réduisent le nombre de charges possibles du modèle de programmation linéaire correspondant :

- Réduit le nombre de solutions possibles au modèle de programmation linéaire correspondant.

- Les lignes de contraintes supplémentaires passent par toutes les solutions entières possibles.

- la région des solutions possibles englobe toutes les charges utiles entières du modèle de programmation linéaire correspondant.

- Après plusieurs étapes progressives d'application des niveaux catégoriels, nous obtenons finalement un modèle qui contient une solution optimale entière.

Il nous reste maintenant à savoir comment trouver l'expression mathématique des contraintes supplémentaires. Pour ce faire, nous allons reprendre l'exemple précédent et prendre la solution optimale dans le tableau (3). Ensuite, nous créons la première contrainte supplémentaire par la forme d'une des contraintes de la solution optimale comme suit :

- Nous choisissons la variable de base dont la valeur dans la solution optimisée a la plus grande partie fractionnaire$\left(\left(\frac{135}{39} = 3 + \frac{18}{39}\right) et \left(\frac{34}{13} = 2 + \frac{8}{13}\right)\right) et \left(\frac{18}{39} < \frac{8}{13}\right)$, disons x1.

La contrainte pour cette variable dans l'optimisation est :

$$x_1 + 0x_2 - \left(\frac{2}{13}\right)s_1 + \left(\frac{3}{13}\right)s_2 = \frac{34}{13}$$

Nous appelons la partie entière d'un nombre réel le plus grand nombre entier inférieur ou égal à ce nombre, par exemple, la partie entière du nombre 3,8 est 3 , -8 est la partie entière pour -7,3 ainsi de suite pour tous les nombres réels, et nous appelons la partie fractionnaire d'un nombre réel la différence entre ce nombre et sa partie entière, par exemple la partie fractionnaire du nombre 3,8 est 0,8 (3,8 -3=0,8) et 0,7 pour -7,3 (-7,3 –(-8)=0,7), ce qui signifie que la partie fractionnaire est toujours positive.

Nous séparons chacun des coefficients de cette contrainte en une partie entière et une partie fractionnaire comme suit :

$$x_1 + \left(-1 + \frac{11}{13}\right)s_1 + \left(0 + \frac{3}{13}\right)s_2 = \left(2 + \frac{8}{13}\right)$$

$$=> x_1 = -\left(-1 + \frac{11}{13}\right)s_1 - \left(0 + \frac{3}{13}\right)s_2 + \left(2 + \frac{8}{13}\right)$$

Nous séparons maintenant les parties entières des parties fractionnaires de la manière suivante :

$$x_1 = (s_1 - 0\, s_2 + 2) + \left(-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2 + \frac{8}{13}\right)$$

Ainsi, pour une solution numérique valide, le terme $(s_1 - 0\, s_2 + 2)$ sera un entier, donc si nous voulons que x_1 soit un entier, le second terme $\left(-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2 + \frac{8}{13}\right)$ doit être un entier.

Nous constatons ici que le nombre $\frac{8}{13}$ est un nombre positif inférieur à 1 et l'expression $\left(-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2\right)$est un chiffre négatif. Si l'expression $\left(-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2 + \frac{8}{13}\right)$ est un chiffre positif, donc elle va être inévitablement inferieur a 1, donc impossible d'être un chiffre entier. Pour cela, si nous voulons que cette expression soit un nombre entier, nous aurons plus de chance si nous la rendons négative, c'est-à-dire :

$$-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2 + \frac{8}{13} \leq 0$$

De cette manière, nous avons défini la première coupe. Avant d'introduire la coupe comme contrainte dans le nouveau modèle, les variables supplémentaires doivent être remplacées par les vraies variables du modèle, que nous avons dans le modèle original :

$x_1 + 3x_2 + s_1 = 13 => s_1 = 13 - x_1 - 3x_2$

$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 => s_2 = 20 - 5x_1 - 2x_2$

On remplace les variables dans la contrainte précédentes

$$-\frac{11}{13}s_1 - \frac{3}{13}s_2 + \frac{8}{13} \leq 0 => -\frac{11}{13}(13 - x_1 - 3x_2) - \frac{3}{13}(20 - 5x_1 - 2x_2) + \frac{8}{13} \leq 0$$

⇨ $2x_1 + 3x_2 \leq 15$

En ajoutant ce contrainte, la zone des solutions va être limiter encore plus en éliminant la zone des solution non entiers :

Donc le programme devient comme suit :

$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$

$$s/c\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

En utilisant la méthode SIMPLEXE, la solution sera :

C.J		3	4	0	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
4	x_2	0	1	0	-2/11	5/11	35/11	
0	s_1	0	0	1	3/11	-13/11	8/11	
3	x_1	1	0	0	3/13	-2/11	30/11	
ZJ		3	4	0	1/11	14/11	Max Z= 230/11	
Z		0	0	0	-1/11	-14/11		

Nous choisissons à nouveau un plan coupe en sélectionnant à nouveau x1 car il a la plus grande partie fractionnaire $\left(\left(\frac{30}{11} = 2 + \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}\right) et \left(\frac{35}{11} = 3 + \frac{2}{11}\right) et\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}} > \frac{2}{11}\right)\right)$ et, comme précédemment, nous sélectionnons la contrainte :

$$x_1 + \frac{3}{11}s_2 - \frac{2}{11}s_3 = \frac{30}{11}$$

$$x_1 + \left(0 + \frac{3}{11}\right)s_2 + \left(-1 + \frac{9}{11}\right)s_3 = 2 + \frac{8}{11}$$

$$x_1 = (s_3 + 2) + \left(-\frac{3}{11}s_2 - \frac{9}{11}s_3 + \frac{8}{11}\right)$$

C'est ici que nous obtenons la nouvelle contrainte :

$$-\frac{3}{11}s_2 - \frac{9}{11}s_3 + \frac{8}{11} \leq 0$$

En remplaçant les valeurs réelles du modèle, on obtient la contrainte suivante :

$$3x_1 + 3x_2 \leq 17$$

Donc le programme linéaire devient comme suit :

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

En utilisant la méthode SIMPLEXE, en suivant les mêmes étapes précédentes, on arrive à la solution suivante :

C.J		3	4	0	0	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
4	x_2	0	1	0	0	1	-2/3	11/3	
0	s_2	0	0	0	1	3	11/3	8/3	
3	x_1	1	0	0	0	-1	1	2	
0	s_1	0	0	1	0	-2	1	0	
ZJ		3	4	0	0	1	1/3	Max Z= 62/3	
Z		0	0	0	0	-1	-1/3		

Nous constatons que nous avons obtenu une solution optimale où la valeur de x_1 est un entier, nous reprenons donc la variable de base x_2 et sa contrainte, et en suivant les mêmes étapes que précédemment, nous obtenons la nouvelle contrainte :

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

Donc, on ajoute cette contrainte à l'ancien programme pour avoir le nouveau programme :

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0\,; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

En utilisant la méthode SIMPLEXE, en suivant les mêmes étapes précédentes, on arrive à la solution suivante :

C.J		3	4	0	0	0	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5		
4	x_2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	4	
0	s_2	0	0	3/2	1	0	0	-13/2	7	
0	s_3	0	0	-1/2	0	1	0	-3/2	1	
0	s_4	0	0	0	0	0	1	-3	2	
3	x_1	1	0	-1/2	0	0	1	3/2	1	
ZJ		3	4	1/2	0	0	0	5/2	Max Z= 19	
Z		0	0	-1/2	0	0	0	-5/2		

A travers ce tableau, nous avons trouvé une solution numérique optimale telle que les valeurs de toutes les variables de décision sont des entiers (y compris les variables d'écart, bien que ces dernières ne soient pas tenues d'être des entiers), de sorte que nous pouvons être satisfaits si nous n'obtenons que des entiers pour les variables clés du modèle x_1 et x_1 et que la solution optimale est la suivante :

$$x_1 = 1, x_2 = 4 \; avec \; Max \; Z = 19$$

5.5.2 La méthode de Branch and Bound

La méthode du « Branch and Bound » ou séparation et évaluation est une méthode introduite par Land and Doig (Land & Doig, 1960). C'est et une méthode qui utilise deux concepts : le branchement qui consiste à diviser un ensemble de solutions en sous-ensembles et l'évaluation qui consiste à borner ou minorer les solutions.

Dans le cas des PLNE, la méthode du "Branch and Bound" commence par résoudre la relaxation linéaire du programme linéaire, c'est à dire en enlevant les conditions d'intégralité sur les variables. Cette évaluation est toujours inferieure a la valeur de la solution optimale du PLNE, puisque toute solution du PLNE est une solution de la relaxation linéaire. Par conséquent si la solution optimale de la relaxation linéaire est entière, alors c'est une solution optimale du PLNE. Sinon, on effectue une opération de branchement en choisissant une variable x_i^* non entière dans la solution optimale du programme linéaire que l'on a résolu. L'ensemble des solutions se divise alors en deux, celles pour lesquelles $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ et celles pour lesquelles $x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$(Bouzgarrou, 1998). On évalue ensuite les nouveaux nœuds et éventuellement on élague ceux qui sont inutiles. Un nœud peut être élague dans trois cas possibles :

- Le programme linéaire n'est pas réalisable.

- La valeur de la solution est supérieure à la valeur de la meilleure solution réalisable trouvée, dans ce cas il est inutile de continuer la recherche dans la sous-arborescence enracinée en ce nœud, puisque les bornes inferieures obtenues sont strictement croissantes suivant la profondeur de l'arbre du "Branch and Bound".

- La solution est entière, donc réalisable

Exemple explicatif : Trouvez la solution optimale pour le programme suivant :

$\text{MaxZ} = 20x_1 + 2x_2$

$$s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1, x_2 \geq 0; \\ \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Deuxième tableau du SIMPLEXE :

C.J		20	2	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1		
20	x_1	1	5/2	1/4	11/2	
ZJ		20	50	5	Max Z= 110	
Z		0	-48	-5		

La solution optimale $x_1 = \frac{11}{2}$; $x_2 = 0$ $avec\ MaxZ = 110$

Notez que x_1 est une valeur non entière, qui peut être écrite comme suit : $5 < x_1 < 6$, donc On peut déduire deux contraintes qui sont $x_1 \leq 5$, et $x_1 \geq 6$.

Pour cela, le programme initial se divise en deux programmes, le premier étant constitué du programme initial et de la première contrainte qui est $x_1 \leq 5$ et le deuxième est constitué du programme initial et de la deuxième contrainte qui est $x_1 \geq 6$

Programme 1	Programme 2
$\text{MaxZ} = 20x_1 + 2x_2$ $s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$	$\text{MaxZ} = 20x_1 + 2x_2$ $s/c\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$ Programme non réalisable

La solution du programme 1

C.J		20	2	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2		
2	x_2	0	1	1/10	-2/5	1/5	
20	x_1	1	0	0	1	5	
ZJ		20	2	1/5	96/5	Max Z= 502/5	
Z		0	0	-1/5	-96/5		

La solution optimale c'est $Z = \frac{502}{5} avec\ x_1 = 5\ et\ x_2 = \frac{1}{5}$

A travers ce programme, on trouve que x_2 n'a pas une valeur entière et on peut l'écrire dans la forme suivante :

$$0 < x_2 < 1$$

Pour cela, on déduit les deux contraintes $x_2 \leq 0$, et $x_2 \geq 1$. La contrainte $x_2 \leq 0$n'est pas acceptable à cause de la contrainte de la non négativité.

Programme 3	Programme 4
$\text{MaxZ} = 20x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$	$\text{MaxZ} = 20x_1 + 2x_2$ $s/c \begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0; \{x_1, x_2\} \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$ Programme non réalisable

La solution du programme 3

C.J		20	2	0	0	0	B.rayon	θ
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
20	x_1	1	0	1/4	0	10/4	3	
0	s_2	0	0	-1/4	1	-10/4	2	
2	x_2	0	1	0	0	-1	1	
ZJ		20	2	5	0	48	Max Z= 62	
Z		0	0	-5	0	-48		

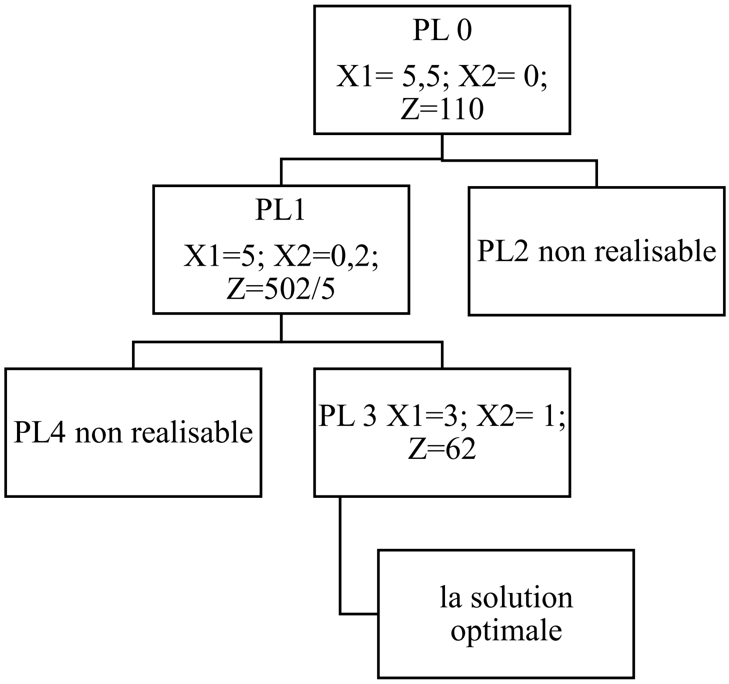
La solution optimale : $Z = 62 avec\ x_1 = 3\ et\ x_2 = 1$

On trouve maintenant que toutes les variables sont maintenant des entiers, donc cette solution est appelée la solution de la borne inferieure, et que toutes les autres solutions qui n'ont pas donnée de valeurs entières aux variables sont annulées.

Cette solution de la borne inférieure est la solution optimale du programme original en nombres entiers.

La figure suivante montre les branches dérivées du programme original jusqu'à l'obtention de la solution optimale. La conclusion est que si la solution optimale du programme original - le cas de maximisation - a des variables qui ne sont pas des nombres entiers , le branchement se poursuit selon la méthodologie de l'exemple précédent, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale dont les variables sont des nombres entiers, et cette solution est la solution de la borne inférieure, et tous les autres programmes de branchement sont annulés, y compris ceux qui ont conduit à des charges utiles entières mais dont la valeur de la fonction calculée est inférieure à la valeur de la fonction de la solution de la borne inférieure. Dans le cas de la minimisation, la méthode est la même, sauf que la solution du programme original est la solution de la borne inférieure et la solution du programme entier final est la solution de la borne supérieure.

Figure 5: Déroulement de l'algorithme Branch and Bound



Conclusion

Les problèmes linéaires en nombres entiers (PLNE) jouent un rôle essentiel en optimisation discrète, mais leur résolution peut s'avérer complexe en raison de leur nature combinatoire. La méthode des coupes, introduite par Gomory, offre une approche systématique pour renforcer la relaxation linéaire en ajoutant des contraintes qui éliminent les solutions fractionnaires tout en conservant les solutions entières. Cette méthode présente l'avantage de s'intégrer naturellement dans l'algorithme du simplexe, permettant une résolution itérative et progressive du problème. Cependant, son efficacité dépend fortement de la génération de coupes pertinentes et peut être limitée pour des problèmes de grande taille, où des techniques hybrides (comme la combinaison avec des méthodes arborescentes) sont souvent nécessaires.

En conclusion, la méthode des coupes constitue un outil théorique et pratique fondamental pour l'optimisation en nombres entiers, bien que son utilisation optimale requière une compréhension approfondie des propriétés polyédrales du problème. Son association avec d'autres approches, comme les algorithmes de Branch-and-Cut, en fait une pierre angulaire des méthodes modernes de résolution des PLNE.

Chapitre VI : Les problèmes de transport

Chapitre VI : Le problème de transport

Introduction

Le problème du transport est l'une des méthodes mathématiques les plus importantes pour aider à la prise de décision concernant le déplacement d'une quantité de matériaux (marchandises) de leurs sources de fabrication ou de leurs entrepôts vers plusieurs centres afin de répondre aux besoins de ces centres au coût le plus bas.

Le « problème de transport » fait référence à une classe particulière de problèmes de programmation linéaire portant sur la distribution d'un produit unique depuis diverses sources d'approvisionnement jusqu'à divers points de demande de manière à minimiser les coûts totaux de transport. Il a été étudié pour la première fois par Hitchcock en 1941(Hitchcock, 1941) , puis séparément par T. C. Koopmans dans son article intitulé «optimum utilisation of transportation system » publié en 1949(Koopmans, 1949) , et enfin placé dans le cadre de la programmation linéaire et résolu par la méthode du simplexe par G. B. Dantzig en 1951 (Dantzig, 1951). Depuis lors, des méthodes de résolution améliorées ont été développées et le champ d'application a été régulièrement élargi. Elle est aujourd'hui reconnue comme l'un des principaux outils d'analyse et de planification dans le monde des affaires et de l'industrie dans le monde des affaires et de l'industrie.

6.1 Modèle de transport

Le problème du transport est un type particulier de problème d'optimisation de réseau. Il possède une structure de données spéciale en solution, caractérisée par un graphe de transport. Les modèles de transport jouent un rôle important dans la logistique et les chaînes d'approvisionnement. Le problème porte essentiellement sur la détermination d'un plan de coûts pour le transport d'une seule marchandise d'un certain nombre de sources à un certain nombre de destinations. L'objectif est de minimiser le coût de l'expédition des marchandises d'un endroit à un autre de manière à ce que les besoins de chaque zone d'arrivée soient satisfaits et que chaque lieu d'expédition fonctionne dans les limites de sa capacité. Il s'agit de trouver le meilleur moyen de répondre à la demande de points de demande N en utilisant les capacités de points d'approvisionnement M.

Le modèle de transport se compose de :

1. la source : Le centre de la matière à transporter ou à distribuer.

2 - Destination : Le point vers lequel le matériel doit être transporté.

3 - Les commandes : Les besoins d'une destination en matériaux provenant de différentes sources.

4 - Les stocks : Les matériaux disponibles dans une source unique qui doivent être transportés ou distribués vers différentes destinations.

5 - Le coût du transport d'un seul article d'une source à une destination.

6 - Nombre de matériaux à transporter d'une source à une destination.

6.2 La présentation linéaire du problème de transport :

On considère :

• m : sources (ou origines), telles que des usines ou des entrepôts, chacune disposant d'une quantité disponible donnée ;

• n : destinations (ou points de demande), telles que des marchés ou des clients, chacune nécessitant une quantité déterminée ;

• Un coût unitaire de transport associé à chaque liaison entre une source et une destination.

L'objectif est de décider combien d'unités de produit doivent être expédiées de chaque source vers chaque destination afin de satisfaire toutes les demandes au moindre coût possible.

Soit :

Les variables de décisions :

$$x_{ij} = quantité\ transportée\ de\ la\ source\ i\ vers\ la\ destination\ j$$

Avec :

$$x_{ij} \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, m\ j = 1, \ldots, n$$

La fonction d'objectif :

La fonction d'objectif consiste à minimiser le coût total de transport :

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Où :

- c_{ij} Représente le coût unitaire de transport entre la source i et la destination j

Les contraintes :

- L'offre :

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i\ \forall i = 1, \ldots, m$ (La quantité totale expédiée à partir de chaque source ne doit pas dépasser sa capacité disponible, a_i est l'offre disponible à la source i)

- La demande :

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j\ \forall j = 1, \ldots, n$ (La quantité totale reçue par chaque destination doit satisfaire exactement sa demande)

- La non-négativité :

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

6.3 Méthodes de résolution des problèmes de transport

Les problèmes de transport peuvent être résolus de l'une des manières suivantes :

1) La méthode de l'angle nord-ouest" the Northwest corner ".
2) La méthode des moindres coûts « the least costs method »

3) La méthode d'approximation de Vogel (VAM) « the Vogel's Approximation Method »

Ces trois méthodes donnent un état de base (initial) du problème. Nous verrons ensuite comment trouver la solution optimale.

6.3.1 La méthode de l'angle nord-ouest

La méthode de l'angle nord-ouest est l'une des méthodes mathématiques les plus simples pour résoudre les problèmes de transport, mais elle ne permet souvent pas d'obtenir la solution optimale pour un problème de transport donné.

Les étapes à suivre

On choisit la case (1,1), située au coin nord-ouest du tableau de transport, et on lui affecte la quantité $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) Si $x_{11} = a_1$, alors la quantité de A1 est entièrement transporté et ceci sature la première ligne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera b_1 par $(b_1 - x_{11})$et on répétera la même procédure que précédemment.

b) Si $x_{11} = b_1$, alors la demande du point de distribution B_1 est entièrement satisfaite par A_1 et ceci sature la première colonne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera a_1 par $(a_1 - x_{11})$et on répétera la même procédure que précédemment.

De cette manière, après (m+n-1) opérations, on trouve (m+n-1) quantités positives x_{ij} affectées à (m+n-1) cases, et les cases restantes auront des quantités nulles $x_{ij} = 0$, on obtiendra ainsi un plan basique de transport.

Exemple explicatif

Une entreprise a 3 entrepôts dans trois endroits différents et au même temps elle 3 centres commerciaux. Les coûts de transport d'une unité de marchandises en dz, le volume de marchandises stockées dans chaque entrepôt et les besoins de chaque centre de commercialisation sont indiqués dans le tableau suivant :

	D_1	D_2	D_3	L'offre
S_1	5dz	1 dz	8 dz	12
S_2	2 dz	4 dz	0 dz	14
S_3	3 dz	6 dz	7 dz	4
La demande	9	10	11	30

La question : Quel est le coût total du transport des sources aux centres en utilisant la méthode de l'angle nord.

La solution :

Tout d'abord, il est important de s'assurer que la condition d'équilibre est remplie, c'est-à-dire que l'offre totale disponible dans les sources est égale à la demande totale des centres de commercialisation :

9+10+11=12+14+4=30

En appliquant la méthode de l'angle nord-ouest on trouve :

$S_1D_1 = \min\{12{,}9\} = 9$;

$S_1D_2 = \min\{12 - 9{,}10\} = 3$;

$S_2D_2 = \min\{14{,}10 - 3\} = 7$;

$S_2D_3 = \min\{11{,}14 - 7\} = 7$;

$S_33 = \min\{4{,}11 - 7\} = 4$;

	D_1	D_2	D_3	L'offre
S_1	5dz **(9)**	1 dz **(3)**	8 dz	12
S_2	2 dz	4 dz **(7)**	0 dz **(7)**	14
s	3 dz	6 dz	7 dz **(4)**	4
La demande	9	10	11	30

Donc, le coût de transport est calculé comme suite :

Coût= 5*9 + 3*1 + 4*7 + 0*7 + 4*7 = 104

6.3.2 La méthode des moindres coûts

L'un des inconvénients de la méthode de l'angle nord-ouest est qu'elle ne permet pas de tirer parti du coût inférieur d'un problème de transport donné lorsqu'il s'agit de répondre aux besoins des centres de demande.

La méthode du moindre coût (MMC) a été développée par F.L. Hitchcock pour remédier à ce type d'inconvénient dans les modèles de transport (Hossain & Ahmed, 2020). La MMC recherche et se concentre sur le coût le plus bas disponible dans le programme de transport et détermine ensuite les côtés de l'offre et de la demande. L'idée consiste à exploiter les cases ayant des coûts de transport faibles et leur attribuer les quantités maximales (dans la mesure du possible). On procède de la manière suivante :

1. Repérer la case du tableau ayant le coût le plus faible ;
2. Affecter à cette case la quantité maximale possible ; une colonne ou une ligne est saturée :
3. Si une colonne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la ligne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau ;
4. Si une ligne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la colonne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau ;

Nous utiliserons notre exemple précédent pour illustrer les principales étapes de la méthode du moindre coût.

	D_1	D_2	D_3	L'offre
S_1	5dz	1 dz	8 dz	12
S_2	2 dz	4 dz	0 dz	14
S_3	3 dz	6 dz	7 dz	4
La demande	9	10	11	30

Nous constatons que le coût le plus bas dans le tableau de transport ci-dessus est 0, ce qui correspond à la source S2 et au centre commercial D3. Nous comparons donc ce dont la source S2 dispose avec ce dont le centre de demande D3 a besoin, puis nous choisissons la plus basse des deux quantités et l'attribuons à la cellule (S2, D3).

Moindre cout : 0 : (D3, S2) ➔ Min (11,14) = 11

Moindre cout :1 : (D2,S1) ➔Min (10,12) = 10

Moindre cout :2 : (D1,S2) ➔Min (9,14-11=3) = 3

Moindre cout :3 : (D1,S3) ➔Min (9-3,4) = 4

Moindre cout :4 : (D2,S2) ➔Min (0,0) = 0

Moindre cout :5 : (D1,S1) ➔Min (9-7,12-10) = 2

	D_1	D_2	D_3	L'offre
S_1	5dz **(2)**	1 dz **(10)**	8 dz	12
S_2	2 dz **(3)**	4 dz	0 dz **(11)**	14
S_3	3 dz **(4)**	6 dz	7 dz	4
La demande	9	10	11	30

Coût= 5*2+2*3+3*4+1*10+0*11= 38 dz

En utilisant cette méthode, les couts de transport sont moins chers que les couts de transports trouvés par la méthode de l'angle nord-ouest.

6.3.3 La méthode d'approximation de Vogel (VAM)

La méthode de Vogel est la plus importante des trois méthodes en raison de sa capacité à atteindre la solution optimale ou quasi-optimale et il est rare que les deux méthodes soit la méthode des moindres couts ou la méthode du Nord-Ouest soit meilleure que la méthode de Vogel. Cependant, la méthode de Vogel nécessite des calculs plus longs que les méthodes du moindre coût et de l'angle nord-ouest. Cette méthode a était développé par en 1958 par le chercheur william Reinhard Vogel (Soomro et al., 2015)

Les étapes pour trouver la solution de base initiale de cette manière sont résumées comme suit :

1 - Calculer la différence entre les deux coûts les plus bas de chaque ligne et de chaque colonne, et marquer ces différences de part et d'autre du tableau de solution.

2 - Déterminer la ligne ou la colonne présentant la plus grande différence de coût (pénalité la plus élevée).

3 - Sélectionner la cellule dont le coût est le plus bas dans cette ligne ou cette colonne.

4 - Dans la cellule sélectionnée à l'étape « 3 », nous comparons les besoins du centre avec ce qui est disponible dans la source pour prendre la valeur la plus basse.

5 - Calculer à nouveau la différence pour chacune des colonnes et des lignes et répéter le processus précédent jusqu'à ce que les besoins de tous les centres de demande soient satisfaits à partir des sources disponibles.

Remarque :

Si les différences entre les lignes et les colonnes sont égales, nous prenons la deuxième différence en enlevant la valeur la plus faible de la ligne et de la colonne et en prenant la différence suivante, mais si depuis le début toutes les différences entre les lignes et les colonnes sont égales à tous les stades, la méthode de Vogel échoue et nous prenons la méthode du moindre coût.

Exemple :

En utilise toujours l'exemple précédant :

	D_1	D_2	D_3	L'offre	La difference
S_1	5dz	1 dz	8dz	12	5-1=4
S_2	2 dz	4 dz	0dz	14	2-0=2
S_3	3 dz	6 dz	7 dz	4	6-3=3
La demande	9	10	11	30	
La difference	3-2=1	4-1=3	7-0=7		

La différence de coût entre les lignes et les colonnes est indiquée dans le tableau.

Condition :

Il faut que l'ensemble des différences entre les couts dans les lignes et les colonnes n'est pas la même :

$$(5-1)+(2-0)+(6-3) \neq (3-2)+(4-1)+(7-0)$$

* Notez que la troisième colonne présente la plus grande différence, qui est égale à « 7 »

* Nous recherchons le coût le plus bas dans la troisième colonne et nous trouvons que la cellule (D3, S2) a le coût le plus bas (0).

* Nous comparons les besoins du centre de demande D3 avec la quantité disponible dans la source S2 et choisissons ensuite la plus faible des deux quantités 11 =Min(11, 14)

	D_1	D_2	D_3	L'offre	La différence
S_1	5dz	1 dz	8dz 0	12	5-1=4
S_2	2 dz	4 dz	0dz **11**	~~14~~ 3	2-0=2
S_3	3 dz	6 dz	7 dz 0	4	6-3=3
La demande	9	10	~~11~~	30	
La différence	3-2=1	4-1=3	7-0=7		

$Max\{1,3,7,4,2,3\} = 7 \Rightarrow on\ selectionne\ la\ collone\ D_3$

$Min\{8,0,7\} = 0 => on\ selectionne\ la\ case\ (S_2D_3)$

$Min\{11,14\} = 11$

On répète l'opération mais on va exclure la colonne D_3

	D_1	D_2	D_3	L'offre	La différence
S_1	5dz	1 dz **10**	8dz 0	~~12~~ 2	5-1=4
S_2	2 dz	4 dz 0	0dz **11**	~~14~~ 3	4-2=2
S_3	3 dz	6 dz 0	7 dz 0	4	6-3=3
La demande	9	~~10~~	~~11~~	30	
La différence	3-2=1	4-1=3			

$Max\{1,3,4,2,3\} = 4 => on\ selectionne\ la\ ligne\ S_1$

$Min\{5,1\} = 1 => on\ selectionne\ la\ case\ (S_1D_2)$

$Min\{10,12\} = 10$

On répète l'opération mais on va exclure la colonne D_2

	D_1	D_2	D_3	L'offre	La différence
S_1	5dz	1 dz **10**	8dz 0	~~12~~ 2	5
S_2	2 dz	4 dz 0	0dz **11**	~~14~~ 3	2
S_3	3 dz	6 dz 0	7 dz 0	4	3
La demande	9	~~10~~	~~11~~	30	
La différence	3-2=1				

$Max\{1,3,2,5\} = 5 => on\ selectionne\ la\ ligne\ S_1$

$Min\{10,12\} = 10$

On répète l'opération mais on va exclure la colonne S_1

	D_1	D_2	D_3	L'offre	La différence
S_1	5dz 2	1 dz **10**	8dz 0	~~12~~ ~~2~~	5-1=4
S_2	2 dz 3	4 dz 0	0dz **11**	~~14~~ ~~3~~	4-2=2
S_3	3 dz 4	6 dz 0	7 dz 0	4	6-3=3
La demande	~~9~~	~~10~~	~~11~~	30	
La différence					

Selon le modèle de transport ci-dessus, le coût total sera le suivant :

$$coût\ total = (5*2) + (3*2) + (3*4) + (10*1) + (0*11) = 38$$

Note : Dans la plupart des cas, les résultats des méthodes Vogel et Least Cost sont proches ou identiques.

* Coût total de la méthode de l'angle nord-ouest = 104 dz

* Méthode du moindre coût = 38 dz

* Coût au mètre carré selon la méthode de Vogel = 38 dz

Nous constatons que les deux autres méthodes ont permis de réaliser une économie totale de 66 dz par rapport à la première méthode.

6.4 Les méthodes de vérification de la solution optimale :

Les méthodes présentées dans le point précédent permettent parfois d'aboutir à une solution de base réalisable, sans garantir qu'elle soit optimale. Il est donc nécessaire de recourir à des procédures de vérification afin de déterminer si la solution obtenue est effectivement optimale. Parmi les principales méthodes utilisées à cet effet figurent la méthode de Dantzig, également connue sous le nom de méthode du pas à pas (stepping stone), ainsi que la méthode des coûts duaux, ou méthode des multiplicateurs.

6.4.1 La méthode de Dantzig :

6.4.1.1 Définition

La méthode de Dantzig, également appelée méthode du pas à pas (stepping stone), est une méthode d'optimisation utilisée dans le problème de transport afin de vérifier si une solution de base réalisable est optimale et, dans le cas contraire, de l'améliorer progressivement.

L'idée fondamentale de la méthode de Dantzig repose sur l'évaluation de l'impact qu'aurait l'introduction d'une case vide (non occupée) dans la solution actuelle. Pour chaque case vide, on construit un cycle fermé reliant cette case à des cases occupées de la solution, en alternant les signes (+, −).

À partir de ce cycle, on calcule le coût marginal (ou gain marginal) associé à l'introduction de cette case :

- Si le coût marginal est positif ou nul, la solution actuelle est optimale.

- Se le coût marginal est négatif, la solution n'est pas optimale et peut être améliorée en ajustant les quantités le long du cycle

6.4.1.2 Les étapes de la méthode de Dantzig :

Les étapes de la méthode de Dantzig, sont comme suit :

1- Identifier une solution de base réalisable initiale (par exemple : coin nord-ouest, coût minimum, Vogel).

2- Choisir une case vide du tableau de transport.

3- Construire un chemin fermé (cycle) passant par des cases occupées, avec alternance des signes + et −.

4- Calculer le coût marginal : $\Delta = \sum c(+) - \sum c(-)$

5- Répéter l'opération pour toutes les cases vides.

6- Si toutes les valeurs de $\Delta \geq 0$, la solution est optimale.

7- Sinon, choisir la case avec le Δ le plus négatif et ajuster les quantités pour améliorer la solution.

6.4.1.3 Exemple explicatif :

Considérons un problème de transport simplifié avec deux sources S_1, S_2 et deux destinations D_1, D_2.

Le Tableau des coûts est présenté comme suite :

	D_1	D_2	Offre
S_1	2	3	20
S_2	4	1	30
Demande	25	25	

La solution de base réalisable :

	D_1	D_2
S_1	20	0
S_2	5	25

Avec MinZ= 85

- La vérification par la méthode de Dantzig :

La case vide est (S_1, D_2), donc on peut construire le cycle fermé :

$(S_1, D_2)^+ \rightarrow (S_1, D_1)^- \rightarrow (S_2, D_1)^+ \rightarrow (S_2, D_2)^- \rightarrow (S_1, D_2)$

Maintenant, on calcule le coût marginal Δ

$\Delta = \sum c(+) - \sum c(-) = 3 - 2 + 4 - 1 = 4$

$\Delta = 4 > 0$ ➔ Donc la solution réalisable est une solution optimale.

6.4.2 La méthode des multiplicateurs :

6.4.2.1 Définition :

La méthode des multiplicateurs, également appelée méthode des coûts duaux ou méthode MODI (MOdified DIstribution method), est une méthode d'optimisation utilisée dans le problème de transport afin de vérifier l'optimalité d'une solution de base réalisable et de l'améliorer si nécessaire. Elle constitue une alternative plus systématique et plus rapide que la méthode de Dantzig.

6.4.2.2 Les étapes de la méthode :

La méthode repose sur l'introduction de variables duales, appelées **multiplicateurs** associés :

- Aux lignes (origines) : u_i
- Aux colonnes (destinations) : v_j

Pour chaque case de base occupées, la condition suivante doit être satisfaite :

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Une fois les multiplicateurs déterminés, on calcule le cout réduit (ou cout d'opportunité) des cases non occupées :

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

- Si tous les $\Delta_{ij} \geq 0$, la solution est optimale
- S'il existe au moins un $\Delta_{ij} < 0$, la solution n'est pas optimale et peut être améliorée.

6.4.2.3 Exemple explicatif :

On applique la méthode des multiplicateurs sur l'exemple précédant :

	D_1	D_2	Offre
S_1	2	3	20
S_2	4	1	30
Demande	25	25	

La solution de base réalisable initiale :

	D_1	D_2
S_1	20	0
S_2	5	25

On calcule des multiplicateurs :

On fixe arbitrairement l'un des multiplicateurs, généralement u_1

$$u_1 = 0$$

Le multiplicateur u_1 est fixé à 0 afin d'éliminer l'indétermination des équation duales. Ce choix arbitraire d'affecte ni les coûts réduits, ni la conclusion relative à l'optimalité de la solution.

Pour mes cases de base :

- Case (S_1, D_1) : $2 = u_1 + v_1 \rightarrow v_1 = 2$
- Case (S_2, D_1) : $4 = u_2 + v_1 \rightarrow u_2 = 2$
- Case (S_2, D_2) : $1 = u_2 + v_2 \rightarrow v_2 = -1$

Calcul des coûts réduits : pour la case non occupé (S_1, D_2) :

$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2)$

$\Delta_{12} = 3 - (0 + (-1)) = 4$

$\Delta_{12} = 4 > 0 \rightarrow$ La solution initiale est optimale, donc aucun ajustement n'est nécessaire.

6.5 Cas particulier : le problème d'affectation

6.5.1 Définition :

Les problèmes d'affectation et de transport sont des concepts clés en recherche opérationnelle, où l'affectation consiste à assigner des tâches uniques (personnes à emplois) pour optimiser (minimiser le coût/maximiser la satisfaction), tandis que le transport optimise l'acheminement de marchandises entre sources et destinations, permettant plusieurs affectations. Le problème d'affectation est un cas particulier du problème de transport où l'offre et la demande sont égales (une à une), résolu par des méthodes précises, alors que le transport général (souvent linéaire) cherche les routes optimales pour des flux variables.

Le problème d'affectation est un problème de transport spécialisé où :

- Le nombre de sources n = le nombre des destination m
- Toutes les offres = 1 (chaque source a exactement 1 unité à envoyer)
- Toutes les demandes = 1 (chaque destination a besoin d'exactement 1 unité)
- Solution obligatoirement entière (variables binaires 0 ou 1)

6.5.2 La formulation mathématique :

La formulation mathématique du problème d'affectation est comme suite :

- Les variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la ressource } i \text{ est affectée à la tâche } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- La fonction d'objectif :

$$minZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

- Les contraintes :
  - Une tâche par ressource : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall i$
  - Une ressource par tâche : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall j$
  - contraintes de non-négativité et intégralité : $x_{ij} \in \{0,1\}$

6.5.3 Exemple explicatif :

Une entreprise souhaite affecter 3 employés à 3 tâches. Le tableau suivant contient les coûts des taches pour chaque employé.

	Tâche A	Tâche B	Tâche C
Employé 1	4	2	5
Employé 2	3	3	6
Employé 3	7	5	3

La solution :

1- Etape 1 : la vérification

Le nombre de ressources = le nombre de tâches = 3 → problème équilibré

2- Etape 2 : recherche intuitive

On essaye les différentes affectations :

Tâche A	Tâche B	Tâche C	Coût
Employé 1	Employé 2	Employé 3	4+3+3= 12
Employé 1	Employé 3	Employé 2	4+5+6=15
Employé 2	Employé 3	Employé 1	3+5+5=13
Employé 2	Employé 1	Employé 3	3+2+3=8
Employé 3	Employé 1	Employé 2	7+2+6=15
Employé 3	Employé 2	Employé 1	7+3+5=13

La meilleure solution est : employé 1 →tâche B, employé 2 → tâche A, employé 3 → tache C

Le coût minimal = 8.

6.5.4 La méthode de résolution : Algorithme Hongrois

6.5.4.1 Le principe de la méthode :

L'algorithme hongrois transforme la matrice de coûts pour faire apparaître des zéros, puis choisit une affectation optimale basée sur ces zéros.

6.5.4.2 Les étapes de l'algorithme :

1- Etapes 1 : réduction par ligne

Soustraire le minimum de chaque ligne à tous les éléments de la ligne.

2- Etape 2 : réduction par colonnes :

Soustraire le minimum de chaque colonne.

3- Etape 3 : couverture des zéros

Tracer le nombre minimal de lignes (horizontales ou verticales) couvrant tous les zéros. Si le nombre de lignes = n ➔ solution optimale trouvée. Sinon, on ajuste la matrice

4- Ajustement :

- Trouver le plus petit élément non couvert
- Le soustraire aux éléments non couverts
- L'ajouter aux éléments couverts deux fois.

6.5.4.3 Exemple explicative :

Une entreprise veut affecter 4 employés à 4 tâches en minimisant le coût total.

	T1	T2	T3	T4
E1	9	2	7	8
E2	6	4	3	7
E3	5	8	1	8
E4	7	6	9	4

<u>Etape 1 : Réduction par lignes</u>

On soustrait le minimum de chaque ligne à tous les éléments de la ligne.

- Ligne E1 : min=2
- Ligne E2 : min=3
- Ligne E3 : min=1
- Ligne E4 : min=4

Le tableau après la 1ère étape :

	T1	T2	T3	T4
E1	7	0	5	6
E2	3	1	0	4
E3	4	7	0	7
E4	3	2	5	0

<u>Etape 2 : Réduction par colonnes</u>

On soustrait le minimum de chaque colonne à tous les éléments de la colonne.

- Colonne T1 : min=3
- Colonne T2 : min=0
- Colonne T3 : min=0
- Colonne T4 : min=0

Le tableau après la réduction :

	T1	T2	T3	T4
E1	4	0	5	6
E2	0	1	0	4
E3	1	7	0	7
E4	0	2	5	0

Etape 3 : Couverture des Zéros

On cherche à couvrir tous les zéros avec le minimum de lignes.

Zéros présents :

- E1-T2
- E2-T1, E2-T3
- E3-T3
- E4-T1, E4-T4

Nombre minimal de lignes = 3 < 4 ➔ solution nom optimale à ce stade.

Etape 4 : Ajustement de la matrice

- Plus petit élément non couvert = 1
- On soustrait 1 aux éléments non couverts
- On ajoute 1 aux éléments couverts deux fois

Nouveau tableau :

	T1	T2	T3	T4
E1	3	0	4	5
E2	0	2	0	4
E3	0	7	0	7
E4	0	3	5	0

Etape 5 : nouvelle couverture des zéros

On peut maintenant couvrir tous les zéros avec 4 lignes

⇨ Solution optimale atteinte

Etape 6 : affectation optimale

- E1 → T2 coût = 2
- E2→ T1 coût = 6
- E3→ T3 coût = 1
- E4 → T4 coût = 4

Cout minimal : MinZ=2+6+1+4 = 13

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les principales méthodes d'allocation initiale des problèmes de transport : l'angle Nord-Ouest, la méthode du coût minimal et la méthode de Vogel. La méthode de l'angle Nord-Ouest se distingue par sa simplicité, mais elle ne tient pas compte des coûts, ce qui peut conduire à des solutions initiales peu performantes. La méthode du coût minimal intègre les coûts de transport, tandis que la méthode de Vogel, grâce au calcul des pénalités, fournit généralement une solution initiale plus proche de l'optimum.

L'optimisation de ces solutions nécessite ensuite l'utilisation de méthodes d'amélioration, telles que la méthode des multiplicateurs et la méthode de Dantzig. Enfin, le problème d'affectation, en tant que cas particulier du problème de transport, illustre l'application spécifique de ces modèles, avec des méthodes dédiées comme la méthode hongroise.

.

Conclusion générale :

Face à la complexité croissante des environnements économiques, industriels et logistiques, la nécessité de disposer d'outils rationnels et rigoureux d'aide à la décision s'impose. C'est dans ce contexte que la recherche opérationnelle apparaît comme une discipline indispensable, permettant de transformer des situations réelles complexes en modèles mathématiques exploitables et orientés vers l'optimisation des décisions.

Cette démarche s'appuie d'abord sur la programmation linéaire, qui constitue le socle fondamental de la modélisation en recherche opérationnelle à travers l'identification des variables de décision, la définition d'une fonction objectif et la formulation des contraintes. Sur cette base, la résolution graphique offre une première approche intuitive de la recherche de l'optimum, facilitant la compréhension des concepts clés avant d'aborder des méthodes plus générales.

Dans le prolongement, la méthode du simplexe s'impose comme un outil central de résolution, capable de traiter efficacement des problèmes de grande dimension. L'analyse est ensuite enrichie par l'étude de la dualité et de l'analyse de sensibilité, qui apportent une interprétation économique des modèles et permettent d'évaluer la robustesse des solutions face aux variations des paramètres.

Cette progression conduit naturellement à la programmation linéaire en nombres entiers, où des méthodes spécifiques permettent de répondre aux contraintes de décision discrète. Enfin, les problèmes de transport et d'affectation illustrent l'application concrète et intégrée de l'ensemble de ces concepts, démontrant l'apport de la recherche opérationnelle dans l'optimisation des ressources et la prise de décision efficace dans des situations réelles.

.

Bibliographie :

Adrien Goëffon. (2010). Cours 1 : Programmes linéaires, résolution graphique [Cours].

Alj, A., & Faure, R. (1990). Guide de la recherche opérationnelle. Les applications, tome 2. Dunod.

Anatoli Iouditski, LJK. (2015, 2016). Introduction à la Recherche Opérationnelle [Cours]. https://ljk.imag.fr/membres/Anatoli.Iouditski/ro-m1-ssd.htm

Bernard Fortz. (2013). Recherche opérationnelle et applications. http://homepages.ulb.ac.be/~bfortz/ro.pdf

Blackett, P. M. S. (1950). Operational Research. Journal of the Operational Research Society. https://doi.org/10.1057/jors.1950.2

Blackett, P. M. S. (1952). Studies of War : Operation s Research (Oliver and Boyd).

Bouzgarrou, M. E. (1998). Parallélisation de la méthode du « “Branch and Cut” » pour résoudre le problème du voyageur de commerce. https://theses.hal.science/tel-00004801/document

Churchman, C. W., Ackoff, R. L., & Arnoff, E. L. (1957). Introduction to operations research (p. x, 645). Wiley.

Dantzig, G. B. (1951). Application of the Simplex Method to a Transportation Problem. In Activity Analysis of Production and Allocation (John Wiley and Sons, p. 359-373). https://cowles.yale.edu/sites/default/files/2022-09/m13-all.pdf

Fabian Bastin. (2010). Modèles de Recherche Opérationnelle. Département d’Informatique et de Recherche Opérationnelle Université de Montréal. http://www.iro.umontreal.ca/~bastin

Faure, R., Lemaire, B., & Picouleau, C. (1974). Précis de recherche opérationnelle: Méthodes et exercices d’application. Dunod.

Faure, R., Lemaire, B., & Picouleau, C. (2014). Précis de recherche opérationnelle: Méthodes et exercices d’application (7th ed.). Dunod. https://www.dunod.com/sciences-techniques/precis-recherche-operationnelle-methodes-et-exercices-d-application

Gomory, R. E. (1958). Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. Bulletin of the American Mathematical Society, 64(5), 275-278.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2021). Introduction to Operations Research. McGraw Hill.

Hitchcock, F. L. (1941). The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. Journal of Mathematics and Physics, 20(1-4), 224-230. https://doi.org/10.1002/sapm1941201224

Hossain, M. M., & Ahmed, M. M. (2020). A Comparative Study of Initial Basic Feasible Solution by a Least Cost Mean Method (LCMM) of Transportation Problem. American Journal of Operations Research, 10(04), Article 04. https://doi.org/10.4236/ajor.2020.104008

Koopmans, T. C. (1949). Optimum Utilization of the Transportation System. Econometrica, 17, 136. https://doi.org/10.2307/1907301

Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. Econometrica, 28(3), 497-520.

Moisdon, J.-C., & Nakhla, M. (2010). Recherche opérationnelle : Méthodes d'optimisation en gestion. ECOLE DES MINES.

Schrijver, A. (1998). Theory of Linear and Integer Programming. Wiley. https://promathmedia.files.wordpress.com/2013/10/alexander_schrijver_theory_of_linear_and_integerbookfi-org.pdf

Soomro, A. S., Junaid, M., & Tularam, G. A. (2015). Modified Vogel's Approximation Method For Solving Transportation Problems.

Taha, H. A. (2017). Operations Research : An Introduction, 10Th Edition (10th éd.). PEARSON INDIA. https://zalamsyah.staff.unja.ac.id/wp-content/uploads/sites/286/2019/11/9-Operations-Research-An-Introduction-10th-Ed.-Hamdy-A-Taha.pdf

Winston, W. L. (2003). Operations Research : Applications and Algorithms (4th éd.). Cengage Learning.

Table des matières

Sommaire 2

Introduction générale 1

1 Chapitre I : Notion de base en recherche opérationnelles et programmation linéaire 3

Introduction 3

1.1 Introduction à la recherche opérationnelle 3

1.1.1 Aperçu historique de la recherche opérationnelle 3

1.1.2 Définition de la recherche opérationnelle 4

1.1.3 Les objectifs et les finalités de la recherche opérationnelle 4

1.1.4 Domain application 5

1.2 La Programmation Linéaire 5

1.2.1 Formulation des modèles de programmation linéaire 5

1.2.2 Concepts importants 6

1.2.3 Les conditions d’utilisation de la programmation linéaire 7

1.2.4 Les hypothèses de la programmation linéaire 8

1.2.5 Les composants principaux d’un modèle de programmation linéaire PL 9

1.2.6 Les différentes formes d’un programme linéaire 11

1.2.7 Exemples : 12

1.2.8 Exercices avec solutions 13

Conclusion 21

2 Chapitre II : La résolution graphique d’un programme linéaire 22

Introduction 22

2.1 Types des solutions 22

2.1.1 Solution réalisable ou admissible 22

2.1.2 Solution non réalisable ou inadmissible 22

2.1.3 Solution optimale 22

2.2 Types des contraintes avec explication économiques 22

2.2.1 Contraintes saturées 22

2.2.2 Contraintes non saturées 22
2.3 Exemple explicatif 23
2.3.1 La sélection de la solution optimale : 24
2.4 Différents cas 26
2.4.1 Illimité de solution dans un segment 26
2.4.2 Situation non bornée 28
2.4.3 Situation de Pas de solution 28
2.4.4 Solution optimale unique 29
2.5 Analyse du Post-optimale 30
2.5.1 Définition 30
2.5.2 L'objectif de l'analyse post-optimale 30
2.5.3 Les situations de l'analyse post optimale 30
2.5.4 Exemple explicatif 31
2.5.5 Exercices 32
2.5.6 Solution d'exercices 32
2.6 Exercices 37
Conclusion 38
3 Chapitre III : La méthode du SIMPLEXE 39
Introduction 39
3.1 L'algorithme du Simplexe 39
3.1.1 Les étapes de l'algorithme du SIMPLEXE 39
3.2 Situation 01 : Cas de Maximisation (tous les contraintes $\leq \mathbf{0}$) 40
3.2.1 Cas 1 : Solution optimale unique 40
3.2.2 Cas 2 : La Solution non-bornée 45
3.2.3 Cas 3 : infinité de solution optimale 46
3.2.4 Cas 4 : Pas de solution ou problème non réalisable 48
3.3 Situation 02 : cas de minimisation 48
3.4 Situation 03 : Cas de maximisation (les contraintes de tout sorte $\leq; \geq; =$) 50

3.4.1 Méthode de big M 51

3.4.2 Méthode en deux phases 55

3.5 Exercices et solutions 60

3.5.1 Exercices 60

3.5.2 Solution d'exercices 64

Conclusion 68

4 Chapitre IV : La Dualité et l'analyse de sensibilité 69

Introduction 69

4.1 Interprétation économique 69

4.2 Le principe de la dualité 69

4.3 La construction du modèle DUAL 70

4.4 Les caractéristiques de la dualité 72

4.5 Théorème des écarts complémentaires 73

4.5.1 L'élaboration du tableau optimale du dual à partir du tableau optimal primal 74

4.6 L'analyse de sensibilité 75

4.6.1 Variation des coefficients de la fonction d'objectif : 76

4.6.2 Variation par rapport au second membre 78

4.6.3 La relation entre l'analyse de sensibilité et la dualité 79

Conclusion 79

5 Chapitre V : Les Problèmes linéaires en nombres entiers : méthode des coupes 81

Introduction 81

5.1 Définition d'un programme linéaire en nombre entier PLNE 81

5.2 L'importance de la méthode PLNE 81

5.3 La formulation générale d'un PLNE 82

5.4 Les étapes de la programmation linéaire en nombre entier 83

5.5 La méthode graphique de résolution du programme linéaire en nombres entiers 83

5.5.1 La méthode de Gomory 86

5.5.2 La méthode de Branch and Bound 91

Conclusion 94
6 Chapitre VI : Le problème de transport 95
Introduction 95
6.1 Modèle de transport 95
6.2 La présentation linéaire du problème de transport : 96
6.3 Méthodes de résolution des problèmes de transport 96
6.3.1 La méthode de l'angle nord-ouest 97
6.3.2 La méthode des moindres coûts 98
6.3.3 La méthode d'approximation de Vogel (VAM) 100
6.4 Les méthodes de vérification de la solution optimale : 103
6.4.1 La méthode de Dantzig : 103
6.4.2 La méthode des multiplicateurs : 105
6.5 Cas particulier : le problème d'affectation 106
6.5.1 Définition : 106
6.5.2 La formulation mathématique : 106
6.5.3 Exemple explicatif : 107
6.5.4 La méthode de résolution : Algorithme Hongrois 107
Conclusion 110
Conclusion générale : 111
Bibliographie : 112
Table des matières 114