

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane MIRA de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique – Domaine Science de la Matière

Polycopié de cours

Electricité – Magnétostatique

Destiné aux étudiants de 1^{ère} Année Science de la Matière (SM)
Module : Physique 2

Présenté par :

Dr. Hakim YALA

Année universitaire 2024/2025

SOMMAIRE

Chapitre 1 : Electrostatique

I. Description des phénomènes d'électrisation.....	2
I.1- Les deux types d'électricité.....	2
I.2- Interprétation – Structure de la matière.....	4
I.3- Charge électrique.....	5
I.4- Conservation de la charge	6
II. Force et Champ électrostatique.....	7
II.1- Loi de Coulomb.....	7
II.2- Principe de superposition.....	9
II.3- Champ Electrostatique dans le vide.....	9
II.3.1- Cas d'une charge ponctuelle.....	9
II.3.2- Cas d'un ensemble discret de charges ponctuelles.....	11
II.3.3- Cas de distributions continues de charges.....	11
II.3.4- Lignes de champ.....	12
III. Potentiel électrostatique.....	14
III.1- Circulation du champ le long d'une courbe.....	14
III.2- Notion de potentiel électrostatique.....	15
III.3- Relation entre les deux champs, $\vec{E}(M)$ et $V(M)$	16
III.4- Equipotentiell	18
IV. Energie potentielle électrostatique.....	19
V. Dipôle électrique.....	21
VI. Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss.....	24
VI.1- Flux d'un champ vectoriel.....	24
a- Orientation d'une surface.....	24
b- Notion d'angle solide.....	25
c- Définition du flux.....	26
VI.2 Flux du champ $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle.....	27
a- A travers une surface ouverte.....	27
b- A travers une surface fermée.....	27
VI.3 Théorème de Gauss.....	29
VI.4 Symétries et invariances du champ électrostatique.....	30

Chapitre 2 : Conducteurs en équilibre électrostatique

I. Equilibre électrostatique.....	34
1. Définition.....	34
2. Propriétés.....	34
3. Champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé-Th. De Coulomb.....	35
4. Pouvoir des pointes.....	36
5. Capacité propre d'un conducteur isolé.....	37
6. Energie potentielle (interne) d'un conducteur isolé.....	37
7. Charge et décharge d'un conducteur.....	39
II. Phénomènes d'influence.....	39
A. Influence partielle.....	39
B. Influence totale.....	40
III. Condensateurs.....	41
1. Définition.....	41
2. Energie électrique d'un condensateur.....	42
3. Association de condensateurs.....	42
a. Association en parallèle.....	42
b. Association en série.....	43

Chapitre 3 : Electrocinétiq

I. Equilibre électrostatique.....	44
1. Définition.....	44
2. Le courant électrique.....	45
2.1 Intensité du courant électrique.....	46
2.2 Sens conventionnel du courant électrique.....	46
2.3 Densité de courant électrique.....	46
2.4 Lignes et tubes de courant.....	48
2.5 Régime permanent – Courant continu.....	48
2.6 Equation de la conservation de la charge.....	49
II. Loi d'Ohm.....	49
1. Loi d'Ohm macroscopique – Résistance électrique.....	49
2. Loi d'Ohm microscopique – Conductivité/Résistivité.....	50
3. Association de résistances.....	51
a. Association en série.....	51
b. Association en parallèle.....	51

III. Loi de Joule (Effet Joule).....	52
IV. Circuit électrique en courant continu	52
1. Rôle du générateur – Force électromotrice (f.e.m).....	52
2. Représentation d'un générateur.....	54
3. Bilan énergétique.....	54
4. Récepteur.....	55
5. Circuits électriques – Lois de Kirchhoff.....	56
1. Notion de circuit électrique.....	56
2. Représentation des courants et des tensions.....	57
3. Lois de Kirchhoff.....	58
a. Loi des nœuds (conservation de la charge).....	58
b. Loi des mailles (conservation de l'énergie).....	58
4. Procédure à suivre dans l'application des lois de Kirchhoff.....	59
5. Résolution du système d'équations obtenu.....	60

Chapitre 4 : Magnétostatique

1. Introduction.....	61
2. Equations fondamentales de la magnétostatique.....	62
2.1 Force magnétique.....	62
2.2 Calcul du champ magnétique.....	64
2.2.1 Formule de Biot et Savart.....	64
2.2.2 Théorème d'Ampère.....	67
2.2.3 Symétrie et invariances.....	67
3. Equations locales de la magnétostatique.....	71
3.1 Flux du champ magnétique.....	71
3.2 Circulation du champ magnétique.....	72
3.3 Le potentiel Vecteur $\vec{A}$	72
Bibliographie.....	74

Introduction

L'électromagnétisme (EM), théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques de Maxwell – 1873, est une branche de la physique qui étudie les effets de l'électricité dépendant du temps. Dans le cas de ce régime variable, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ constituent les composantes indissociables de la même entité ou grandeur physique appelée « champ électromagnétique » ; l'existence de $\vec{E}$ implique celle de $\vec{B}$ et vice-versa. Cependant, en régime stationnaire, phénomènes indépendant du temps ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$), toutes les grandeurs EM ($\vec{E}, \vec{B}, q, \dots$) sont des constantes. Dans ce cas, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont complètement découplés donnant ainsi naissance à deux branches de la physique (qui existaient en réalité bien avant la théorie unifiée de Maxwell) dénommées :

Electrostatique : l'étude des champs électriques $\vec{E}$ créés par des charges électriques statiques (immobiles). Ces charges peuvent être discrètes ou des distributions continues à une, deux ou trois dimensions.

Magnétostatique : l'étude du champ magnétique $\vec{B}$ créé par des courants continus et des aimants permanents.

Dans ce cours, nous nous limiterons à la description des phénomènes indépendants du temps. Régime, comme nous l'avons annoncé plus haut, appelé statique ou stationnaire où les phénomènes électriques et les phénomènes magnétiques sont dissociés. Il a pour objet l'étude des lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme.

Il s'adresse, particulièrement, aux étudiants de première année Sciences de la Matière (SM). Toutefois, l'exposé peut intéresser également les étudiants de première année ST (Science Technique), Maths, Informatique,...

L'emploi des mathématiques est abondant; les outils mathématiques des cours : calcul différentiel, calcul intégral, calcul vectoriel,...etc. sont importants pour établir et comprendre les relations entre les différentes grandeurs physiques définies dans ce cours.

Le programme officiel contient les chapitres suivants :

Chapitre 1 : Electrostatique

Chapitre 2 : Les conducteurs

Chapitre 3 : Electrocinétique

Chapitre 4 : Magnétostatique

Chapitre 1 : Electrostatique

I. Description des phénomènes d'électrisation

Certains corps frottés (règles, stylos, bâtons de verre,...) avec un chiffon de laine ont la propriété d'attirer des petits objets, petits bouts de papier par exemple. Nous pouvons conclure alors que sous l'effet du frottement, ces matériaux acquièrent une nouvelle propriété qu'on a appelé *électricité*. Cette propriété électrique donne ainsi naissance à une interaction différente à l'interaction gravitationnelle. On l'a appelé *interaction électrique*.

Tous les corps peuvent être électrisés. Cette électrisation peut se faire de plusieurs façons :

- Par frottement,
- Par contact avec un corps déjà électrisé,
- En reliant le corps à une borne d'un générateur électrique.

Les corps électrisés peuvent être classés dans deux grandes familles :

- **Isolants** : Ceux pour lesquels l'électrisation reste localisée à la partie où on l'a apportée (par frottement par exemple). Exemple : verre, nylon, l'air,...
- **Conducteurs** : Ceux pour lesquels l'électrisation se répand sur tout le corps de l'objet. Exemples : métaux, corps humain, l'eau,...

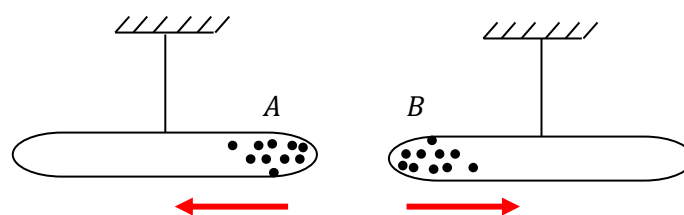
Remarques :

- Par frottement, on peut électriser une baguette de verre en la tenant à la main. Ce n'est pas possible pour celle en cuivre. En effet, cela est vrai car l'électrisation se répand dans le sol par l'intermédiaire du corps humain (un corps conducteur). Cependant, on peut y arriver si on tient cette baguette à l'aide d'un manche isolant (un chiffon par exemple).
- Le conducteur parfait et l'isolant parfait n'existent pas ; les substances réelles s'approchent plus ou moins de ces deux catégories idéales.

I.1- Les deux types d'électricité

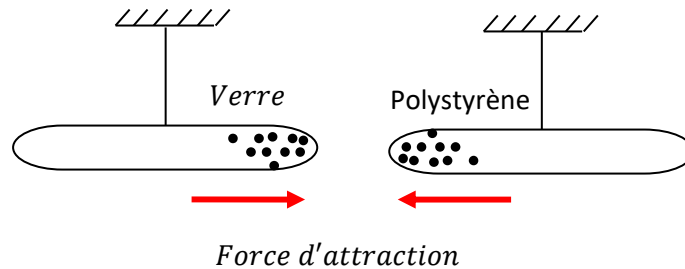
On réalise les expériences suivantes :

Soit une baguette de verre dont l'extrémité A est électrisée par frottement. La baguette est suspendue par un fil isolant. De même pour l'extrémité B d'une autre baguette de verre.

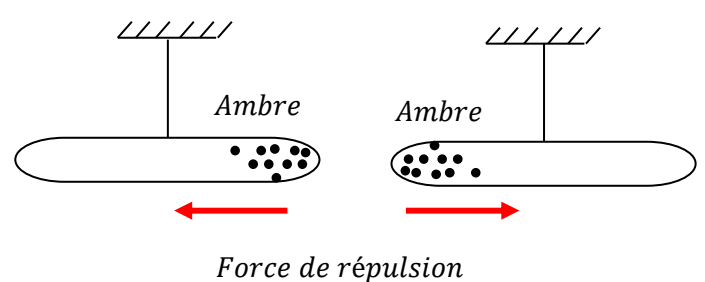
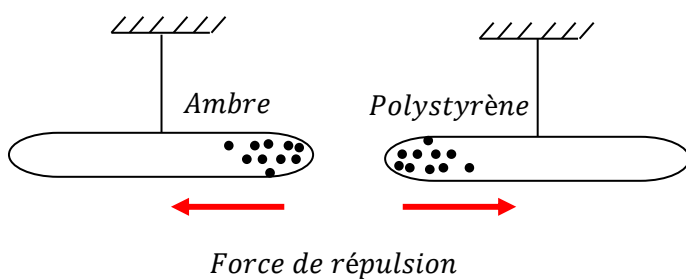
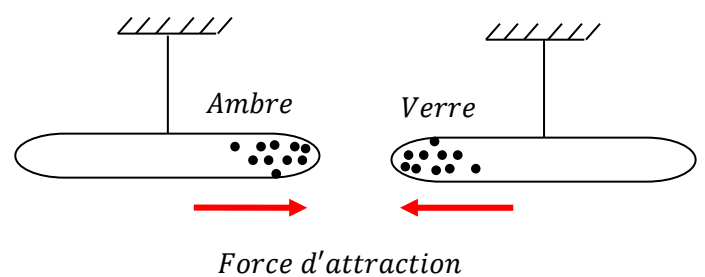
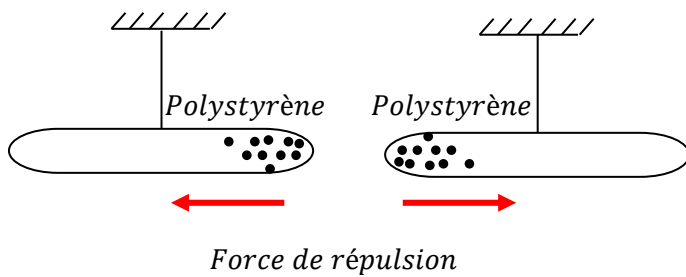


Force de répulsion

En approchant *A* de *B*, il se manifeste aussitôt entre les deux baguettes une force de répulsion. Si on remplace la baguette de verre *B* par une baguette en polystyrène, on constate cette fois-ci que les deux baguettes s'attirent.



Autres expériences :



Nous constatons que l'ambre (résine) et le polystyrène s'électrise de la même manière et différemment du verre. On est ainsi amené à admettre l'existence de deux sortes d'électricité : l'une vitreuse ou positive (+) et l'autre résineuse ou négative (-).

Les différentes expériences réalisées ont montré que :

- Deux corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités contraires.
- Cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance (répulsion ou attraction), mais également de se déplacer d'un corps à un autre (par contact).
- L'ensemble des effets d'électricité statique s'expliquent par l'existence, au sein de la matière, de particules portant une charge électrique, positive ou négative, et libre de se déplacer.
- Un corps électrisé porte donc une charge positive ou négative
- Un corps neutre n'est pas électrisé ; il a autant de charges positives que de charges négatives.

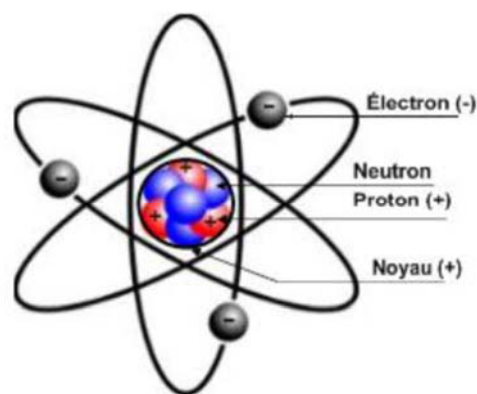
I.2- Interprétation – Structure de la matière

A l'échelle microscopique, la matière est constituée d'atomes. C'est la vision moderne que l'on fait de la matière. Les propriétés électriques de celle-ci trouvent ainsi leur interprétation au niveau de l'atome.

Dans le tableau de Mendeleïev, tout élément chimique X (un atome neutre), noté A_ZX , est constitué d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford), autour duquel gravite un nuage formé de Z électrons. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau, car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. Cette charge positive est attribuée aux particules appelées protons; Z est leur nombre. La stabilité du noyau est assurée par l'interaction forte ou nucléaire. Cette stabilité ne pouvait exister s'il n'y avait que des protons qui ont tendance à se repousser mutuellement. Le noyau possède en effet un autre type de particules, les neutrons (découverts en 1932 par Chadwick). Ces neutrons, au nombre $N = A - Z$, portent une charge électrique nulle. L'ensemble des particules constituant le noyau atomique sont appelées les nucléons. Les interactions électriques entre noyau positif et électrons négatifs assurent la stabilité de l'atome neutre.

Un atome neutre quelconque s'écrit:

$${}^A_ZX \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = \text{nombre d'électrons} \\ A = \text{nombre de nucléons} \\ N = A - Z = \text{nombre de neutrons} \end{array} \right.$$



Le nombre A est appelé le nombre de masse :

c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre Z est appelé le

nombre atomique. Il est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc $Q = +Ze$. Le nuage électronique possède alors une charge totale $Q = -Ze$, assurant ainsi la neutralité électrique de l'atome. La charge électrique e est appelée la charge élémentaire ou quanta de la charge électrique dont la valeur est:

$$e = 1,602.10^{-19} C, \quad C \equiv \text{Coulomb}$$

- Les électrons des couches périphériques (les plus éloignés du noyau), qui sont moins attirés par le noyau que ceux des couches profondes, peuvent être arrachés à l'atome qui devient alors un ion positif. Exemple : $N_a \rightarrow N_a^+ + 1\bar{e}$
- Inversement, un atome neutre peut gagner un ou plusieurs électrons. Il devient, dans ce cas, un ion négatif. Exemple : $O + 1\bar{e} \rightarrow O^-$

La matière est électriquement neutre. L'électrisation correspond donc à un gain ou à une perte d'électrons par rapport à la neutralité. Ceci peut avoir lieu par frottement (arrachement mécanique des électrons) ou bien par un simple contact (passage des électrons de l'un des matériaux vers l'autre). Ceci implique que la charge électrique est quantifiée (Robert A. Millikan – 1909), c'est-à-dire qu'elle existe seulement sous forme de multiples d'une charge élémentaire indivisible, e ($Q = \pm n\bar{e}$). La particule portant cette charge élémentaire est appelée électron. Ceci traduit le principe fondamental de la quantification de la charge électrique.

C'est ainsi que la structure de la matière nous permet d'expliquer les phénomènes d'électrisation.

I.3- Charge électrique

On appelle charge d'une particule la grandeur physique qui caractérise les interactions électromagnétiques qu'elle exerce ainsi que celles qu'elle subit. Elle joue le même rôle que la masse dans le cas de la gravitation. Seulement, contrairement à la masse qui est une grandeur positive, la charge est une grandeur scalaire pouvant prendre des valeurs positives ou négatives. Elle s'exprime en Coulomb (symbole C). Les charges de toutes les particules connues sont de la forme :

$$Q = N\bar{e}$$

Où N est un entier relatif.

Valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :

Electron:	$q_e = -e = -1,602.10^{-19}C,$	$m_e = 9,109.10^{-31}kg$
Proton:	$q_p = +e = 1,602.10^{-19}C,$	$m_p = 1,672.10^{-27}kg \approx 1836.m_e$
Neutron:	$q_n = 0,$	$m_n = 1,674.10^{-27}kg \approx m_p$

Remarque : Le coulomb est énorme comme unité. En effet, un corps portant une charge de l'ordre de $1C$ correspond à environ 10^{18} électrons.

I.3.a- Charge ponctuelle

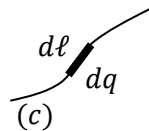
Hypothèse analogue à celle du point matériel en mécanique (objet sans dimensions).

I.3.b- Distributions continues de charge

Les matériaux considérés comportent un nombre gigantesque de particules. Nos échelles spatiales sont très grandes devant les distances inter-particules, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges (répartition continue). Dans ce cas, on définit une charge infinitésimale dq à laquelle on applique les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution pour avoir l'effet global de l'ensemble de la charge. On distingue alors trois densités :

- **Linéique sur un fil :**

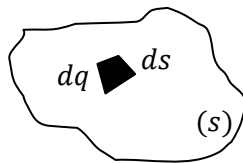
$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad (C.m^{-1})$$



$$Q = \int_{(c)} dq = \int_{(c)} \lambda d\ell$$

- **Surfacique (superficielle) sur une surface :**

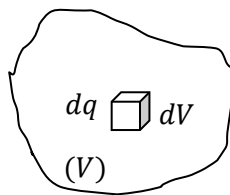
$$\sigma = \frac{dq}{ds} \quad (C.m^{-2})$$



$$Q = \iint_{(s)} dq = \iint_{(s)} \sigma ds$$

- **Volumique dans un volume:**

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (C.m^{-3})$$



$$Q = \iiint_{(V)} dq = \iiint_{(V)} \rho dV$$

Remarque : densité uniforme implique une densité constante (répartition uniforme de charges).

I.4- Conservation de la charge

L'expérience a montré que la charge électrique totale contenue dans un système isolé (somme algébrique des charges positives et négatives à chaque instant) reste invariante. Dans un tel système, il ne peut y avoir ni de création ni de destruction de charges. L'apparition d'une quelconque charge dans un système isolé ne peut être due alors qu'à l'extérieur. C'est le principe de conservation de la charge.

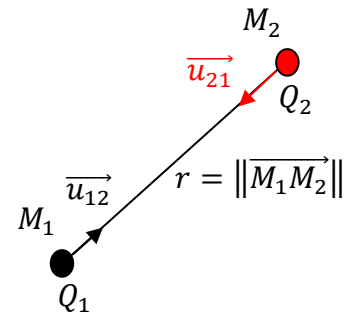
Dans tous les processus, la charge totale ne change pas.

II. Force et Champ électrostatique

II.1- Loi de Coulomb

La série d'expériences réalisées par Charles Auguste de Colomb en 1785, ont conduit celui-ci à la détermination de la force exercée par une charge ponctuelle Q_1 sur une autre Q_2 . Son expression mathématique est :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$



Cette formule est la loi fondamentale de l'interaction électrostatique.

• Propriétés

- Force radiale, c'est-à-dire dirigée selon la droite joignant les positions des deux charges.
- Proportionnelle au produit des deux charges
- Inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux charges, $r = \|\vec{M_1 M_2}\|$.

$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}}{r}$ est le vecteur unitaire porté par le support $M_1 M_2$, orienté de M_1 vers M_2 (On dit dans le sens qui va de la cause vers l'effet).

K est une constante universelle telle que : $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ (SI)}$

ϵ est une constante caractéristique du milieu, appelée permittivité diélectrique. Elle se mesure en Farad par Coulomb (F/m). Dans le cas du vide, on la note ϵ_0 . Elle vaut presque celle de l'air :

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (Fm}^{-1}\text{)}$$

• Remarques

- La loi de Coulomb n'est valable de façon stricte que pour des charges immobiles (régime électrostatique, ou du moins quand les charges se déplacent de façon très lente).
- Satisfait au principe de l'action et de la réaction de la mécanique Newtonienne

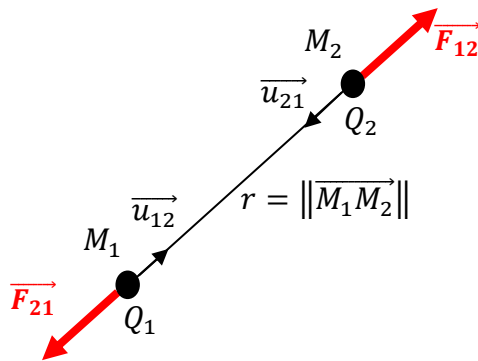
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Où $\vec{F}_{21}$ est la force qu'exerce Q_2 sur Q_1 , égale et opposée à $\vec{F}_{12}$.

- Elle a les mêmes propriétés vectorielles que la force de gravitation (loi de Newton)

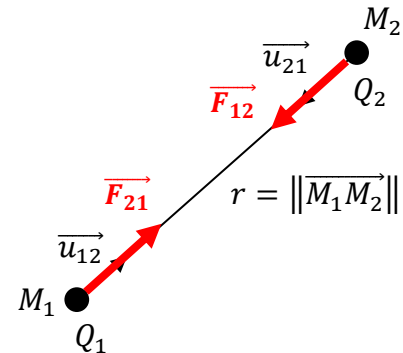
La force de Coulomb postule la possibilité d'une action à distance sans contact matériel. Cependant, contrairement au cas de la gravitation universelle, la force de Coulomb peut être attractive ou répulsive, selon le signe du produit des deux charges :

- Si $Q_1 \cdot Q_2 > 0$ – (**charges de même signes**) la force est répulsive
- Si $Q_1 \cdot Q_2 < 0$ – (**charges de signes opposés**) la force est attractive



Q_1 et Q_2 sont de même signes

Répulsion



Q_1 et Q_2 sont de signes opposés

Attraction

• Ordre de grandeur

Supposons que la distance entre l'électron et le proton est r . Les forces gravitationnelle et électrostatique qui agissent sur ces deux particules sont données, respectivement, par :

$$F_G = G \frac{m_p m_e}{r^2} \quad \text{et} \quad F_e = K \frac{Q_p Q_e}{r^2} = K \frac{e^2}{r^2}$$

Le rapport des deux forces nous donne : $\frac{F_e}{F_g} \sim 10^{39}$

On conclue que la force électrique est dominante vis-à-vis de l'attraction gravitationnelle. Cela implique que les corps célestes sont exactement électriquement neutres.

Autre exemple : Calculons la force électrique de répulsion entre deux charges de $1C$ séparée l'une de l'autre d'une distance de $1km$:

$$F_e = K \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^3 N$$

Si g est l'accélération de la pesanteur, la masse m qui subirait la même force serait :

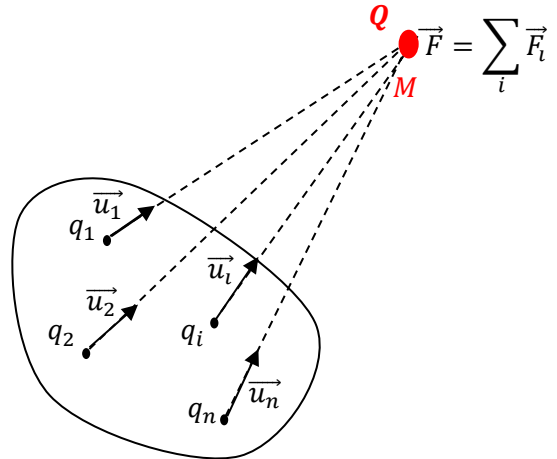
$$F_e = mg \Rightarrow m = \frac{F_e}{g} \approx 10^3 kg$$

Cette force est l'équivalent du poids d'une masse d'une tonne. Une charge de $1C$ est donc énorme.

II.2- Principe de superposition

Considérons un ensemble de n particules de charges électriques q_i , situées en des points $p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Ces charges se trouvent dans le voisinage d'une charge Q placée en un point M . Quelle est alors la force électrostatique $\vec{F}$ exercée par cet ensemble de charges sur Q ?

L'expérience a montré que la force totale subie par Q est simplement la superposition des forces élémentaires $\vec{F}_i$ qu'exerceraient séparément sur Q chacune des charges q_i prise isolément :



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i Q}{r_i^2} \vec{u}_i, \text{ Avec } \vec{r}_i = \overrightarrow{p_i M} \text{ et } \vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le **principe de superposition**.

II.3- Champ électrostatique dans le vide

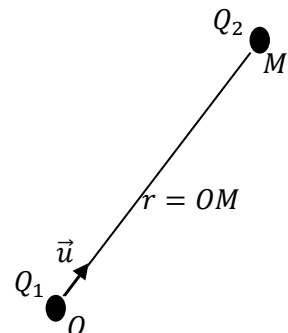
II.3.1- Cas d'une charge ponctuelle

Soit Q_1 , une charge immobile placée en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge Q_2 située en M . L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}$$

Cette expression peut être mise sous une forme plus intéressante comme suit :

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u} = Q_2 \left(K \frac{Q_1}{r^2} \vec{u} \right) = Q_2 \vec{E}_1(M)$$



Avec : $\vec{E}_1 = K \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (ici Q_2), de ce qui ne dépend que d'une

source extérieur, ici le vecteur $\vec{E}_1(M)$ qui dépend de la charge Q_1 . Ce vecteur caractérise l'état électrique de chaque point M de l'espace au voisinage de la charge Q_1 .

- **Définition :** Une particule de charge Q située en O crée en tout point M de l'espace, distinct de O , un champ vectoriel d'expression :

$$\vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}$$

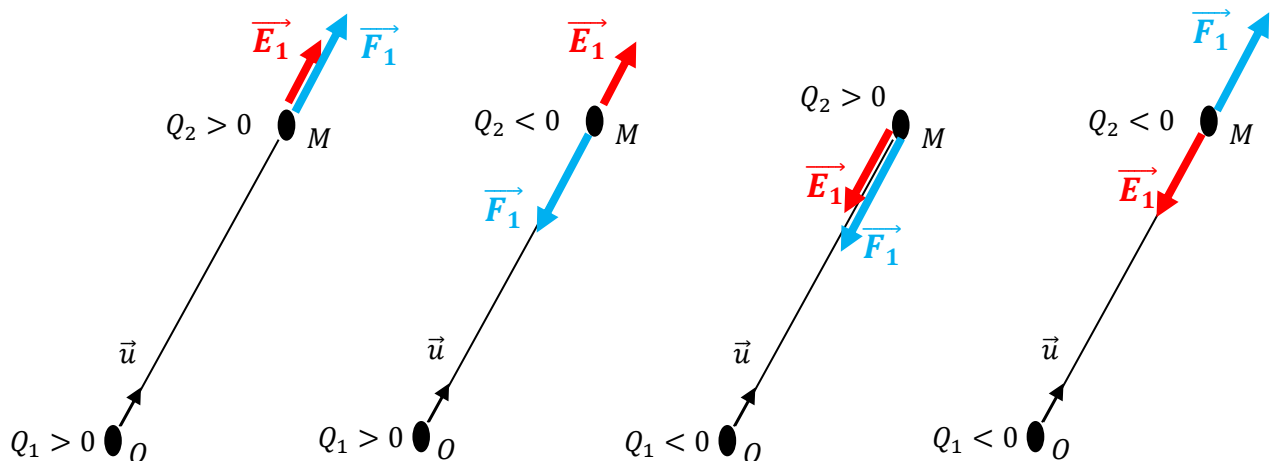
Appelé *champ électrostatique*.

Toute charge Q' placée dans l'espace où règne ce champ $\vec{E}$ est alors soumise à la force :

$$\vec{F} = Q' \vec{E}$$

- **Propriétés**

- Le champ $\vec{E}$ est radial, i.e. porté par la droite joignant la position de la charge à celle du point M .
- Le sens de $\vec{E}$ est donné par le signe de la charge qui le crée, Q .
- $\vec{E}$ n'est pas défini au point $r = 0$ (en réalité, il n'existe pas de charge ponctuelle – ce problème est surmonté en utilisant la notion de distribution).



Champ électrique créé par Q_1 et force électrostatique subie par Q_2 en un point M de l'espace .

II.3.2- Cas d'un ensemble discret de charges ponctuelles

Reprenons la section (II.2). Nous avons vu que la force $\vec{F}$ subie par une charge Q due à la présence de n charges q_i est donnée, d'après le principe de superposition, par :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n K \frac{q_i Q}{r_i^2} \vec{u}_i = Q \sum_{i=1}^n K \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

On reconnaît dans cette expression le champ $\vec{E}_i$ créé par la charge q_i : $\vec{E}_i = K \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$

Cela permet d'écrire :

$$\vec{F} = Q \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = Q \vec{E}(M)$$

Il en résulte donc :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

$\vec{E}(M)$ est le champ électrostatique créé par l'ensemble discret de n charges. C'est le principe de superposition.

II.3.3- Cas de distributions continues de charges

En pratique, l'expression du champ $\vec{E}(M)$ trouvée ci-dessus pour un ensemble discret de charges est rarement utilisée puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules chargées. En effet, nos échelles spatiales sont très grandes devant les distances inter-particules, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre.

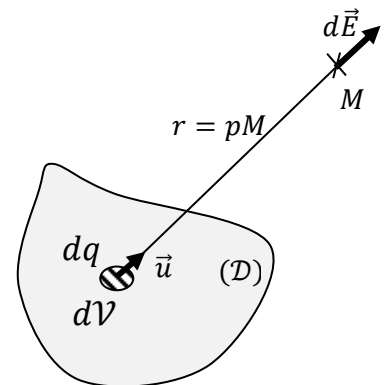
Comme nous l'avons signalé plus haut, dans ce genre de situations, il est indispensable d'utiliser les distributions continues de charges.

On définit alors une charge infinitésimale dq à laquelle on applique les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle. Pour tenir compte des contributions de toutes les charges, nous intégrons sur la distribution considérée.

Considérons une distribution $(\mathcal{D})$ constituée de charges réparties de façon continue dans un volume V , et notons :

$$dq = \rho d\mathcal{V}$$

La charge contenue dans un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ situé autour d'un point p de $(\mathcal{D})$.



La grandeur ρ est appelée densité volumique de charge, unité $C.m^{-3}$; elle joue pour une distribution de charge le même rôle que la masse volumique pour une distribution de masse.

Le champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé en un point M par dq s'écrit :

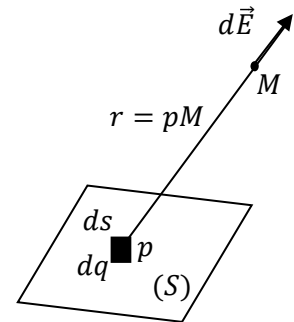
$$d\vec{E}(M) = K \frac{dq}{r^2} \vec{u} = K dq \frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \text{Puisque} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Le champ total créé par la distribution $(\mathcal{D})$ est alors:

$$\vec{E}(M) = \int_{(\mathcal{D})} d\vec{E} = \iiint_{(V)} K \frac{\rho(p)}{r^2} \vec{u} dV = K \iiint_{(V)} \rho(p) \frac{\vec{r}}{r^3} dV$$

Lorsque l'une des dimensions de la distribution de charge est beaucoup plus petite que les deux autres (exemples : plan, sphère creuse,...) on définit alors la densité surfacique de charge

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \quad (\text{Unité: } C.m^2)$$



Produisant un champ total :

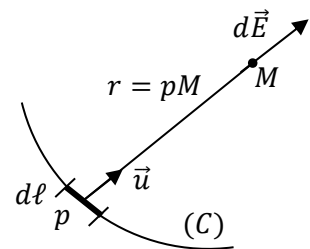
$$\vec{E}(M) = \iint_{(S)} K \frac{\sigma}{r^2} \vec{u} ds$$

Finalement, si deux dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (exemple : fil), on peut définir une densité linéique de charge :

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad (\text{Unité: } C.m^{-1})$$

Produisant en un point M un champ :

$$\vec{E}(M) = \int_{(C)} K \frac{\lambda}{r^2} \vec{u} d\ell$$

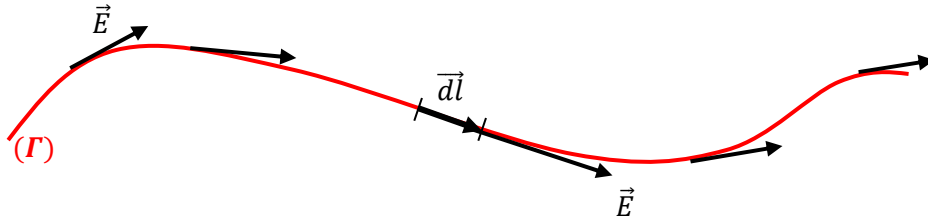


II.3.4- Lignes de champ

Le concept de lignes de champ (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteur, comme le champ électrostatique $\vec{E}$.

Définition : Une ligne de champ d'un vecteur $\vec{E}$ quelconque est une courbe (Γ) définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur $\vec{E}$ y soit tangent. Cette courbe possède la même orientation que $\vec{E}$.

Ces lignes permettent de déterminer la direction et l'orientation du champ. Elles reflètent aussi son intensité ; plus elles sont serrées plus le champ est intense.



Exemple d'une ligne de champ; $\vec{E}$ est tangent en tout point à cette ligne

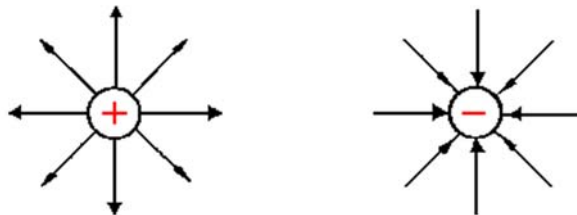
Soit $\overrightarrow{d\ell}$ un déplacement élémentaire le long de la courbe (Γ) . Comme $\vec{E}$ est tangent à (Γ) en tout point, on conclue alors que $\vec{E}$ est parallèle à $\overrightarrow{d\ell}$. Cela permet d'écrire alors :

$$\vec{E} \wedge \overrightarrow{d\ell} = 0$$

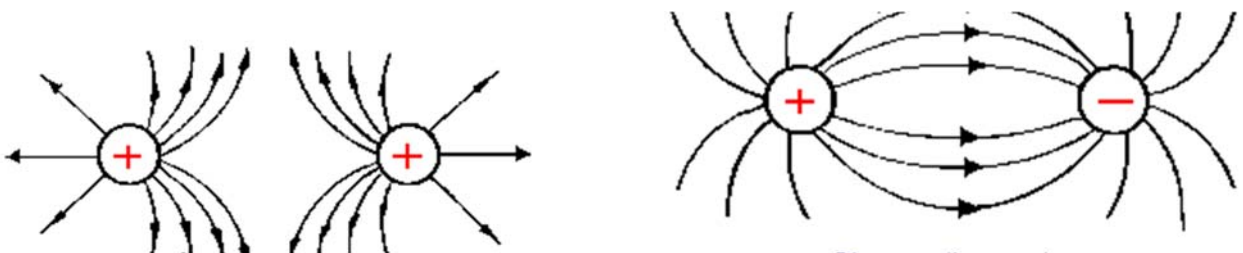
Selon le système de coordonnées considéré, cette dernière équation permet de tracer les lignes de champ en résolvant les systèmes d'équations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} & \text{En coordonnées cartésiennes} \\ \frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} & \text{En coordonnées cylindriques} \\ \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin(\theta) d\varphi}{E_\varphi} & \text{En coordonnées sphériques} \end{array} \right.$$

Exemples :



Champ radial: sortant pour une charge positive et entrant pour une charge négative



Force répulsive : Les lignes de champ électrique se repoussent latéralement.

Force attractive : Les lignes de champ électrique s'éloignent de la charge positive et convergent vers la charge négative.

III. Potentiel électrostatique

III.1- Circulation du champ le long d'une courbe

- **Origine énergétique du concept de circulation**

Soient une particule de charge q , située en un point M d'une courbe (C) où règne un champ électrostatique $\vec{E}$ quelconque, et $\overrightarrow{d\ell}$, un déplacement élémentaire sur (C) .

La force électrostatique subie par cette particule s'écrit :

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$

Le travail élémentaire de cette force lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$ est par définition :

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

D'un point A à un point B , le travail de cette force est donné par l'intégrale curviligne suivante :

$$W(AB) = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = q \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = qC_{AB}$$

Où :

$$C_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

désigne la circulation du champ électrostatique de A à B le long de la courbe (C) .

- **Circulation du champ d'une charge ponctuelle**

Supposons que le champ $\vec{E}(M)$ est celui d'une charge ponctuelle Q située au point O . Ce champ s'écrit :

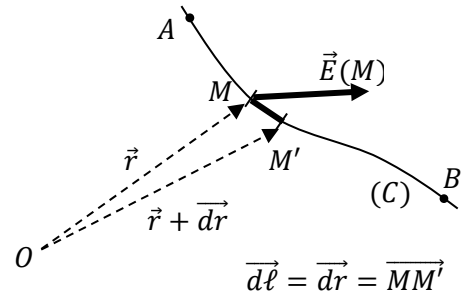
$$\vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$ est donné par :

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

La circulation élémentaire s'écrit alors:

Sachant que $d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$, $dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = K \frac{Q}{r^2} dr = -d\left(K \frac{Q}{r}\right)$



D'un point A à un point B , la circulation est donc :

$$C_{AB} = \int_{(AB)} dC = - \int_{(A)}^{(B)} d\left(K \frac{Q}{r^2}\right) = \left(K \frac{Q}{r_A} - K \frac{Q}{r_B}\right)$$

- **Circulation du champ d'un ensemble de charges**

Soient n charges ponctuelles Q_i . D'après le principe de superposition, le champ électrostatique $\vec{E}$ total créé par l'ensemble des charges en un point M est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) \quad \text{Avec} \quad \vec{E}_i(M) = K \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i}$$

Il en résulte que :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \sum_{i=1}^n dC_i \quad \text{Avec} \quad dC_i = \vec{E}_i \cdot \vec{d\ell} = -d\left(K \frac{Q_i}{r_i}\right)$$

La circulation de $\vec{E}$ de A à B est donc :

$$C_{AB} = \sum_{i=1}^n \left(K \frac{Q_i}{r_{i,A}}\right) - \sum_{i=1}^n \left(K \frac{Q_i}{r_{i,B}}\right)$$

III.2- Notion de potentiel électrostatique

Du calcul précédent, il résulte que la circulation de $\vec{E}$ peut se mettre sous la forme :

$$C_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = K \frac{Q}{r_A} - K \frac{Q}{r_B} = V(A) - V(B)$$

- **Cas d'une charge unique**

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -d\left(K \frac{Q}{r}\right) = -dV$$

Avec
$$V(r) = K \frac{Q}{r} + cte$$

- **Cas d'un système de charges**

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -d\left(\sum_{i=1}^n K \frac{Q_i}{r_i}\right) = -dV$$

Avec
$$V(r) = \sum_{i=1}^n K \frac{Q_i}{r_i} + cte$$

Remarque : cte est une constante d'intégration qu'on détermine selon des conditions aux limites.

Le champ scalaire $V(r)$ défini ci-dessus est appelé *potentiel électrostatique*.

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -dV$$

➤ *La circulation du champ électrostatique entre deux points est égale à la diminution du potentiel entre ces deux points.*

Remarque :

- Cette circulation est dite *conservative* si elle ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A vers B , mais seulement des états initial et final.
- Sur une courbe fermée (B et A confondus), la circulation de $\vec{E}$ est nulle.
- Le long d'une ligne de champ ($\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} > 0$), on a $V(A) > V(B)$. Ainsi, les lignes de champ électrostatique vont dans le sens des potentiels décroissants.

• **Cas d'une distribution continue de charges**

Dans le cas des distributions continues de charges, la procédure de calcul du potentiel V est exactement la même que celle utilisée pour le champ $\vec{E}$. Ainsi, pour un élément de charge dq , le potentiel créé en un point distant de r est :

$$dV(M) = K \frac{dq}{r}$$

Pour avoir le potentiel créé par toute la charge, il faut sommer toutes les contributions élémentaires, c'est-à-dire intégrer sur la distribution de charge considérée :

- Distribution linéique : $dq = \lambda d\ell \Rightarrow V(M) = \int_{(C)} k \frac{\lambda d\ell}{r}$
- Distribution surfacique : $dq = \sigma ds \Rightarrow V(M) = \iint_{(S)} k \frac{\sigma ds}{r}$
- Distribution volumique : $dq = \rho dv \Rightarrow V(M) = \iiint_{(V)} k \frac{\rho dv}{r}$

III.3- Relation entre les deux champs, $\vec{E}(M)$ et $V(M)$

Soit $V(M)$, un champ scalaire défini en tout point de l'espace. En coordonnées cartésiennes, sa différentielle totale s'écrit :

$$dV(M) = dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

L'expression précédente peut s'écrire comme suit :

$$dV(x, y, z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

On reconnait dans cette dernière équation, l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$

$$\overrightarrow{d\ell} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

L'autre membre de l'équation est appelé gradient de la fonction $V(M)$. Il est noté :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(M) = \vec{\nabla} V(M) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

Avec $\vec{\nabla}$ est l'opérateur *nabla* tel que $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

C'est, en quelque sorte, la généralisation de la dérivée première à 3 dimensions.

Tenant compte de la relation ci-dessus de la circulation, on peut écrire :

$$dV = \vec{\nabla} V(M) \cdot \overrightarrow{d\ell} = -dC = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

On conclut alors que :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} V(M)$$

Relation qui signifie que le champ électrostatique $\vec{E}$ dérive du potentiel scalaire V .

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être donc représentées soit par un champ de vecteurs $\vec{E}(M)$ soit par un champ de scalaires $V(M)$, qui sont liés par les relations établies ci-dessus. Ainsi, la connaissance de l'un permet d'établir l'autre. Cependant, en pratique, étant donné que le potentiel est un scalaire, il est plus judicieux ou plus facile de déterminer ce potentiel puis en déduire le champ électrostatique.

Dans les différents systèmes de coordonnées, on a :

- **Expressions du déplacement élémentaire**

- Cartésienne : $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$
- Cylindriques : $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{k}$
- Sphériques : $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

- **Expressions de la différentielle totale**

- Cartésienne : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz$

- Cylindriques : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz$

- Sphériques : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) d\varphi$

- **Expressions du gradient**

- Cartésienne : $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -E_x \vec{i} - E_y \vec{j} - E_z \vec{k}$

- Cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -E_\rho \vec{u}_\rho - E_\varphi \vec{u}_\varphi - E_z \vec{k}$

- Sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi = -E_r \vec{u}_r - E_\theta \vec{u}_\theta - E_\varphi \vec{u}_\varphi$

Ces différentes expressions du gradient s'obtiennent à l'aide de la relation fondamentale qui donne sa définition intrinsèque (indépendante du repère):

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell}$$

III.4- Equipotentielles

On appelle surface équipotentielle (ligne à 2D) une surface sur laquelle le potentiel électrostatique est constant, c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à cette surface ont un potentiel constant.

$$V(M) = \text{constante} \Rightarrow V(M) = V(M')$$

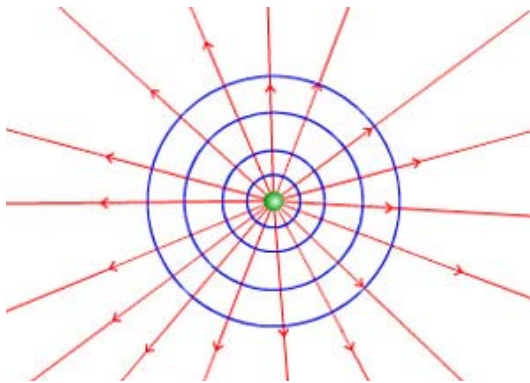
Un déplacement $d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$ le long de cette courbe correspond donc à :

$$dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell}, \quad \text{Avec } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

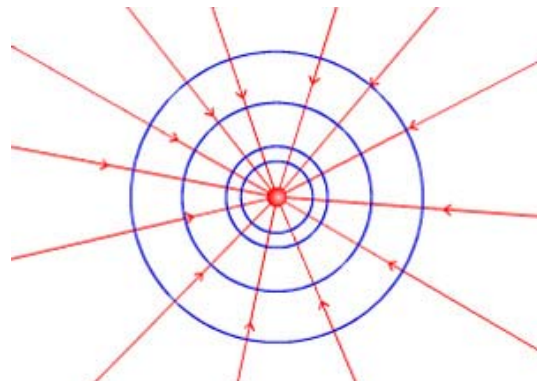
On conclut alors que :

- $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ est un vecteur perpendiculaire en tout point à cette surface.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles.

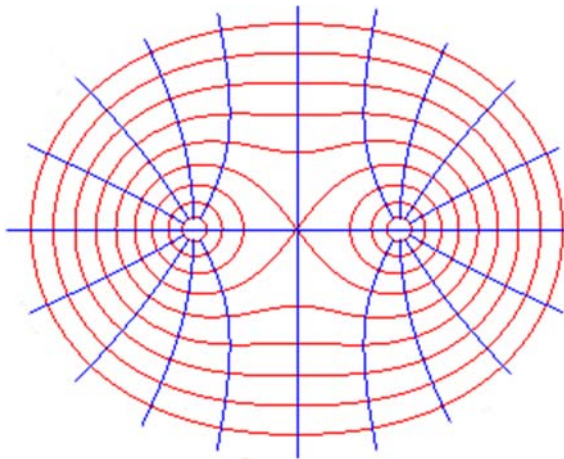
Exemples :



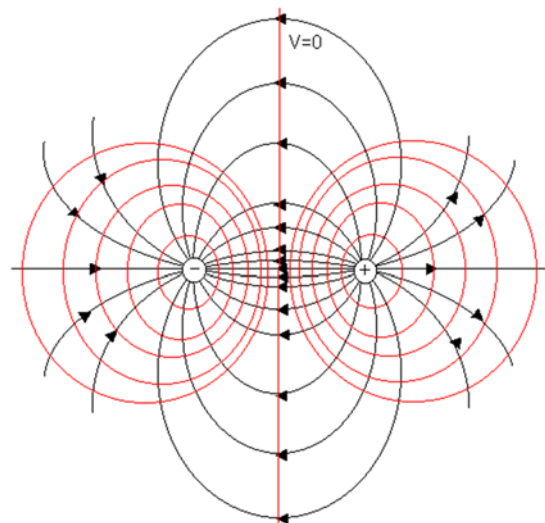
Charge positive



Charge négative



charges égales – de même signe



charges égales – de signes opposés

IV.- Energie potentielle électrostatique

- **Energie potentielle d'une charge**

Reprenons la section (III.1). Le travail qu'on doit fournir pour déplacer une charge q d'un point A à un point B en suivant le chemin (C) est donné par :

$$W(AB) = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q(V_A - V_B)$$

Le travail effectué sur un objet est toujours égal à la variation d'énergie de l'objet. Dans ce cas, le travail de la force $\vec{F}$ effectué sur la charge q est égal à la variation de l'énergie potentielle électrostatique de la charge q .

$$W(AB) = q(V_A - V_B) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

On peut poser donc : $E_p(M) = qV(M)$

$E_p(M)$ est l'énergie potentielle de la charge q placée dans le champ de potentiel électrostatique $V(M)$. Elle est égale au travail qu'on doit fournir pour amener la charge q de façon quasi-statique depuis l'infini (où nous avons supposé que $E_p(\infty) = 0$; énergie de référence) jusqu'au point M .

- **Energie électrostatique d'interaction d'un ensemble de charges ponctuelles**

- **Cas d'une paire de charges ponctuelles**

Soit un système constitué d'une paire de charges q_1 , placée au point M_1 , et q_2 , au point M_2 . L'énergie potentielle de la charge q_2 est égale au travail que l'on doit fournir pour la ramener de l'infini jusqu'au point M_2 . Ce travail est identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en M_1 en présence de q_2 déjà située en M_2 .

$$U_{21} = q_2 V_1(M_2) = q_1 V_2(M_1) = U_{12}$$

Cela signifie que ce système de deux charges possède une énergie potentielle électrostatique qui s'écrit :

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}}, \quad \text{Où : } r_{12} = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$$

- **Cas d'un système de N charges ponctuelles**

Si maintenant on amène une 3^{ème} charge q_3 de l'infini jusqu'en M_3 , en présence des charges q_1 et q_2 qui sont fixes, il faut fournir un travail supplémentaire :

$$U_3 = q_3 (V_1(M_3) + V_2(M_3)) = U_{31} + U_{32}$$

L'énergie électrostatique correspondante à ce système de 3 charges s'écrit alors :

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

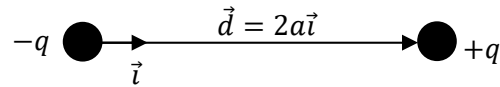
Remarquons qu'à chaque paire de charges (q_i, q_j) est associée une énergie potentielle d'interaction. Pour un ensemble de N charges ponctuelles, on aura alors :

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

On qualifie également cette énergie d'énergie potentielle interne du système. Le facteur $1/2$ apparaît parce que chaque paire est comptée deux fois.

V.- Dipôle électrique

On appelle dipôle électrique un arrangement de deux charges de signes opposés $(+q, -q)$ séparée par une distance $d = 2a$.

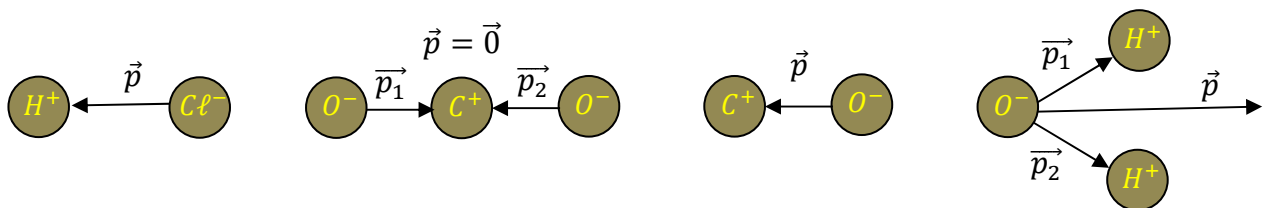


- **Définition :** On appelle moment dipolaire électrique la grandeur :

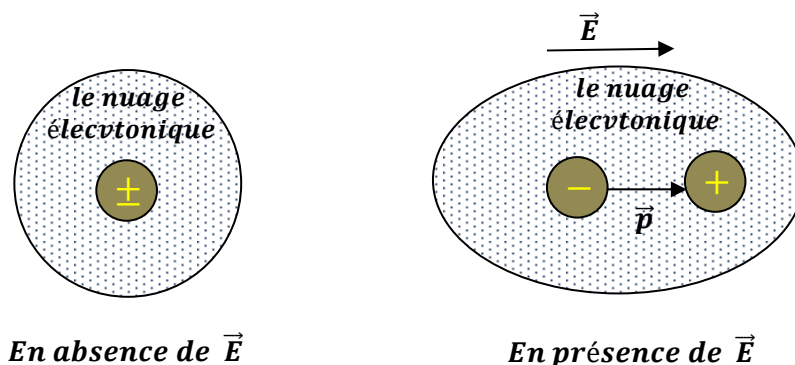
$$\vec{p} = q\vec{d} = 2aq\vec{i}$$

Tel que le vecteur $\vec{d}$ est dirigé de la charge négative vers la charge positive.

Dans la nature, il existe des moments dipolaires permanents. Les molécules telles que HCl , CO , H_2O et CO_2 constituent des exemples de dipôles électrostatiques permanents.



Dans le cas d'un atome, en absence d'un champ électrique extérieur $\vec{E}$, le moment dipolaire est nul ; le centre de gravité des électrons est confondu avec celui des charges positives (protons du noyau). En présence de ce champ $\vec{E}$, la distribution des électrons sera déformée. En conséquence, le centre de masse des électrons ne sera plus confondu avec le noyau positif. Cela induira donc un moment dipolaire non nul.



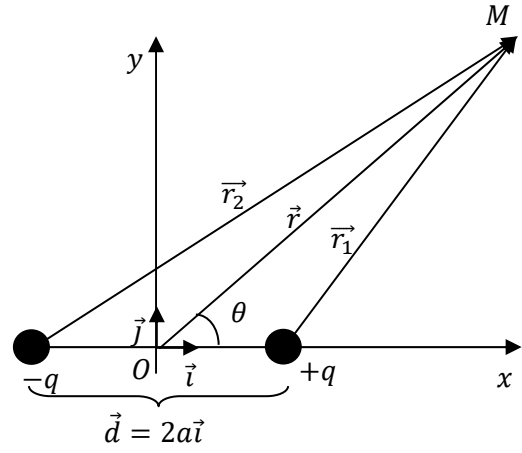
- **Potentiel et champ électrostatique créés par un dipôle à grande distance**

Au point M , on peut calculer le champ $\vec{E}$ directement en utilisant le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

Ou bien, en utilisant le potentiel électrostatique ($V(\infty) = 0$):

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = K \frac{(+q)}{r_1} + K \frac{(-q)}{r_2}$$



A priori :

$$V(M) = Kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Cependant, les calculs du champ et du potentiel créés par un dipôle se font souvent en des points très éloignés du dipôle, c'est-à-dire $r \gg a$. A partir du schéma ci-dessus, on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{a} = \vec{r} - a\vec{i} \\ \vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{a} = \vec{r} + a\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = r^2 - 2racos(\theta) + a^2 \\ r_2^2 = r^2 + 2racos(\theta) + a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = r^2 \left(1 - \frac{2acos(\theta)}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ r_2^2 = r^2 \left(1 + \frac{2acos(\theta)}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r \sqrt{1 - \frac{2acos(\theta)}{r} + \frac{a^2}{r^2}} \\ r_2 = r \sqrt{1 + \frac{2acos(\theta)}{r} + \frac{a^2}{r^2}} \end{cases}$$

Comme $r \gg a$, alors : $\frac{a}{r} \rightarrow 0$ et :

$$\begin{cases} r_1 \approx r \left(1 - \frac{2acos(\theta)}{r} \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{acos(\theta)}{r} \right) \\ r_2 \approx r \left(1 + \frac{2acos(\theta)}{r} \right)^{1/2} \approx r \left(1 + \frac{acos(\theta)}{r} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 \cdot r_2 \approx r^2 \\ r_2 - r_1 \approx 2acos(\theta) \end{cases}$$

Où nous avons utilisé l'approximation : $(1 + \varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ pour un $\varepsilon \ll 1$.

Dans ces conditions, le potentiel V au point M s'écrit :

$$V(M) \approx \frac{2Kqa \cos(\theta)}{r^2} = \frac{Kp \cos(\theta)}{r^2} = K \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = K \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Avec : $\vec{p} = qd \vec{l} = q2a \vec{l}$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{r}$ tel que $\vec{u}_r \cdot \vec{l} = \cos(\theta)$. On note que q est toujours la valeur absolue de la charge.

• Champ électrique

Le champ $\vec{E}$ au point M se déduit par la relation : $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$

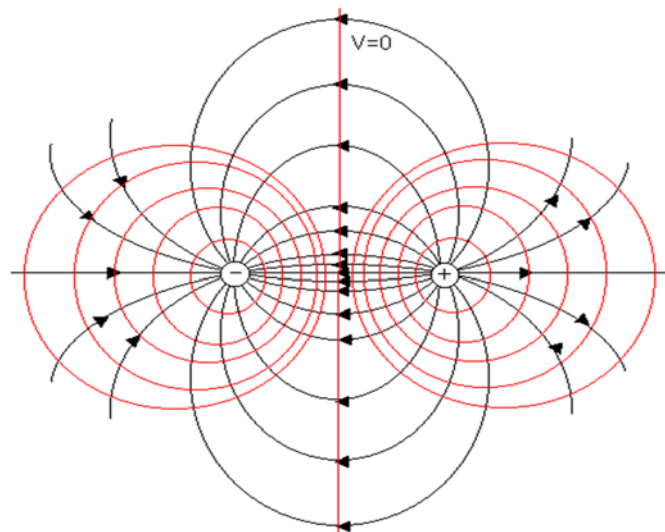
En coordonnées polaires, les composantes du champ $\vec{E}$ sont données par :

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = K \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = K \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \end{cases}$$

Remarque : Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroît en $\frac{1}{r^2}$ et le champ en $\frac{1}{r^3}$ ($\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ respectivement pour une charge ponctuelle). Cependant, il existe des distributions de charge donnant des potentiels en $\frac{1}{r^4}$, $\frac{1}{r^5}$, ...etc. On les appelle *systèmes multipolaires*. Le terme en $\frac{1}{r^3}$ est dit *quadrupolaire*.

La figure ci-dessous indique l'allure des lignes de champ et des lignes équipotentielles dans le plan (xOy). Les lignes de champ partent de la charge positive et se referment sur la charge négative et sont normales aux lignes équipotentielles.

Lignes de champ et équipotentielles d'un dipôle électrostatique

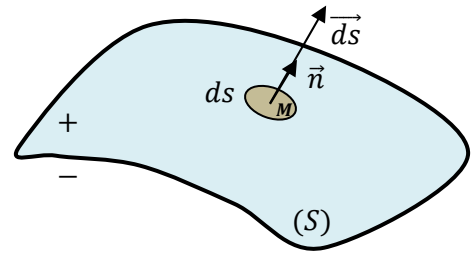


VI.- Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

VI.1- Flux d'un champ vectoriel

a- Orientation d'une surface

De façon arbitraire, on attribue les signes (+) et (-) aux deux faces d'une surface (S). Généralement, le signe (-) pour la face interne et le signe (+) pour la face externe quand il est possible de distinguer les deux faces.



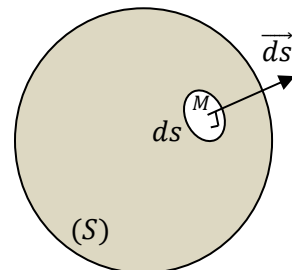
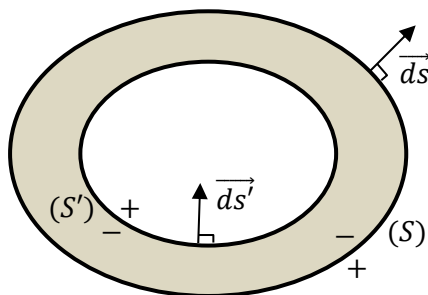
Un élément de (S) d'aire ds situé autour d'un point M sera caractérisé par le vecteur élément de surface $\vec{ds}$ tel que :

$$\vec{ds} = ds\vec{n}$$

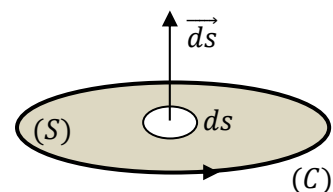
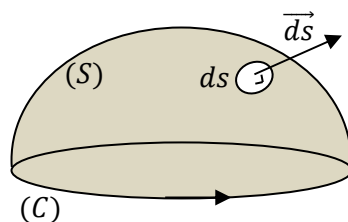
Où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal en M à (S) et dirigé de la face (-) vers la face (+).

Remarques :

- Dans le cas d'une surface fermée dont on peut distinguer sans ambiguïté l'intérieur et l'extérieur, il convient de noter toujours (-) la face interne et donc d'orienter le vecteur $\vec{ds}$ de l'intérieur vers l'extérieur.



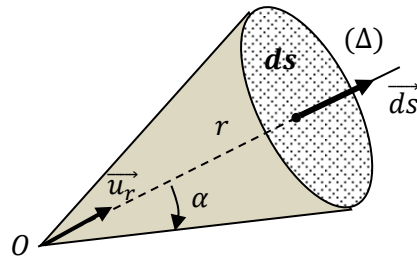
- Dans le cas des surfaces ouvertes s'appuyant sur un contour orienté, le vecteur $\vec{ds}$ est orienté suivant la règle du tire – bouchon ou la main droite (ou la main droite)



- Dans le cas d'une surface quelconque, le choix est arbitraire.

b- Notion d'angle solide

Soit un cône de sommet O , de génératrice (Δ) et d'angle au sommet α . Il découpe sur une sphère de rayon r et de centre O une surface élémentaire ds .



Par définition, l'angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel on voit l'élément ds de O est :

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$

Pour toute la surface (S) : $\Omega = \int_{(S)} d\Omega$

Remarques :

- Ω est compté positivement si l'on voit de O la face négative de (S) .
- Ω est indépendant du rayon r qui intervient dans sa définition.
- Ω est sans dimension (rapport de deux surfaces). Il s'exprime dans le SI en *stéradian* (symbole : sr)
- La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace à 3D de l'angle défini dans un plan.

En coordonnées sphériques, à r constant ds est donné par :

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

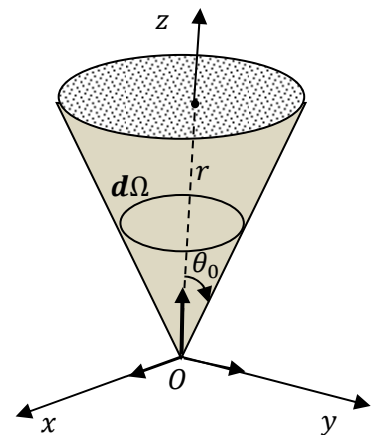
Cela implique :

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet θ_0 est :

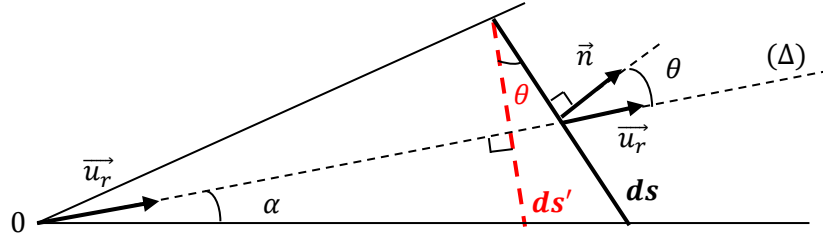
$$\Omega = \int_{(S)} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$



- pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi \text{ sr}$. C'est l'angle sous lequel on voit le demi-espace.
- Pour $\theta_0 = \pi \Rightarrow \Omega = 4\pi \text{ sr}$. C'est l'angle sous lequel on voit tout l'espace. Cette valeur joue le même rôle que l'angle 2π dans un plan.

D'une façon générale, le cône peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}_r$ (voir la figure ci dessous).



L'angle solide élémentaire est alors défini par : $d\Omega = \frac{ds'}{r^2} = \frac{ds \cos\theta}{r^2}$

Sachons que : $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = \cos\theta$ et $\vec{ds} = ds \vec{n}$, on a alors : $d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$

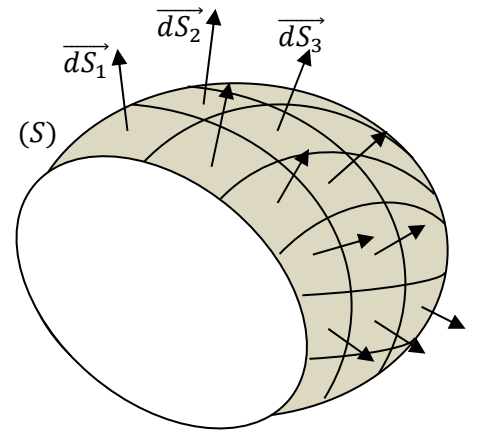
c- Définition du flux

Considérons un champ de vecteurs $\vec{A}$ régnant dans tout l'espace. Dans ce dernier, on peut définir une surface (S) qui peut être caractérisée par un ensemble de vecteurs $\vec{ds} = ds \vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à ds .

On appelle flux de $\vec{A}$ à travers l'élément de surface caractérisé par le vecteur $\vec{ds}$ le produit scalaire :

$$d\phi = \vec{A} \cdot \vec{ds} = ds \vec{A} \cdot \vec{n}$$

Le flux du champ $\vec{A}$ à travers une surface (S) , non nécessairement fermée, est défini comme la somme des flux élémentaires :



$$\phi = \int d\phi = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iint_{(S)} ds \vec{A} \cdot \vec{n}$$

L'unité du flux dépend du domaine considéré ($N \cdot m^2 / C$ si $\vec{A} \equiv \vec{E}$).

Un champ de vecteur $\vec{A}$ à flux conservatif est un champ de vecteur dont le flux à travers toute surface fermée est nul.

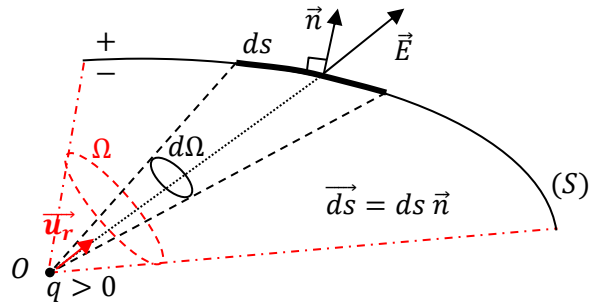
$$\forall (S) \text{ une surface fermée, } \phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

VI.2- Flux du champ $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle

1- A travers une surface ouverte:

Dans le cas où le champ de vecteurs $\vec{A}$ est celui d'une charge électrique ponctuelle q placée en un point O :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{kq}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{ds}$$



les signes + et - sont attribués de façon arbitraire.

D'après la définition de l'angle solide : $\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{ds}}{r^2} = d\Omega$ est l'angle sous lequel ds est vu depuis le point O .

Le flux élémentaire précédent s'écrit alors :

$$d\phi = kq d\Omega$$

Le flux total envoyé par la charge q à travers toute la surface (S) s'écrit :

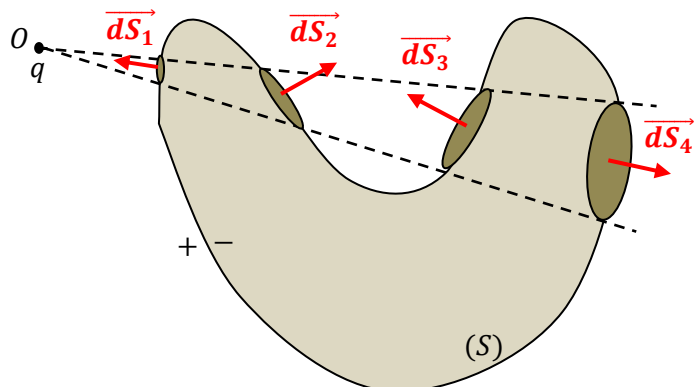
$$\phi = \int d\phi = kq \int d\Omega = kq\Omega$$

Ω est l'angle solide sous lequel la surface (S) est vue depuis la charge. Remarquons que ϕ dépend de Ω et non de la distance r .

2- A travers une surface fermée

a- La charge q est à l'extérieur de la surface (S)

Un cône élémentaire de sommet O (position de la charge q) découpe sur la surface (S) un nombre pair d'éléments de surfaces auxquels correspondent des angles solides de même module (puisqu'ils correspondent au même cône) et de signes alternés (ce signe est positif quand on voit de O la face négative de (S)).



Dans cet exemple, le flux élémentaire de $\vec{E}$ s'écrit : $d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 + d\phi_4$

D'après la section précédente : $d\phi = kq(d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3 + d\Omega_4) = 0$

Puisque : $d\Omega_1 = d\Omega_3 = -d\Omega$ et $d\Omega_2 = d\Omega_4 = d\Omega$

Ainsi, le flux de q à travers (S) est nul.

- **Généralisation**

Le flux total envoyé à travers une surface fermée par une charge extérieure à celle-ci est nul.

b- La charge q est à l'intérieur de la surface (S)

Le nombre d'éléments découpés sur (S) est cette fois impair. Les contributions à $d\phi$ des éléments découpés sur (S) s'annulent deux à deux, sauf le dernier qui est positif (élément dS_3 pour cet exemple).

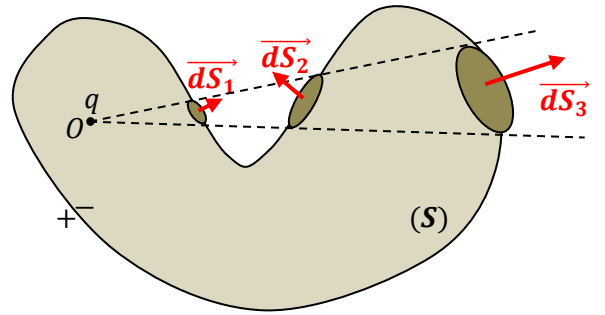
$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 = d\phi_3$$

En effet :

$$d\phi = kq (d\Omega_1 + d\Omega_2 + d\Omega_3)$$

$$d\phi = kq (d\Omega - d\Omega + d\Omega)$$

D'où : $d\phi = kq d\Omega$



Le flux total issu de O s'obtient en sommant cette dernière équation sur toutes les directions :

$$\phi = \int d\phi = kq \int d\Omega = kq \Omega$$

$$\phi = kq 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\Omega = 4\pi$: angle solide correspondant à tout l'espace et $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Ainsi :

Le flux total envoyé à travers une surface fermée par une charge q intérieur à celle-ci est égal à q/ϵ_0 .

VI.3- Théorème de Gauss

Soit $\vec{E}$ un champ électrostatique créé par une distribution quelconque de charges q_i . Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée (S) est par définition :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

D'après le théorème de superposition, $\vec{E}$ peut être décomposé en la somme des champs $\vec{E}_i$ créés par les diverses charges q_i :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Il en va de même pour le flux :

$$\phi = \sum_i \phi_i$$

D'après les résultats des sections précédentes :

- $\phi_i = 0$ si q_i est à l'extérieur de (S)
- $\phi_i = q_i/\epsilon_0$ si q_i est à l'intérieur de (S)

Cela implique donc :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$$

C'est le théorème de Gauss.

Enoncé du théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges contenues à l'intérieur de celle-ci.

$$\phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$$

$Q_{\text{intérieure}}$ désigne la charge totale se trouvant à l'intérieur de (S). Les charges se trouvant à l'extérieur de (S) envoient un flux nul.

Quand le flux est positif, il est sortant. Quand il est négatif, le flux est entrant.

Remarques :

- Dans une région vide de charges, le champ électrostatique est à *flux conservatif*

$$\oint\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

- Le théorème de Gauss est très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque. Pour cela, il faut choisir dans chaque cas une surface (S) adaptée, respectant les propriétés de symétrie du champ. Cette surface est appelée *surface de Gauss*.

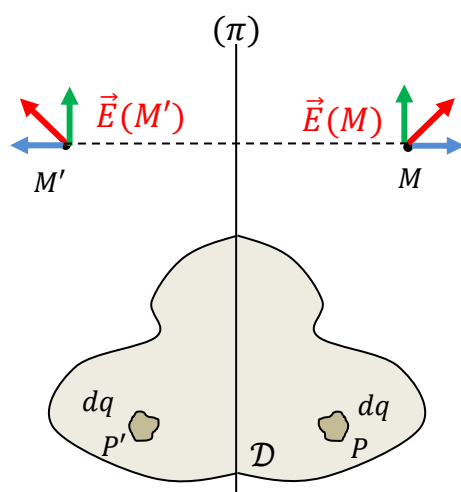
VI.4- Symétries et invariances du champ électrostatique

Une opération (rotation, translation,...etc.) qui laisse invariant la distribution de charges laisse également invariant le champ électrostatique. En d'autre terme, le champ électrique possède les mêmes symétries et propriétés d'invariance que la distribution de charges qui le crée (principe de Curie). Nous allons voir que la prise en compte de ces symétries et invariances aide à prévoir partiellement la structure du champ électrostatique correspondant.

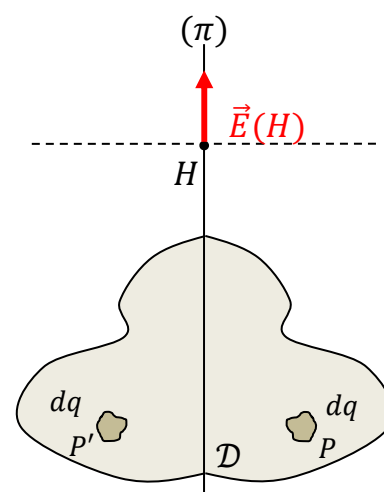
- **Cas d'une distribution présentant un plan de symétrie**

Une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan (π) si pour tout point P il existe un point P' , symétrique par rapport à (π) , tel que :

$$dq(P) = dq(P')$$



En dehors du plan de symétrie (π)



En un point $H \in (\pi)$

Aux points M et M' symétriques par rapport à un plan de symétrie (π) , appelé également *plan-miroir*, d'une distribution de charges $\mathcal{D}$, les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques l'un de l'autre. Donc leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles perpendiculaires au plan sont opposées. D'où :

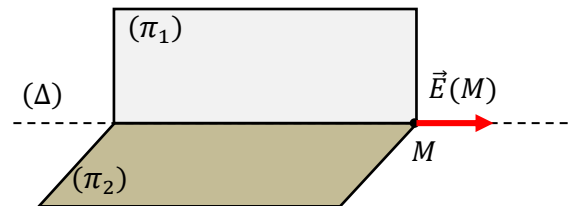
En un point H appartenant à un plan de symétrie (π) , le champ $\vec{E}(M)$ est porté par ce plan.

En conséquence, si une distribution de charges quelconque possède deux plans de symétrie (π_1) et (π_2) , alors :

$$\begin{cases} M \in (\pi_1) \Rightarrow \vec{E}(M) \in (\pi_1) \\ M \in (\pi_2) \Rightarrow \vec{E}(M) \in (\pi_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) \text{ est porté par la droite } (\Delta) = (\pi_1) \cap (\pi_2)$$

(Δ) est une ligne de champ.

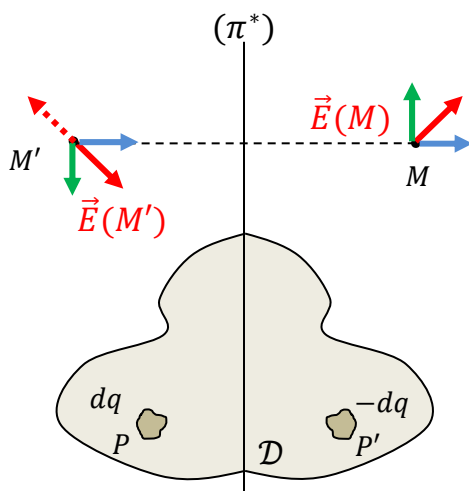
Le champ $\vec{E}$ appartient à l'intersection de (π_1) et de (π_2) , il est donc porté par la droite (Δ) .



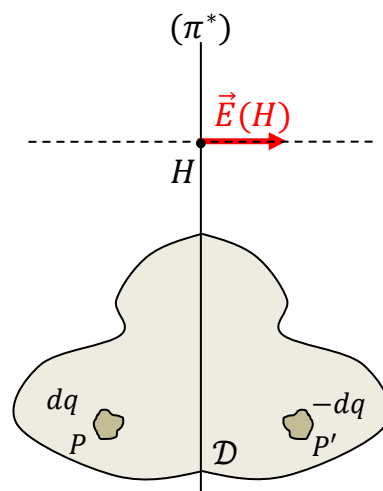
• Cas d'une distribution présentant un plan d'antisymétrie

Une distribution de charges est antisymétrique par rapport à un plan (π^*) si pour tout point P il existe un point P' , symétrique par rapport à (π^*) , tel que :

$$dq(P') = -dq(P)$$



En dehors du plan d'antisymétrie (π^*)



En un point $H \in (\pi^*)$

Au point M' symétrique de M par rapport à un plan d'antisymétrie (plan anti-miroir) (π^*) d'une distribution de charges $\mathcal{D}$, le champ électrostatique $\vec{E}(M')$ est l'opposé du symétrique du champ $\vec{E}(M)$ créé par la distribution en M .

$$\vec{E}(M') = -\text{sym } \vec{E}(M)$$

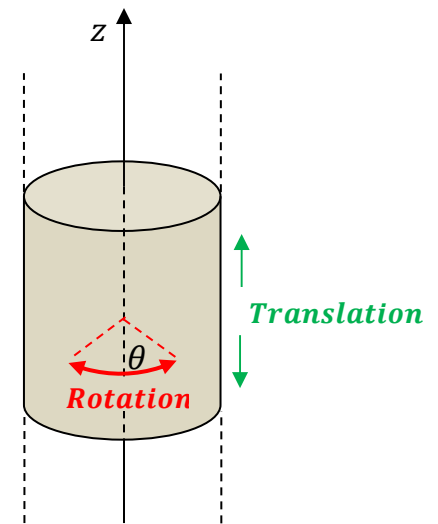
Donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales. D'où :

En un point H appartenant à un plan d'antisymétrie (π^), le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.*

Remarque : Cette propriété d'antisymétrie est d'un emploi plus rare.

• Invariances

- Si toute rotation autour d'un axe laisse la distribution de charges invariante, alors le champ électrostatique créé par cette distribution ne dépendra pas de l'angle qui mesure cette rotation.
- Si toute translation suivant un axe laisse la distribution de charges invariante, alors le champ électrostatique ne dépendra pas de la variable associée à cet axe.



Exp: Fil ou cylindre infini

• Quelques exemples de distributions de charges

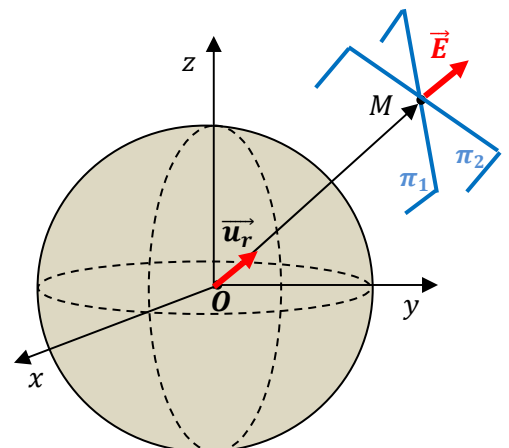
- Sphère chargée (densité uniforme)

Il existe une infinité de plans diamétraux passant par O , $\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{u_r}$ (en coordonnées sphériques), qui sont des plans de symétrie pour la distribution. Ces plans se coupent selon la direction de $\overrightarrow{OM}$. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, au point M , appartient à cette direction et donc nécessairement colinéaire au vecteur de base $\overrightarrow{u_r}$.

$$\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \overrightarrow{u_r}$$

La distribution de charges (surfactive ou volumique) étant uniforme, donc invariante dans toute rotation autour d'une droite passant par le centre de la sphère. Le champ électrostatique ne dépend pas des variables angulaires (θ et φ). On a alors :

$$\vec{E} = E(r) \overrightarrow{u_r}$$



Dans ce cas, le champ $\vec{E}(r)$ est dit radial.

La surface de Gauss appropriée est une sphère de centre O et de rayon r , choisi selon l'endroit où nous souhaitons calculer le champ.

- Cylindre infini chargée (densité uniforme)

Tout plan contenant l'axe du cylindre, (Oz) sur la figure, est plan de symétrie et tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre est également plan de symétrie. Le champ électrostatique est donc radial (à ne pas confondre la coordonnée cylindrique r , distance à l'axe (Oz) , de la coordonnée sphérique qui est la distance à l'origine O).

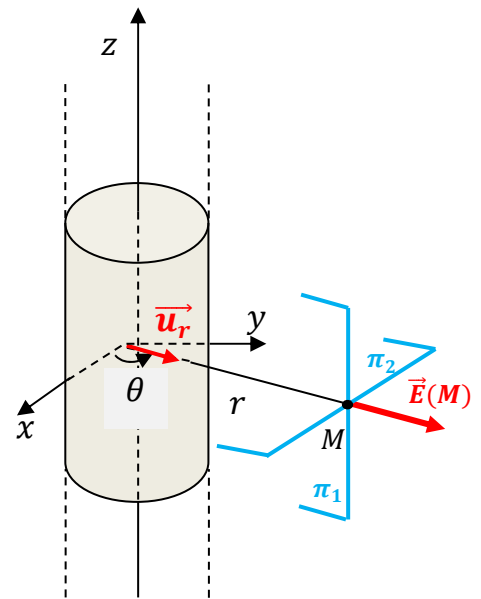
En un point M de l'espace de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le champ électrostatique est donné, à priori, par :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

La distribution de charges (surfactive ou volumique) étant uniforme, donc invariante dans toute rotation autour de l'axe du cylindre, (Oz) . Le champ $\vec{E}$ est donc indépendant de la variable angulaire, θ . De plus, étant donné que le cylindre est de longueur infinie, la distribution de charge et le champ $\vec{E}$ correspondant sont invariants dans toute translation de direction (Oz) . Finalement, on établit que le champ ne dépend que de la variable r :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

La surface de Gauss appropriée est un cylindre de même axe, de hauteur h (quelconque) et de rayon r , choisi selon l'endroit où nous souhaitons calculer le champ.



- Plan infini chargée (densité surfacique uniforme)

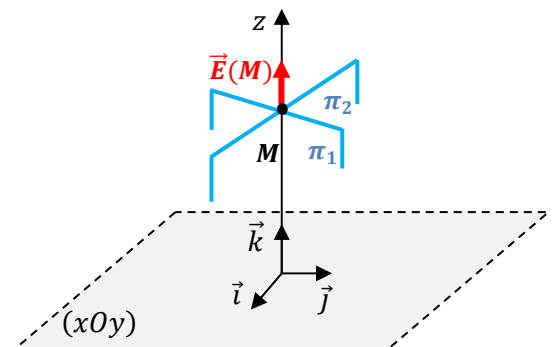
Tous les plans perpendiculaires au plan infini (xOy) , voir la figure, sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrostatique est donc orthogonal au plan (xOy) , puisqu'il appartient aux plans de symétrie. Il s'écrit :

$$\vec{E} = E(x, y, z) \vec{k}$$

Par ailleurs, l'invariance de la distribution par translation selon les axes (Ox) et (Oy) implique que le champ électrostatique ne dépend que de la variable z . D'où :

$$\vec{E} = E(z) \vec{k}$$

La surface de Gauss appropriée est un cylindre de hauteur h (quelconque), de rayon r et symétrique par rapport au plan (xOy) .



Chapitre 2 : Conducteurs en équilibre électrostatique

I. Equilibre électrostatique

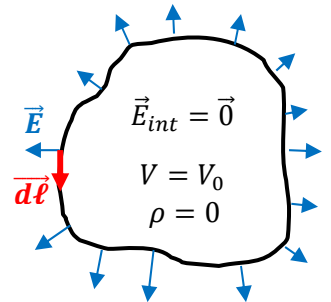
1- Définition : Un conducteur est un corps qui possède des charges libres qui peuvent se déplacer sous l'action d'une force extérieure. Quand on met en contact un conducteur chargé avec un autre neutre, des charges vont se déplacer de l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Comment définir alors un tel équilibre ?

Un conducteur est en équilibre électrostatique si ses charges sont immobiles, c'est-à-dire elles ne sont soumises à aucune force. C'est la condition d'équilibre d'un conducteur.

Remarque : Dans cette partie du cours, tous les conducteurs seront considérés à l'équilibre électrostatique.

2- Propriétés

- A l'intérieur d'un conducteur en équilibre $\vec{E}_{int} = \vec{0}$; Sinon, les charges libres à l'intérieur du conducteur vont se déplacer. Autrement dit, puisque $\vec{F} = q\vec{E}$ et que $\vec{F} = q\vec{E}_{int}$ on a alors $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.
- Le champ électrique $\vec{E}$ est normal à la surface du conducteur. En effet, sinon les charges libres de surface vont se déplacer.
- La relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ implique que $dV = \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$
 - A l'intérieur d'un conducteur en équilibre $\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow V = V_0 = cte$
Le volume du conducteur est un volume équipotentiel.
 - Sur la surface du conducteur, le champ électrique est normal, $\vec{E} \perp \overrightarrow{d\ell} \Rightarrow dV = \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$ on a alors $V = V_0 = cte$. La surface du conducteur est une surface équipotentielle. V_0 est le potentiel du conducteur.
- La charge électrique est nulle à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. Les charges supplémentaires (non-compensées) d'un conducteur chargé se retrouvent en surface de celui-ci. Les charges s'arrangent (se déplacent) de telle façon que le champ électrique à l'intérieur du conducteur reste nul et cela quel que soit l'apport de charges.



Supposons que ρ est la densité volumique de charge dans le conducteur. Soit v un volume quelconque à l'intérieur de ce conducteur. Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(v)} \rho \, dv$$

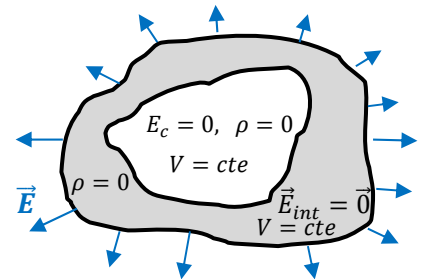
Comme $\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \rho = 0$

Autant de charges négatives que de charges positives. Aucune charge non-compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur.

Remarque : On peut arriver au même résultat en utilisant l'équation locale du théorème de Gauss, $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

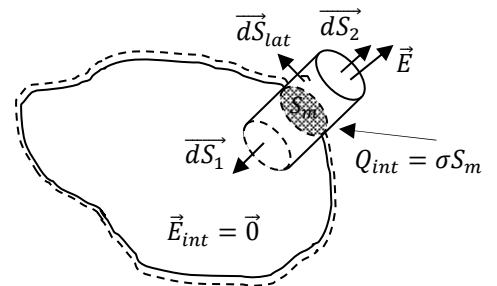
• Cas d'un conducteur creux

Les propriétés d'un conducteur plein chargé en équilibre sont encore valables pour un conducteur creux. Les charges en excès se retrouvent sur la surface externe du conducteur.



3- Champ électrique au voisinage d'un conducteur chargé – Théorème de Coulomb

Considérons un conducteur chargé en équilibre électrostatique. Au voisinage immédiat de sa surface (S), le champ électrique y est normal. Appliquons le théorème de Gauss pour déterminer ce champ. Pour cela, considérons un cylindre fermé de surface de base $dS = dS_1 = dS_2$ comme surface de Gauss (voir la figure ci-contre). Le flux du champ électrique à travers cette surface s'écrit alors:



$$\phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{(S_1)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \oiint_{(S_2)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \oiint_{(S_{lat})} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}$$

Où S_{lat} est la surface latérale du cylindre considéré. On a :

- $\oiint_{(S_1)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 = 0$, car le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul, $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.
- $\oiint_{(S_{lat})} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat} = 0$, car le champ est normal à la surface latérale du cylindre, $\vec{E} \perp \vec{dS}_{lat}$

D'où :

$$\phi = \oiint_{(S_2)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 = ES_2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_m}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \text{puisque } S_2 = S_m = S$$

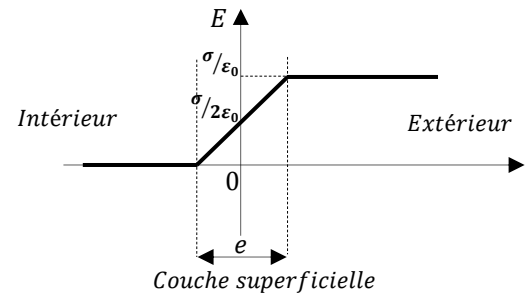
Théorème : Le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur, dirigé vers l'extérieur.

Remarque :

En réalité la charge totale d'un conducteur est distribuée sur une couche d'épaisseur de quelques couches atomiques, et non pas une surface au sens géométrique. Par conséquent, le champ moyen à la surface d'un conducteur est donné par : $E_{moy} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

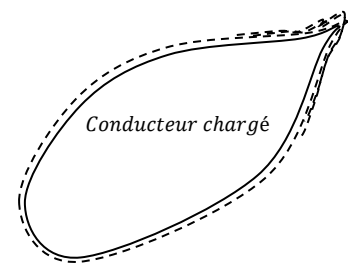


4- Pouvoir (effet) des pointes

Considérons un conducteur sphérique chargé. En vertu du théorème de Gauss, le champ à la surface de celui-ci est donné par :

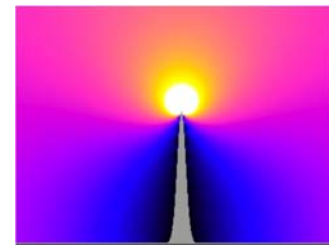
$$\vec{E} = k \frac{Q}{R^2} \vec{u}_r$$

Dans ce cas, du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme avec une densité superficielle σ constante, donnée par : $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$



Toutefois, remarquons que σ est inversement proportionnelle au rayon R . On en déduit, que pour une charge Q donnée, la densité σ est d'autant plus élevée que le rayon R est petit. Par conséquent, lorsqu'on soumet un conducteur à un potentiel V , les charges ne se répartissent pas toujours uniformément. En effet, La charge a tendance à s'accumuler au niveau des pointes de faibles rayons de courbures. Cet effet est appelé effet de pointe ou pouvoir des pointes

Sur une pointe, σ et le champ $\vec{E}$ peuvent atteindre des valeurs très élevées. La charge du conducteur n'est pas uniformément répartie sur sa surface, elle est plus concentrée au niveau des régions de plus faibles rayons de courbure.



Exemple d'application : le paratonnerre

Cet effet de pointe permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe toujours sur des corps pointus tels que les arbres, les maisons,...etc. Près des pointes, le champ électrique peut atteindre des valeurs importantes pouvant ioniser l'air avoisinant. Une décharge électrique peut alors se produire entre les nuages et cette pointe. L'un des

meilleurs moyens pour parer à cette décharge, appelée foudre, est le paratonnerre qui permet l'évacuation vers le sol des charges qui y sont accumulées.

5- Capacité propre d'un conducteur isolé

Un conducteur isolé portant une charge Q_0 crée en tout point M de l'espace un potentiel $V(M)$. En particulier sur sa surface le potentiel vaut V_0 . l'expérience a montré que si on communique au conducteur une charge $Q_\alpha = \alpha Q_0$, ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) le potentiel à la surface du conducteur deviendra $V_\alpha = \alpha V_0$ de tel sorte que :

$$\frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_1}{V_1} = \dots = \frac{Q_n}{V_n} = cte$$

La charge et le potentiel sont proportionnels. La constante de proportionnalité, notée C , est appelée *capacité propre* du conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacité C est une constante caractéristique de la géométrie du conducteur. Elle se mesure en farad ($1F = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volts}}$). Elle caractérise l'aptitude d'un conducteur, porté au potentiel V , d'emmagasiner de la charge Q .

Exemple : capacité d'un conducteur sphérique

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel V_0 , la charge Q_0 sur sa surface, du fait de la symétrie sphérique, sera répartie de manière uniforme. Il est aisé de trouver que : $V_0 = k \frac{Q_0}{R}$

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, la capacité d'un conducteur sphérique s'écrit alors : $C = \frac{Q_0}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R$

proportionnelle au rayon R . Pour un conducteur dont le rayon est celui de la terre $R = 6400 \text{ km}$, on trouve une capacité $C = 710 \mu F$. Pour avoir une capacité $C = 1F$, il faut un conducteur de rayon $R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ m}$! Cela montre que le farad est énorme comme unité.

6- Energie potentielle (interne) d'un conducteur isolé

C'est la même définition que pour une distribution de charge. Dans le cas discret on a vu que E_p est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Avec $V_i = \sum_{j \neq i}^n k \frac{q_j}{r_{ij}}$ le potentiel créé par l'ensemble des charges, excepté q_i , à la position de la charge q_i .

Dans le cas continu, si dq est l'élément de charge autour d'un point P où le potentiel est $V(p)$, alors :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{charge} dq V(p)$$

Dans le cas d'un conducteur en équilibre, le potentiel V est constant. Ce qui permet d'écrire :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{charge} dq V(p) = \frac{1}{2} V \int dq = \frac{1}{2} V \int_{(S)} \sigma dS = \frac{1}{2} QV$$

Autrement dit, l'énergie potentielle d'un conducteur est le travail qu'il faut fournir pour le charger. En prenant comme référence l'infini, $V(\infty) = 0$, l'énergie potentielle d'un élément de charge dq , emmené depuis l'infini jusqu'au conducteur, s'écrit :

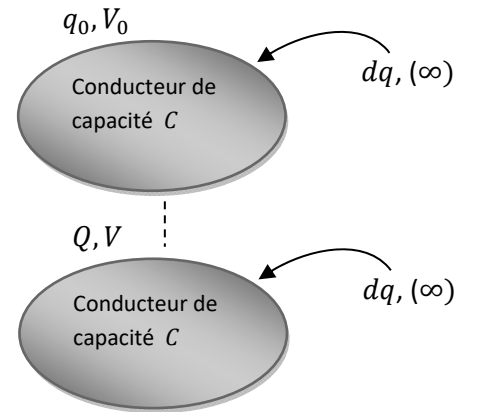
$$dE_p = dq(V - V(\infty)) = Vdq$$

L'opération est répétée jusqu'à ce que la charge du conducteur soit portée à Q . Cependant, à tout instant, nous avons :

$$\frac{q_0}{V_0} = \frac{q_1}{V_1} = \dots = \frac{Q}{V} = C$$

$$\Rightarrow dE_p = \frac{1}{C} q dq \Rightarrow E_p = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$



E_p est l'énergie électrostatique emmagasinée dans le conducteur chargé. Autrement dit, c'est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V .

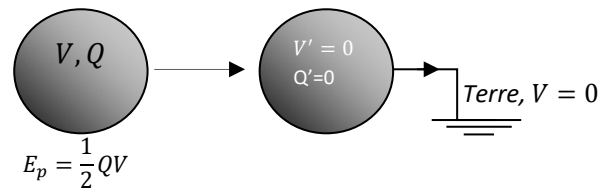
Dans le cas d'un ensemble de n conducteurs chargés en équilibre, l'énergie totale est :

$$E_p = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 + \dots + \frac{1}{2} Q_n V_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

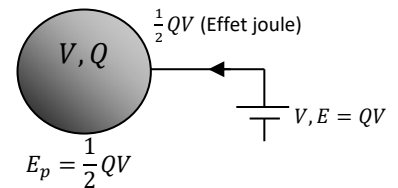
Où Q_i est la charge portée par le conducteur i de potentiel V_i .

7- Charge et décharge d'un conducteur

Lors de la décharge, mise à la terre ($V = 0$), le conducteur fournit une énergie égale à $\frac{1}{2}QV$ sous forme de chaleur (effet Joule). Il restitue la même énergie qu'il a emmagasiné quand on la apporté au potentiel V .



Pour charger le conducteur, on le fait par l'intermédiaire d'un générateur de tension V . Cependant, pour que le conducteur porte une charge Q , il faut que cette même quantité de charge traverse le générateur. Celui-ci fournit donc une énergie qui vaut QV . Le conducteur absorbe la moitié de cette énergie, soit $\frac{1}{2}QV$. L'autre moitié restante est donc dissipée sous forme de chaleur par effet joule dans les fils de connexion.



II. Phénomènes d'influence

A. Influence partielle

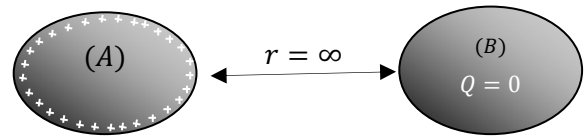
Soit un conducteur initialement neutre, plongé dans un milieu où règne un champ $\vec{E}$.



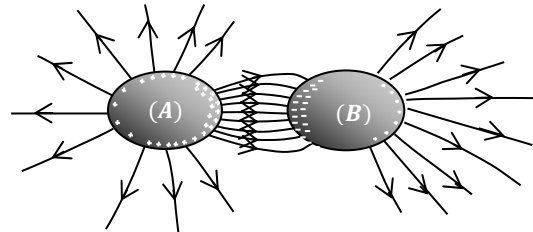
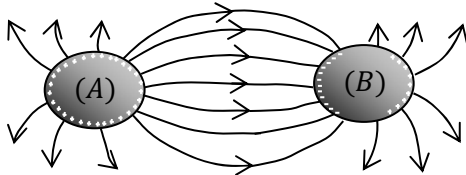
En présence du champ $\vec{E}$, les charges libres du conducteur se déplacent : les charges positives dans le même sens que $\vec{E}$ et les charges négatives dans le sens opposé de telle sorte que la charge totale reste nulle. Le conducteur se recouvre alors d'une distribution de charge non uniforme, créant ainsi un champ $\vec{e}$ en son intérieur qui s'oppose au champ extérieur $\vec{E}$. Tant que l'équilibre n'est pas atteint, on a $\|\vec{E}\| > \|\vec{e}\|$, et le champ total à l'intérieur du conducteur est non nul, $\vec{E}_{int} = \vec{E} + \vec{e} \neq 0$. Le transfert de charges continuera jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, c'est-à-dire $\vec{E}_{int} = \vec{E} + \vec{e} = \vec{0}$. On dit alors que le conducteur est *polarisé* (création de pôles + et -).

Supposons que le champ $\vec{E}$ est celui d'un autre conducteur (A), initialement chargé. Le conducteur, noté (B), est neutre.

Aucune influence entre (A) et (B) tant que les deux conducteurs sont très éloignés l'un de l'autre.

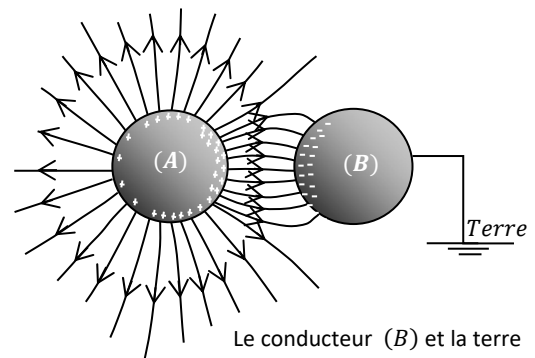


Plus on les rapproche, plus l'influence est grande.



En rapprochant les deux conducteurs, il y aura arrangement des charges sur (B) tel que le champ en son intérieur reste nul. En retour, (B) influence (A) tel qu'il y aura accumulation de charges d'un de ses cotés. On dit qu'il y a influence mutuelle ou influence en retour.

Si maintenant, le conducteur (B) est mis à la terre, il va se décharger. C'est-à-dire, dans ce cas, il va recevoir des électrons qui vont neutraliser les charges positives. La terre et le conducteur (B) sont au même potentiel ($V = 0$), les lignes de champ sortantes du conducteur (B) disparaissent et sa charge devient négative.



Le conducteur (B) et la terre forment un corps unique.

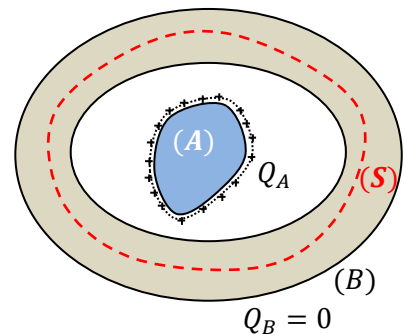
Remarque : L'influence est dite partielle, car seule une partie des lignes de champ issues du conducteur (A) aboutissent au conducteur (B).

B. Influence totale

Soit (B) un conducteur creux entourant un autre conducteur (A), initialement chargé avec une charge Q_A . A l'équilibre, le champ à l'intérieur de (B) est nul.

Soit (S) une surface de Gauss à l'intérieur de (B). L'application du théorème de Gauss implique :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$



Puisque le champ à l'intérieur de (B) est nul. On a alors : $Q_{int} = 0$

Comme $Q_A \neq 0$, on en déduit alors que la surface interne de (B) porte une charge Q_{B_int} égale et opposée à celle du conducteur (A) . En effet :

$$Q_{int} = Q_A + Q_{B_int} = 0 \Rightarrow Q_{B_int} = -Q_A$$

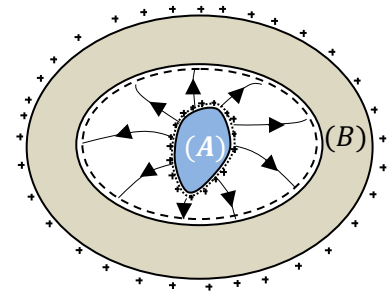
Et comme (B) est initialement neutre, la conservation de la charge implique :

$$Q_B = Q_{B_int} + Q_{B_ext} = 0 \Rightarrow Q_{B_ext} = -Q_{B_int} = Q_A$$

Remarque : Si le conducteur (B) porte initialement une charge Q_0 répartie sur sa surface externe, alors : $Q_{B_int} = -Q_A$ et $Q_{B_ext} = Q_0 + Q_A$ (conservation de la charge).

Lorsque le conducteur (B) entoure complètement le conducteur (A) , toutes les lignes de champ qui partent de (A) aboutissent sur la face interne de (B) . Dans ce cas, l'influence est dite totale.

Ce résultat est valable quelque soit la position de (A) à l'intérieur de (B) .

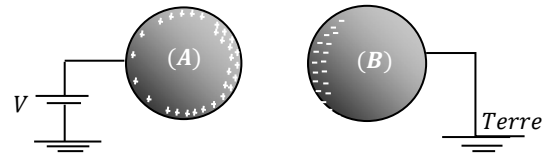


III. Condensateur

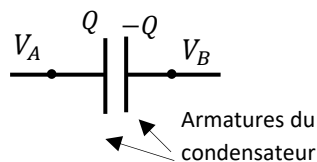
1. Définition

On approche de (B) un conducteur (A) porté au potentiel V .

L'influence en retour de (B) sur (A) se traduit par une accumulation supplémentaire de charges sur (A) . A l'équilibre, du fait de la présence de (B) , le conducteur (A) porte plus de charges que lorsqu'il était seul. La capacité de (A) à emmagasiner des charges a été augmentée par la présence de (B) . Un tel dispositif est appelé *condensateur*.



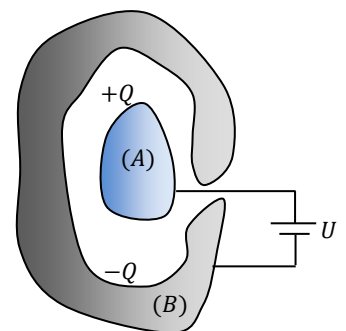
Son schéma est :



En pratique, on réalise la condensation de l'électricité en utilisant deux conducteurs en influence totale. La charge du condensateur est celle de son armature interne :

$$Q = |Q_A| = |Q_B|$$

Cette charge est proportionnelle à la tension (différence de potentiel) entre (A) et (B) : $U = V_A - V_B$



On définit par :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

La capacité du condensateur formé par les conducteurs (A) et (B). Elle ne dépend que de la forme géométrique de (A) et (B) et de la nature du milieu qui les sépare.

Remarque :

- Plus la distance séparant (A) et (B) est petite, plus l'influence mutuelle entre (A) et (B) est grande.
- Entre (A) et (B), on peut mettre un isolant ou un diélectrique de permittivité ϵ . La capacité du condensateur ainsi obtenu va être multipliée par $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

2. Energie électrique d'un condensateur

L'énergie d'un condensateur formé par les conducteurs (A) et (B) est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} (Q_A V_A + Q_B V_B) = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

Avec : $U = V_A - V_B$ et $Q = Q_A = -Q_B$.

C'est l'énergie emmagasinée par le condensateur lors de sa charge à l'aide d'un générateur. C'est la même énergie que l'on récupère lorsqu'on relie ses armatures après l'avoir isolé de la source. Les deux armatures sont alors portées au même potentiel et la charge Q s'annule, on dit que le condensateur s'est déchargé.

3. Association de condensateurs

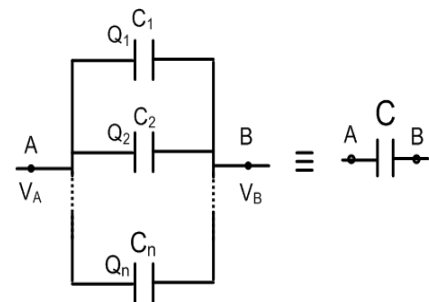
Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la ddp U qu'il peut supporter. En pratique, on regroupe des condensateurs, soit en parallèle soit en série, pour emmagasiner plus d'électricité ou pour répondre à un besoin quelconque en termes de capacité et de tension dans un circuit donné.

a. Association en parallèle

Soient n condensateurs de capacité C_i mis en parallèle avec la même tension $U = V_A - V_B$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i U$. La charge électrique totale est simplement :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U$$

$$Q = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) U$$



On en déduit qu'en parallèle, la capacité équivalente est la somme des capacités individuelles

$$C_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right)$$

b. Association en série

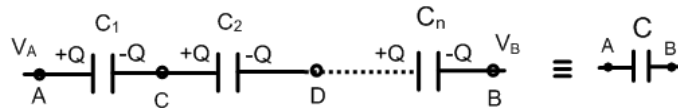
Les n condensateurs précédents sont mis en série les uns derrière les autres. On porte l'ensemble de ces condensateurs à une *ddp* $U = V_A - V_B$. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit, par influence, la charge $\pm Q$ sur les armatures de tous les condensateurs. On peut alors écrire :

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + \dots + (V_{\alpha} - V_B)$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

On en déduit que la capacité équivalente dans le montage en série est donnée par :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)$$



Chapitre 3 : Electrocinétique

I. Conduction électrique

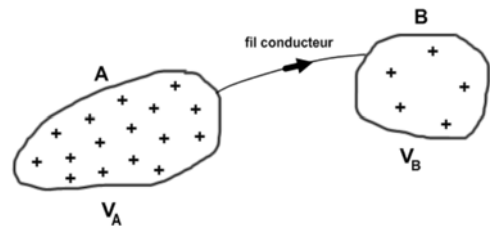
1- Introduction

Un conducteur est un corps macroscopique qui contient des porteurs de charge libres, susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'un champ extérieur (force extérieure). Les conducteurs étudiés dans le chapitre précédent étaient considérés dans l'état d'équilibre électrostatique, ce qui signifie que ses charges, qu'elles soient liées ou libres, restent fixes ou immobiles. Ce nouveau chapitre aborde alors les propriétés électriques des conducteurs hors équilibre (phénomène de conduction).

Electrocinétique : Etude des déplacements des charges électriques libres dans un conducteur. Ce déplacement de charge est appelé courant électrique.

<i>Différents types de conducteurs</i>	<i>Porteurs de charge libres</i>
Métaux (Cu, Ag, Au, Al,...)	Electrons libres
Semi-conducteurs (Si, Ge, AsGa,...)	Paires électron-trou
Electrolytes (KOH, NaCl,...)	Ions dissous
Gaz ionisés (plasmas)	Electrons, ions

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre électrostatique. Le conducteur A est porté au potentiel V_A et de charge Q_A , supposée positive. Le conducteur B est considéré neutre ($V_B = 0$, $Q_B = 0$).

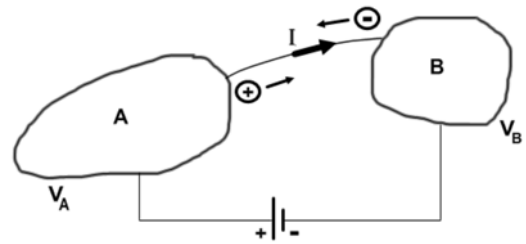


Si on relie A à B à l'aide d'un fil conducteur, des électrons vont se déplacer de B vers A pour neutraliser ses charges positives. Ce transfert d'électrons fait apparaître une charge positive sur B . Au final, c'est comme si des charges positives se sont déplacées de A vers B . Ce déplacement de charges entre A à B continuera jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint ; c'est-à-dire quand les conducteurs A et B seront au même potentiel $V = V_A' = V_B'$ avec les nouvelles charges Q_A' et Q_B' . D'après le principe de conservation de la charge, on peut dire que le conducteur A s'est déchargé (partiellement) et que le conducteur B s'est chargé avec la même quantité de charges. En effet, puisque $Q_B = 0$, alors :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q'_B = Q_A - Q'_A$$

Pour ce transfert de charges de l'un des conducteurs vers l'autre à travers le fil conducteur, on dit qu'un *courant électrique* a parcouru le fil conducteur. Ce courant est évidemment temporaire. Pour avoir un *courant permanent*, il faut maintenir en permanence l'état de déséquilibre entre les conducteurs A à B ; c'est-à-dire une tension (ddp) constante: $U = V_A - V_B = cte$

Cela peut être réalisé à l'aide d'un générateur de tension (pile, accumulateur, batterie). Il faut noter, toutefois, que la fonction du générateur n'est pas de créer des charges mais de les faire circuler en maintenant la tension U constante; il reprend les charges de B et les fait remonter à A en leur fournissant de l'énergie.



2- Le courant électrique

Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, c'est-à-dire d'une ddp $U = V_A - V_B$, chaque porteur de charge dans un conducteur acquiert une vitesse. Lorsque le mouvement des charges au cours du temps n'est plus aléatoire (agitation thermique), le mouvement est globalement ordonné, cela donne naissance à un courant électrique.

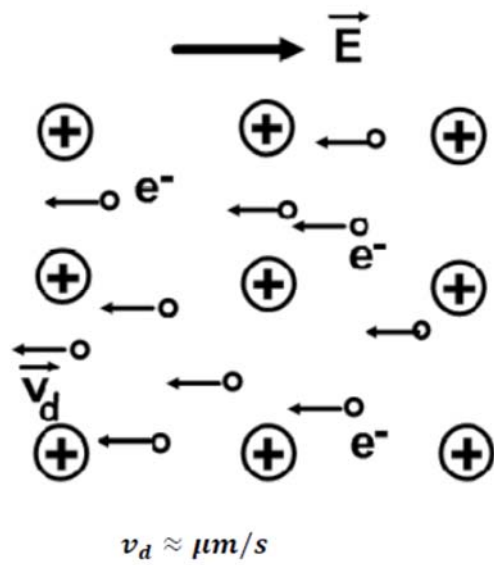
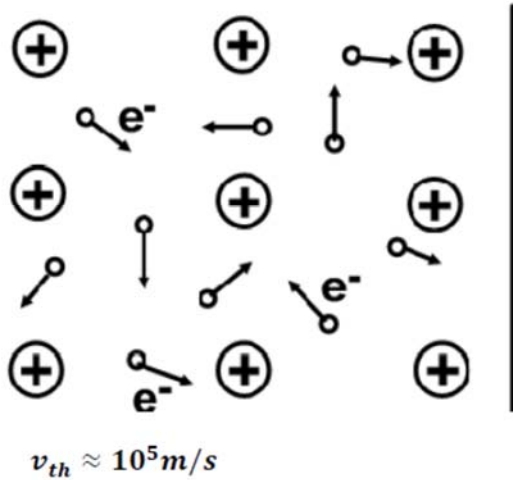
Courant électrique : *Mouvement d'ensemble des porteurs de charge. La vitesse moyenne de l'ensemble est dite vitesse d'entraînement ou de dérive.*

Remarque : la vitesse de dérive des électrons dans un métal due au champ électrique $\vec{E}$ est très inférieure à la vitesse des électrons due à l'agitation thermique.

Un métal est formé d'un réseau rigide d'ions positifs et d'électrons libres. En absence du champ électrique, les électrons, dans un mouvement désordonné à cause de l'agitation thermique, se déplacent dans toutes les directions et leur vitesse moyenne vectorielle correspondante est nulle ; il y a autant de charges qui se déplacent d'un côté que dans le côté opposé. A température ambiante, la vitesse v_{th} associée à l'agitation thermique est de l'ordre de $10^5 m/s$.

Sous l'action d'un champ extérieur $\vec{E}$, on aura un mouvement global des électrons de conduction dont la direction est opposée à $\vec{E}$. Le mouvement de dérive de l'ensemble des électrons est caractérisé par une vitesse moyenne v_d non nulle. Cependant, on peut montrer que cette vitesse de dérive est très faible devant la vitesse d'agitation thermique des électrons. Elle est de l'ordre de micromètre par second ($\sim \mu m/s$).

En absence du champ, $\vec{E} = \vec{0}$



2.1- Intensité du courant électrique

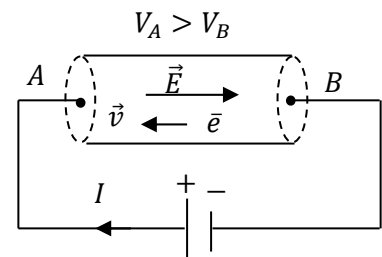
Par définition, l'intensité I du courant électrique est la quantité de charge dq qui traverse la surface (S) d'un conducteur par unité de temps:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

L'intensité de courant s'exprime en Ampère: $A = C \cdot s^{-1}$

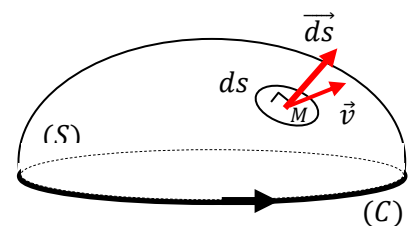
2.2- Sens conventionnel du courant électrique

Par convention, le sens positif du courant est celui qui va de la borne positive vers la borne négative en dehors du générateur. Autrement dit, dans le sens contraire du déplacement des charges négatives.



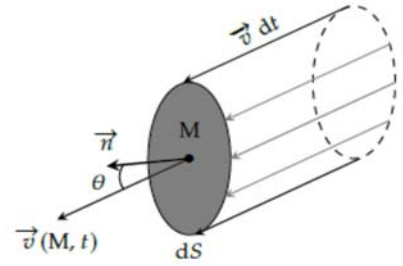
2.3- Densité de courant électrique

Considérons une surface élémentaire dS de la surface (S) d'un conducteur, caractérisée par le vecteur $\vec{dS}$ autour d'un point M où, à l'instant t , les porteurs de charge, considérés pour l'instant identiques, ont une densité volumique de charge $\rho(t)$ et une vitesse moyenne $\vec{v}$.



Ainsi, à l'instant $t + dt$, la quantité de charge qui traverse l'élément infinitésimal dS est égale à celle contenue dans un cylindre de base dS et de génératrice $\overrightarrow{d\ell} = \vec{v} \cdot dt$, dont le volume s'écrit :

$$d\tau = \overrightarrow{dS} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} dt$$



On a donc : $d^2q = \rho d\tau = nq \cdot \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} dt$

Avec $\rho = nq$, où n est la densité numérique ; le nombre de porteurs de charge par unité de volume.

Ainsi, la quantité de charge dq qui traverse la surface S du conducteur pendant le temps dt vaut :

$$dq = \iint_{(S)} d^2q = dt \iint_{(S)} nq\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Posons : $\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$

On obtient alors : $\frac{dq}{dt} = I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$ l'intensité du courant électrique.

Le vecteur $\vec{j}$ est par définition la densité de courant électrique, exprimé en A/m^2 .

L'intensité de courant électrique I qui traverse une surface S d'un conducteur est égale au flux de la densité de courant $\vec{j}$ à travers cette surface.

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

La densité de courant pour un seul type de porteurs de charge est donc :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

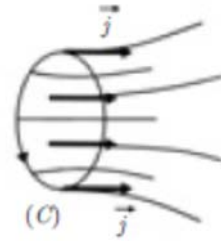
Dans le cas où le courant est dû au mouvement de différents types de porteurs de charges, il faut sommer toutes les contributions :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

2.4- Lignes et tube de courant

- **Ligne de courant:** Une ligne de courant est par définition une ligne tangente en tout point au vecteur densité de courant $\vec{j}$.

- **Tube de courant :** c'est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé (C) .



2.5- Régime permanent – Courant continu

Soit (S) une surface délimitant un volume τ . Supposons qu'à l'instant t la densité volumique de charge est $\rho(\vec{r}, t)$. Les charges entrent et sortent de ce volume τ ; la charge totale contenue, à l'instant t , à l'intérieur de (S) est :

$$Q = \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$$

La charge dQ qui sort de (S) pendant le temps dt est égale à la diminution de Q pendant ce temps (conservation de la charge). On a donc :

$$dQ_{\text{sort}} = -dQ$$

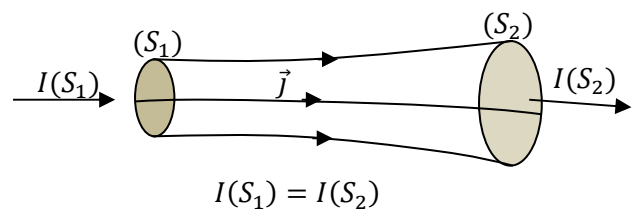
$$\Rightarrow \frac{dQ_{\text{sort}}}{dt} = I = \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau = -\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

$$\Rightarrow \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

En régime permanent (cas stationnaire), ρ et $\vec{j}$ sont indépendants du temps. On a alors : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$I = \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

En régime permanent, $\vec{j}$ est à flux conservatif. Dans ce régime, l'intensité du courant a même valeur à travers toute section d'un tube de courant. Puisque $\vec{j}$ est indépendante du temps, alors I l'est également. Le courant I est dit continu.



2.6- Equation de la conservation de la charge

Précédemment, on a trouvé :

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = - \iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Le théorème de Green–Ostrogradski (théorème de la divergence) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} &= \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{j} d\tau \\ \Rightarrow \iiint_{(\tau)} \left(\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau &= 0, \quad \forall \text{ le volume } \tau \end{aligned}$$

C'est la formule intégrale de l'équation de conservation de la charge (équation de continuité). Puisque, elle est valable pour tout volume τ , on en déduit alors :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

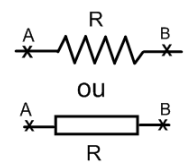
Cette équation représente la forme locale de l'équation de continuité (conservation de la charge).

II. Lois d'Ohm

1- Loi d'Ohm macroscopique - Résistance

A température constante, le rapport de la tension U entre les bornes d'un conducteur par l'intensité du courant I est constant. On désigne cette constante par R et on l'appelle résistance électrique.

$$\frac{U}{I} = R$$



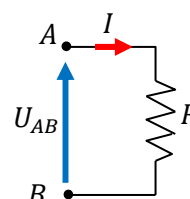
La résistance R s'exprime en Ohm: $\Omega = VA^{-1}$. On la représente par le schéma ci –contre. C'est une grandeur caractéristique du conducteur. Elle mesure l'opposition du conducteur au déplacement des charges ; c'est pourquoi on l'appelle résistance.

Remarque : il est important de noter les conventions adoptées pour définir les signes des courants et tension (ddp) aux bornes de la résistance R :

- Si $V_A > V_B$:

Le courant passe par A et sort par B

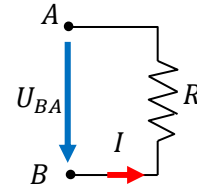
$$U_{AB} = V_A - V_B = RI$$



- Si $V_A < V_B$:

Le courant passe par B et sort par A

$$U_{BA} = V_B - V_A = RI = -U_{AB}$$



La tension aux bornes de la résistance R est de sens opposé à celui du courant I .

2- Loi d'Ohm microscopique – conductivité / résistivité

Il s'agit de chercher une relation entre la densité de courant $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

Considérons une portion d'un conducteur, de longueur $AB = \ell$, parcourue par un courant I . L'existence de I signifie qu'il y a une tension entre A et B .

$$U = V_A - V_B = \int_{(A)}^{(B)} -dV = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = RI$$

En régime permanent : $I = jS$ et $U = E\ell$ (champ uniforme). Cela permet d'écrire :

$$U = RI = RjS = E\ell \Rightarrow j = \frac{\ell}{RS} E$$

Ainsi, sous forme vectorielle, la loi d'Ohm locale ou microscopique s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Le coefficient de proportionnalité σ est appelé *conductivité électrique* du matériau.

$$\sigma = \frac{\ell}{RS}$$

Elle s'exprime en siemens par mètre ($S.m^{-1}$ où $S = A.V^{-1}$) ou en ohm par mètre ($\Omega.m^{-1}$). σ caractérise la matière, elle est liée aux propriétés microscopiques de la matière. En fonction de sa valeur, on peut distinguer un conducteur d'un isolant.

L'inverse de la conductivité est appelée *résistivité* : $\rho = \frac{1}{\sigma}$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \rho \vec{j} \quad \text{L'équivalent de : } U = RI$$

La mobilité μ des porteurs de charge est définie par la relation :

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

Il est facile de vérifier que μ est donnée par : $\mu = \frac{\sigma}{nq}$

Où n est le nombre de charges/unité de volume. μ est indépendante de $\vec{E}$ lorsque la loi d'Ohm est valable.

3- Association de résistances

a- Association en série

Soient n résistances branchées en série. Le courant I est le même dans toutes les résistances.

La loi d'Ohm permet d'écrire :



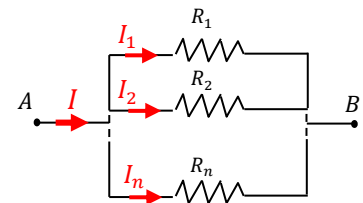
$$\begin{aligned} V_1 - V_n &= (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{n-1} - V_n) \\ &= R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \\ &= \left(\sum_{i=1}^n R_i \right) I \end{aligned}$$

La résistance équivalente de l'ensemble est donc :

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^n R_i \right)$$

b- Association en parallèle

Soient n résistances branchées en parallèle sous une ddp $U = V_A - V_B$ et alimentées par un courant I . La ddp U est la même pour toutes les résistances R_i , $i = 1, \dots, n$ et le courant I se sépare en n courants de branches :



$$I_i = \frac{U}{R_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

La conservation de la charge (du courant), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\ &= \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_A - V_B}{R_n} \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right) (V_A - V_B)$$

$$= \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}$$

D'où, la résistance équivalente de l'ensemble des n résistances en parallèle s'écrit :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)$$

III- Loi de Joule (Effet Joule)

Un métal est formé d'un réseau rigide d'ions positifs et d'électrons libres. En l'absence du champ électrique, les électrons de conduction restent en équilibre thermique avec le réseau cristallin du conducteur. En présence du champ électrique, les électrons acquièrent de la vitesse, donc de l'énergie cinétique, dont une partie est perdue lors des collisions avec les ions du réseau sous forme calorifique. Par conséquent, le conducteur s'échauffe. C'est l'effet Joule.

Considérons une résistance R sous une tension U_{AB} constante et parcourue par un courant I . La circulation entre A et B d'une quantité de charge q s'accompagne d'une diminution d'énergie potentielle :

$$W = qU_{AB} = q(V_A - V_B)$$

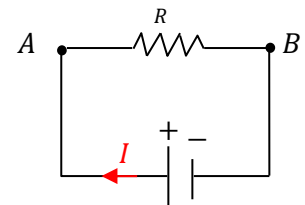
Si le courant I est constant, la quantité de charge qui traverse la résistance pendant le temps t est : $q = I \cdot t$

D'où :

$$W = It \cdot (V_A - V_B) = It \cdot RI = RI^2 t$$

W est la quantité d'énergie dissipée dans la résistance R sous forme de chaleur, ce qui correspond à une puissance dissipée :

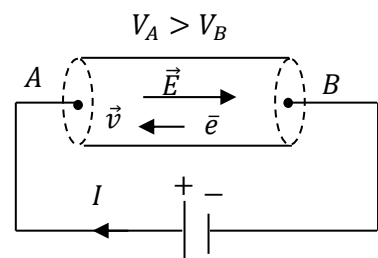
$$P = \frac{W}{t} = RI^2$$



IV- Circuit électrique en courant continu

1-Rôle du générateur – Force électromotrice (f.e.m)

On a vu au début de ce chapitre que pour avoir un courant permanent aux bornes d'un conducteur, il faut maintenir le déséquilibre électrostatique ; c'est-à-dire avoir en permanence une tension constante aux bornes de ce conducteur :



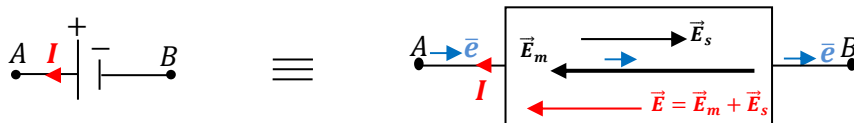
$$U_{AB} = V_A - V_B = \iint_{(AB)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

En pratique, cette ddp est assurée par un générateur de tension.

Cependant, le rôle du générateur n'est pas de créer des charges, mais de les faire circuler. C'est comme une « pompe » qui aspire les électrons par sa borne positive (électrons qui sont passés de B vers A) et les renvoie par sa borne négative (vers la borne B).

Donc, à l'extérieur du générateur, les électrons passent de $(-)$ vers $(+)$, mais à l'intérieur du générateur, ces électrons se déplacent de $(+)$ vers $(-)$. Ils remontent le potentiel électrostatique ; c'est-à-dire, ils se déplacent contre la force électrostatique !

Dans un circuit fermé, le rôle du générateur est donc de fournir de l'énergie aux porteurs de charges pour leur faire remonter le potentiel en son intérieur pour maintenir leur circulation. Cette énergie est fournie grâce à un autre champ, non électrostatique, appelé *champ électromoteur*, $\vec{E}_m$. Ce champ $\vec{E}_m$ est supérieur en norme et dirigé en sens inverse du champ électrostatique $\vec{E}_s$.



C'est la circulation de ce champ $\vec{E}_m$ dans le générateur qui assure la ddp $U_{AB} = V_A - V_B$. Cette circulation est appelée *force électromotrice* e du générateur, en abrégé f.e.m.

$$e = \int_{(AB)} \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B$$

Bien qu'elle porte le nom de force, la f.e.m. e s'exprime en volts.

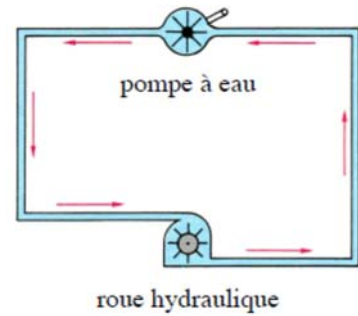
Le champ électromoteur $\vec{E}_m$ peut avoir des origines divers : mécanique, chimique, magnétique solaire, éolienne, ...etc.

Analogie entre le circuit électrique et le circuit de l'eau

Pour mieux comprendre le rôle du générateur, faisons une analogie entre le circuit électrique et celui de l'eau.

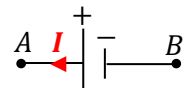
Le circuit hydraulique, tuyaux, pompe et roue, est complètement remplis d'eau. Dès qu'on met la pompe en marche, la roue commence à tourner aussitôt. Evidemment, la

pompe ne produit pas de l'eau. Elle ne fait que circuler cette eau dans le circuit hydraulique. Ce que fait le générateur électrique est analogue à cette pompe : il ne produit pas de charges électriques, il leur fait juste remonter le potentiel pour maintenir leur circulation dans le circuit ; dès que les électrons sont mis en mouvement à l'intérieur du générateur, tous les électrons libres commencent à se déplacer et un courant électrique sera donc établi dans le circuit extérieur.



2-Représentation d'un générateur

Dans un générateur, on appelle la borne au potentiel le plus élevé *borne positive* (+) et celle de plus bas potentiel la *borne négative* (-).

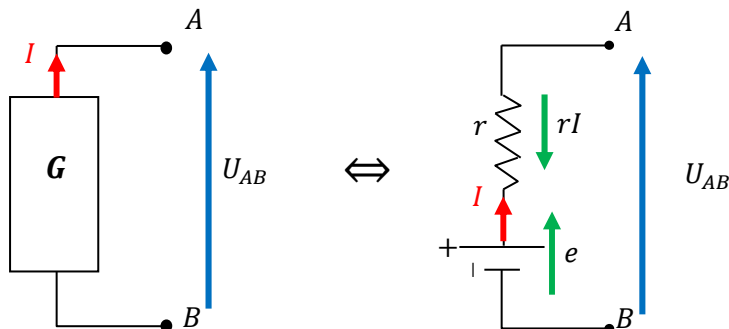


Par convention, le courant I , à l'intérieur du générateur, circule de la borne (+) vers la borne (-). A l'intérieur du générateur par contre, le courant circule de (-) vers (+), sens contraire au déplacement des électrons.

Dans le cas d'un circuit ouvert ($I = 0$), la tension en ses bornes est simplement égale à sa f.e.m

$$e = V_A - V_B > 0$$

Cependant, on doit faire attention à ne pas confondre un **générateur idéal** (qui n'existe pas en réalité), c'est-à-dire, un générateur qui fournit une tension constante, égale à sa f.e.m, quelque soit le courant I , et un **générateur réel** tel qu'une pile ou batterie. Celui-ci est équivalent à un générateur idéal en série avec une résistance, dite résistance interne du générateur, notée r .



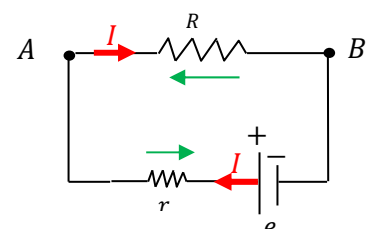
$$U_{AB} = V_A - V_B = e - rI$$

(Chute de tension)

Plus I augmente, plus U_{AB} diminue

3-Bilan énergétique

Si on relie le générateur à un circuit extérieur (par exemple une résistance R), le circuit sera parcouru par un courant I . Le circuit est équivalent à celui de la figure ci-contre. On a :



$$U_{AB} = V_A - V_B = e - rI = RI \quad (\text{d'après la loi d'Ohm})$$

D'où:

$$I = \frac{e}{R - rI}$$

Le courant I est le courant fourni par le générateur.

Pendant un temps t , il circule une charge $Q = It$. Dans tout le circuit, on a alors :

- $Qe = eIt$ est l'énergie fournie par le générateur
- rI^2t est l'énergie dissipée à l'intérieur du générateur (par effet joule)
- $(V_A - V_B)It = RI^2t$ est l'énergie dissipée dans le circuit extérieur (résistance R dans notre cas)

D'après la conservation de l'énergie, on écrit :

$$eIt = rI^2t + (V_A - V_B)It$$

En terme de puissance, définie comme $P = \frac{\text{énergie}}{\text{temps}}$, l'équation précédente s'écrit :

$$(eI - rI^2) = (V_A - V_B)I$$

Puissance fournie par le générateur

Puissance consommée dans le générateur par effet joule

Puissance utile ; consommée dans le circuit extérieur (égale à RI^2 dans le cas de la résistance).

Rendement d'un générateur

Le rendement d'un générateur δ est défini comme étant le rapport entre la *puissance utile* (consommée à l'extérieur) par la *puissance fournie* :

$$\delta = \frac{(V_A - V_B)I}{eI}$$

Dans le cas du circuit précédent : $V_A - V_B = RI$

$$\delta = \frac{RI^2}{eI} = \frac{RI}{e} = \frac{e - rI}{e} = 1 - \frac{rI}{e}$$

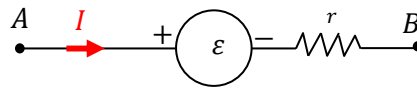
Le rendement δ est tel que : $0 \leq \delta \leq 1$. La valeur $\delta = 1$ correspond à $r = 0$, c'est-à-dire un générateur idéal.

4-Récepteur

Un récepteur, contrairement à un générateur, est un dispositif qui transforme l'énergie électrique qu'il reçoit en une autre forme d'énergie (mécanique, chimique, calorifique, lumineuse,...)

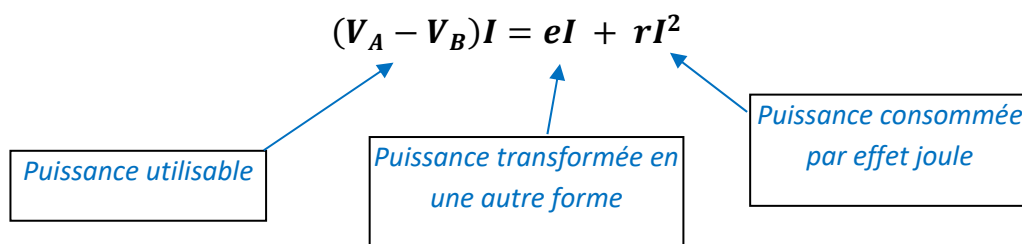
Exemples : moteur, accumulateur de charge, résistance électrique, lampe, machine à laver,...etc.

Comme pour un générateur, le récepteur subit lui aussi des pertes d'énergie par effet joule. Ces pertes sont caractérisées par sa résistance interne r . Son schéma est le suivant :



$$V_A - V_B = e + rI$$

Dans ce cas, e , qui est toujours positive, est appelée *force contre électromotrice* (f.c.e.m).

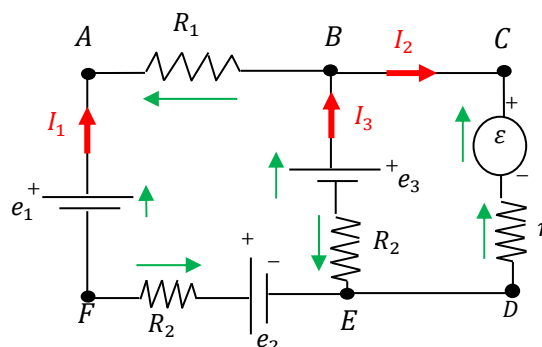


Remarque: Pour un récepteur, le courant doit arriver toujours par sa borne positive (+).

5-Circuits électriques – Lois de Kirchhoff

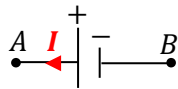
1-Notion de circuit électrique

Un circuit électrique, appelé également réseau électrique, est un ensemble simple ou complexe de conducteurs et de dispositifs électriques ou électroniques, appelés dipôles, parcouru par un courant. Un exemple d'un circuit électrique est celui représenté sur la figure ci-dessous.

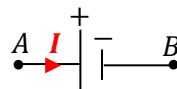


Dans un circuit donné, on a donc :

- *Dipôle* : Élément électrique d'un circuit qui possède une borne d'entrée et une borne de sortie du courant. Il est dit *actif* quand il fournit de l'énergie et *passif* lorsqu'il en consomme.



Générateur : débite un courant



Récepteur : consomme de l'énergie
(Se charge)

- *Un nœud* : Point d'un circuit où se rejoignent au moins trois dipôles (trois courants).
Exemple : Points **B**, **E** (voir la figure de l'exemple du circuit précédent)
- *Une branche* : Une portion du circuit électrique comprise entre deux nœuds consécutifs.
Exemple : **BE**, **BCD**, **BAFE**
- *Une maille* : Ensemble de branches formant une boucle fermée et ne passant qu'une seule fois par le même nœud. Exemple : **ABEFA**, **BCDEB**, **ACDFA**

Remarques :

- Lorsque les tensions et les intensités de courant ne varient pas dans le temps, on parle de *régime permanent*. Le *régime variable* désigne la situation contraire.
- Les fils conducteurs utilisés pour connecter les différents dipôles sont considérés parfaits, c'est-à-dire de conductivité infinie (on néglige leur résistance devant celles des dipôles présents).

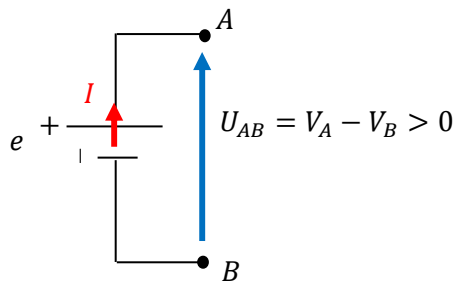
2-Représentation des courants et des tensions

La tension U_{AB} entre les points A et B est égale à la différence de potentiel entre ces deux points :

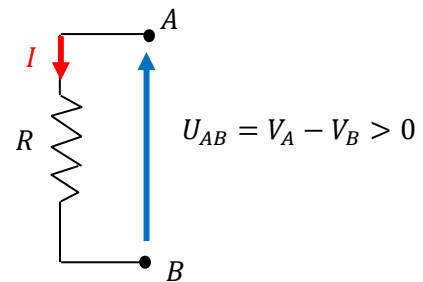
$$U_{AB} = V_A - V_B = -U_{BA}$$

Toute *ddp* est représentée conventionnellement par une flèche orientée du plus bas potentiel (−) vers le plus haut potentiel (+).

Convention générateur



Convention récepteur



Pour un générateur, la tension U_{AB} et le courant I sont représentés par deux flèches de même sens, alors que dans un récepteur, les flèches sont de sens opposés.

3-Lois de Kirchhoff

a- Lois des nœuds (conservation de la charge)

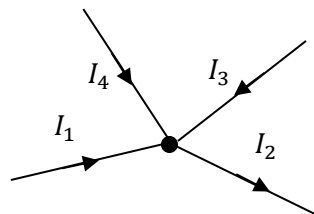
En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

La somme tient compte de tous les courants ; ceux qui arrivent et ceux qui partent du nœud. Par convention, on désigne un courant entrant de positif et un courant sortant de négatif. L'équation précédente, prend alors la forme suivante :

$$\sum_i I_{entrants} = \sum_j I_{sortants}$$

Exemple :



$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2$$

b- Lois des mailles (conservation de l'énergie)

La somme algébrique des différences de potentielles (tensions) le long d'une maille est toujours nulle.

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0$$

Cette loi constitue une généralisation de la loi d'Ohm

$$\sum_{i=1} (e_i - R_i I_i) = 0$$

Exemple (voir la figure ci-contre) :

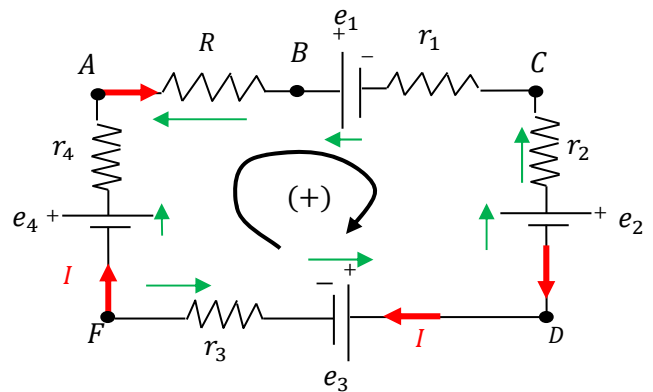
$$V_A - V_A = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_F) + (V_F - V_G) + (V_G - V_A) = 0$$

$$-e_4 + e_1 + e_2 + e_3 + (R + r_1 + r_2 + r_3)I = 0$$

$$I = \frac{e_4 - e_1 - e_2 - e_3}{(R + r_1 + r_2 + r_3)} = \frac{\sum e_i}{\sum R_i}$$

La valeur de I obtenu par le calcul peut être positive ou négative (puisque le choix était arbitraire), on a alors :

- Si $I > 0$ le sens du courant choisi dans la branche est correct (sens réel du courant). Le calcul est terminé.
- Si $I < 0$:
 - a- Dans le cas d'un circuit ne comportant que des générateurs réversibles et résistances mortes (pures), il suffit de changer le sens de I dans la branche correspondante et prendre $I = |I|$ (sans refaire le calcul).
 - b- Dans le cas d'un circuit comportant, en plus des autres dipôles, un récepteur pur de f.c.e.m ε , **il faut refaire les calculs en donnant le bon sens au courant.**



4-Procédure à suivre dans l'application des lois de Kirchhoff

- On choisit, sur chaque branche, un sens arbitraire du courant.
- On choisit un sens arbitraire de parcours de la maille.
- Chaque terme RI est affecté d'un signe (+) si le sens de parcours de la maille choisi coïncide avec le sens du courant dans R , sinon on l'affecte du signe (-).

- La force électromotrice e est affecté du signe du pôle du générateur par lequel entre le sens du parcours choisi dans la maille considérée.

5-Résolution du système d'équations obtenu

Si on écrit toutes les lois des nœuds et toutes les lois des mailles, on obtient en général plus d'équations que d'inconnus. Il convient alors de choisir n équations indépendantes (mailles indépendantes) pour trouver les valeurs des n courants.

Pour résoudre ce système linéaire de n équations à n inconnus, on utilisera la méthode de Cramer.

Le système de n équations indépendantes peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \dots + a_{1n}I_n = e_1 \\ a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \dots + a_{2n}I_n = e_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}I_1 + a_{n2}I_2 + \dots + a_{nn}I_n = e_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AI = E$$

Pour un système d'équations linéaires et indépendantes, le déterminant de la matrice A est non nul ($\det(A) \neq 0$) et la solution est unique, donnée par :

$$I_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Où A_i est la matrice carrée formée en remplaçant la i - ème colonne de A par le vecteur E .

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & e_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & e_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & e_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\swarrow$ i - ème colonne

Chapitre 4 : Magnétostatique

1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons examiné divers aspects de l'électrostatique (les champs et les interactions associées à des charges immobiles). Dans ce chapitre, nous étudions les champs magnétiques de courants électriques stationnaires (régime permanent). En effet, en magnétostatique, les sources du champ magnétique sont considérées comme constantes dans le temps, ce qui permet une étude simplifiée et analytique du champ comme celle de l'électrostatique. Cependant, la différence fondamentale entre l'électrostatique et la magnétostatique est qu'il n'existe pas de charges magnétiques.

Ce régime simplifié permet une analyse rigoureuse et plus accessible des phénomènes magnétiques fondamentaux, tout en constituant une étape essentielle vers la compréhension des lois générales de l'électromagnétisme formulées par Maxwell.

Dans ce chapitre, nous étudierons :

- les lois fondamentales de la magnétostatique, notamment la loi de **Biot et Savart** et la **loi d'Ampère** ;
- le champ magnétique créé par différentes distributions de courant (fil rectiligne, boucle de courant, etc.) ;
- les propriétés mathématiques du champ magnétique : divergence nulle, rotation non nulle ;
- le potentiel vecteur magnétique et sa relation avec le champ ;
- la force de **Lorentz** et les effets mécaniques des champs magnétiques sur les charges en mouvement ;
- les conditions aux limites de passage à travers une interface

L'étude de la magnétostatique est également indispensable pour comprendre des applications technologiques telles que les électroaimants, les moteurs électriques, les transformateurs, ainsi que les dispositifs de déviation et de focalisation de faisceaux de particules chargées.

Ce chapitre fournit donc les outils conceptuels et mathématiques nécessaires pour analyser les champs magnétiques dans des régimes stationnaires, tout en préparant le terrain pour l'étude de phénomènes plus complexes dans le cadre de l'électromagnétisme complet.

Bref aperçu historique

Le premier qui a observé les effets magnétiques des courants électriques est le Danois Hans Christian Oersted (1777–1851) : une boussole placée au voisinage d'un fil

métallique parcouru par un courant continu est déviée. Quand le courant I est intense, la boussole tend à s'orienter de façon orthogonale par rapport au fil.

Puis, en multipliant les observations, les Français A. M. Ampère (1775–1836), P. S. Laplace (1749–1827), J. B. Biot (1774–1862) et F. Savart (1791–1841) ont pu noter le caractère tourbillonnaire du champ magnétique et établir les bases de ce qu'on appelle aujourd'hui la magnétostatique (étude du champ $\vec{B}$ permanent) : loi de Laplace, Théorème d'Ampère, formule de Biot et Savart,...etc. c'est Ampère qui a introduit les termes de courant et de tension, invente le galvanomètre,...

Par la suite, l'Anglais M. Faraday (1791–1867), avec son expérience de disque tournant, a introduit les termes de champ et de ligne de champ, a établi sa loi d'induction donnant la force électromotrice (f.e.m) en fonction du flux magnétique : $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

C'est l'Allemand F. Newmann (1798–1895) qui a interprété l'apparition de la f.e.m en admettant que les variations temporelles de $\vec{B}$ induisent le champ électrique $\vec{E}$ dont la circulation vaut e . C'est le premier couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, d'où le nom d'*induction électromagnétique*.

Finalement, l'Ecosais J. C. Maxwell (1831–1879), en rassemblant toutes les connaissances relatives aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, a établi la théorie de l'électromagnétisme, une théorie complète où, en régime variable, le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ doit être considéré comme une unité fondamentale indissociable; l'existence de $\vec{B}$ implique celle de $\vec{E}$ et vice versa.

2. Equations fondamentales de la magnétostatique

2.1 Force magnétique

Le **champ magnétique** est une grandeur physique qui décrit l'influence magnétique exercée par des charges électriques en mouvement ou par des matériaux magnétiques (comme les aimants). Il est représenté par un vecteur noté généralement $\vec{B}$ (les Anglo-Saxons désignent $\vec{B}$ comme étant l'excitation ou l'induction magnétique et $\vec{H}$ le champ magnétique). Il se manifeste par des forces agissant sur les courants électriques et les particules chargées en mouvement, selon la loi de Lorentz.

Une particule de charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans une région où règne les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, subit une force donnée par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{f}_e + \vec{f}_m \quad (1)$$

C'est la **force de Lorentz**. Elle reste valable quelque soit le régime, permanent ou variable. La force électrique $\vec{f}_e = q\vec{E}$ est proportionnelle à q mais indépendante de $\vec{v}$, tandis que la force magnétique $\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$. Par conséquent, elle peut modifier la trajectoire de la particule, mais pas la grandeur de sa vitesse, donc de son énergie cinétique. D'où son caractère non-conservatif.

En effet, d'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En multiplions cette équation par $\vec{v}$, on obtient :

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} E_c = q\vec{v} \cdot \vec{E}$$

Car $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$. Avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est l'énergie cinétique de la particule.

On en déduit que seul le champ électrique $\vec{E}$ contribue à l'accroissement de l'énergie cinétique E_c . En d'autre terme, la force magnétique ne fournit pas de travail (son travail est toujours nul).

D'autre part, cette définition en produit vectoriel de la force magnétique $\vec{f}_m$ dépend de la convention d'orientation de l'espace (règle de la main gauche ou règle du tire-bouchon par exemples), cela définit le champ $\vec{B}$ comme *pseudo-vecteur* (ou vecteur axial), par opposition aux « *vrais vecteurs* » (ou vecteurs polaires) tels que la vitesse ou la force dont le sens a une signification physique intrinsèque.

Dans le cas d'un conducteur filiforme, parcouru par un courant d'intensité I et de densité $\vec{j}$, un élément de longueur $d\ell$ subit une force qui s'écrit :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad (2)$$

C'est la loi de Laplace.

Sachant que $I d\vec{\ell} = \vec{j} dV$, où dV est un élément de volume, la force de Laplace peut s'écrire encore :

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} dV \quad (3)$$

2.2 Calcul du champ magnétique

En magnétostatique, les sources du champ magnétique sont considérées comme constantes dans le temps, ce qui permet une étude simplifiée et analytique du champ. Le champ magnétique est produit par des courants électriques stationnaires (loi de Biot et Savart) ou, plus généralement, par des charges en mouvement.

2.2.1 Formule de Biot et Savart

La loi de Laplace précise l'action de $\vec{B}$ sur un courant. La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ $\vec{B}$ à partir de sa source; les courants électriques dans notre cas. C'est l'équivalent de la loi de Coulomb pour le champ électrique $\vec{E}$.

La contribution à $\vec{B}$ d'un élément $d\ell$ parcouru par un courant I est, figure (1) :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (4)$$

Avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ (vecteur unitaire orienté de la source vers le point d'observation, comme dans le cas de l'électrostatique).

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$ est la perméabilité magnétique du vide.

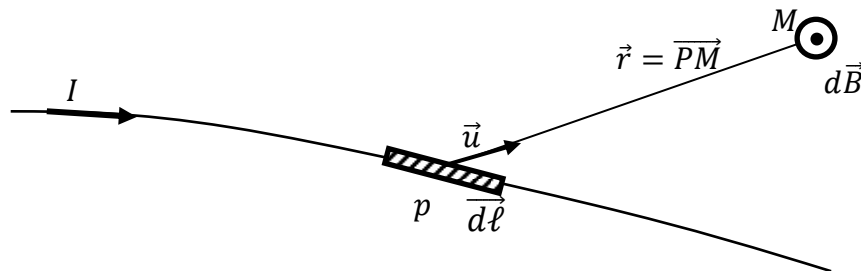


Fig. 1 : Somme directe du champ $\vec{B}$ (loi de Biot et Savart)

Dans le cas d'une distribution volumique de courant, l'équation (3) devient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{J}(P) \wedge \vec{u}}{r^2} dV(P) \quad (5)$$

Remarque : De même que le champ électrostatique $\vec{E}$, le théorème de superposition s'applique également pour le champ $\vec{B}$.

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i \quad (6)$$

Exemple d'application : Calcul du champ $\vec{B}$ en un point de l'espace, créé par un fil infini parcouru par un courant I .

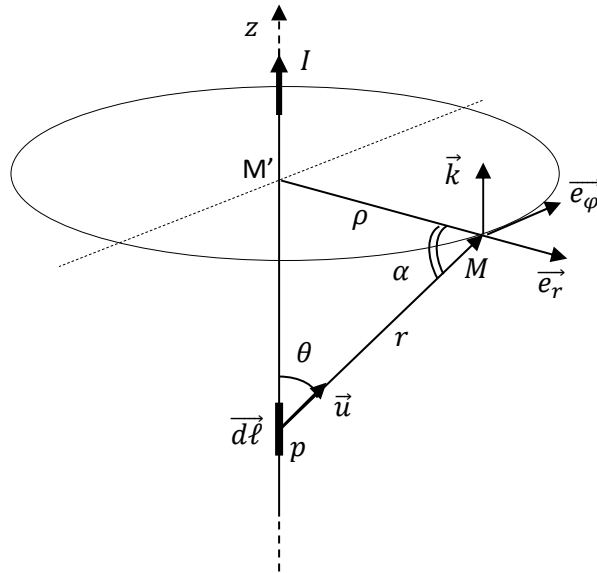


Fig. 2 : Fil infini parcouru par un courant I

Au point M , le champ créé par l'élément de courant $\vec{dC} = I \vec{d\ell}$ s'écrit :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

En utilisant les coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{PM} = \vec{PM'} + \vec{M'M} \Rightarrow \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

Et
$$\vec{d\ell} = d\ell \vec{k} = dz \vec{k}$$

D'où, avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \vec{k} \wedge (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k})}{r^3}$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos(\alpha) dz}{r^2} \vec{e}_\phi$$

Avec $\cos(\alpha) = \sin(\theta) = \frac{\rho}{r}$ et $\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi$

Pour simplifier les calculs, introduisons la variable α , voir la figure 2 :

$$z = \rho \tan(\alpha) \Rightarrow dz = \frac{\rho}{\cos(\alpha)^2} d\alpha$$

Cela permet d'écrire :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\rho} \cos(\alpha) d\alpha \vec{e}_\varphi$$

L'intégration se fait sur le fil infini, c'est-à-dire sur l'angle α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Ce qui donne finalement:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \vec{e}_\varphi$$

D'après ce résultat, on conclut que les lignes de champ de $\vec{B}$, courbes tangentes à $\vec{B}$, sont des cercles concentriques sur le fil et sont situées dans un plan orthogonal à ce fil, figure (3).

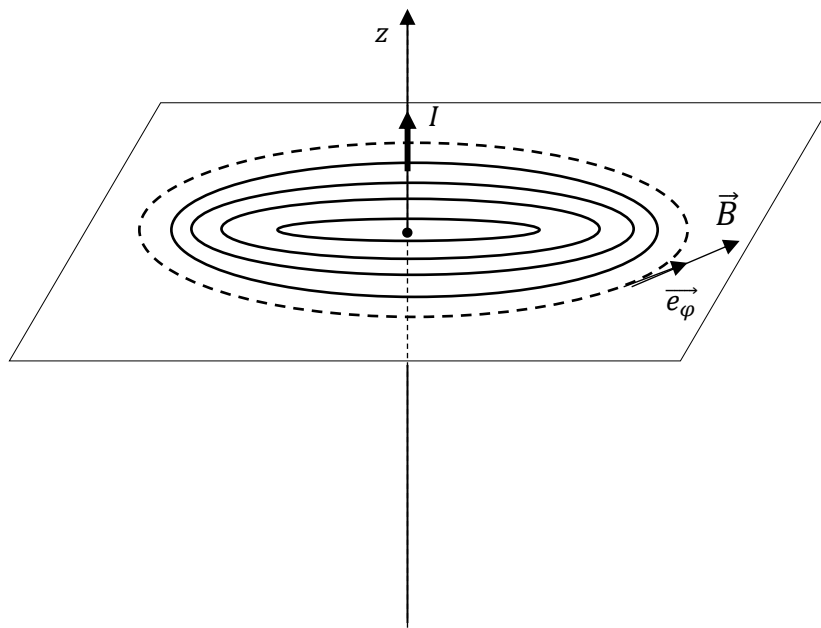


Fig. 3 : Lignes de champ de $\vec{B}$

Comme nous pouvons le constater sur cet exemple, les lignes de champ de $\vec{B}$ sont des lignes fermées. Elles ne divergent pas à partir de leurs sources, comme c'est le cas pour le champ électrostatique, mais tourbillonnent autour de celles-ci.

2.2.2 Théorème d'Ampère

Soit un champ magnétique $\vec{B}$ créé par une distribution de courants. La circulation de ce champ $\vec{B}$ le long d'un contour fermé (C) orienté et délimitant la surface (S) est :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (7)$$

Où I est la somme algébrique des courants enlacés par le contour (C), c'est-à-dire les courants traversant la surface (S) :

$$I = \sum_i I_{\text{enlacés}} \quad (8)$$

Un courant est compté positif s'il pénètre la surface (S) en suivant le sens du vecteur surface $d\vec{S}$, figure (4).

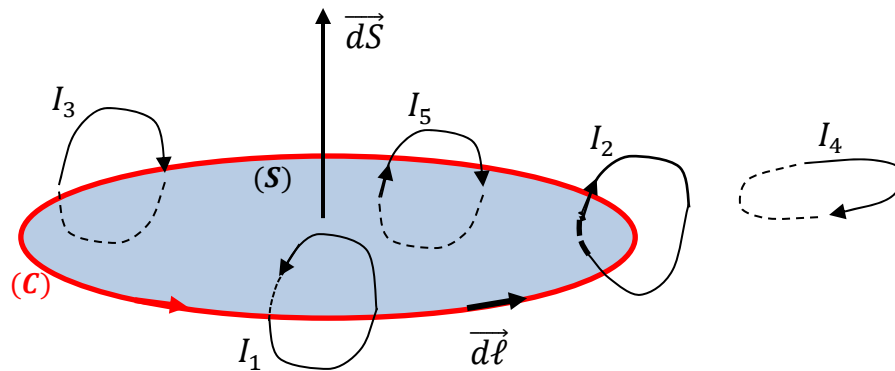


Fig. 4 : Théorème d'Ampère

Dans l'exemple de la figure (4), on a :

$$I = \sum_i I_i = -I_1 + I_2 - I_3 + I_5 - I_5 = (I_2 - I_1 - I_3)$$

Et

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = (I_2 - I_1 - I_3)$$

Ce théorème permet de calculer le champ $\vec{B}$ connaissant I . C'est l'analogue du théorème de Gauss pour le champ électrostatique $\vec{E}$ (limité aux distributions de hautes symétries).

2.2.3 Symétries et invariances

La démarche suivie dans cette partie du cours est calquée sur celle relative au champ électrostatique, à la différence que le champ $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur.

- Une transformation (rotation, translation,...etc.), qui laisse invariant la distribution des courants, laisse également invariant le champ magnétique. Autrement dit, le champ magnétique possède les mêmes symétries et propriétés d'invariance que la distribution de courants qui le crée.
- Un plan (π) de symétrie pour les courants est plan d'antisymétrie pour le champ $\vec{B}$; En effet, au point M' symétrique de M par rapport à (π), le champ $\vec{B}(M')$ est opposé au symétrique du champ $\vec{B}(M)$, voir figure (5). D'où :

En un point M appartenant au plan de symétrie (π), le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

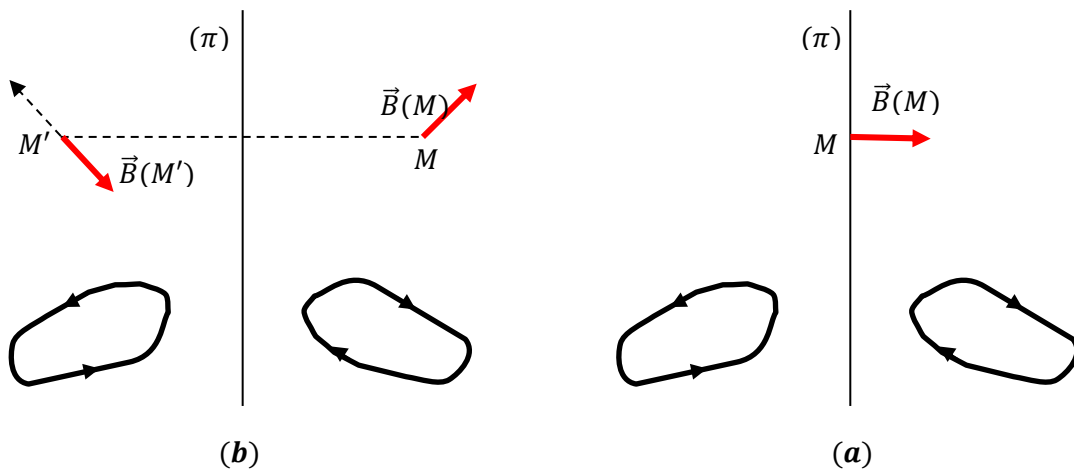


Fig. 5 : Champ $\vec{B}$ en un point d'un plan de symétrie (a), en dehors du plan de symétrie (b)

- Un plan (π^*) d'antisymétrie pour les courants est plan de symétrie pour le champ $\vec{B}$; En effet, au point M' symétrique de M par rapport à (π^*), les champs magnétiques correspondants $\vec{B}(M')$ et $\vec{B}(M)$ sont symétriques, voir figure (6). D'où :

En un point M appartenant au plan de d'antisymétrie (π^), le champ $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan.*

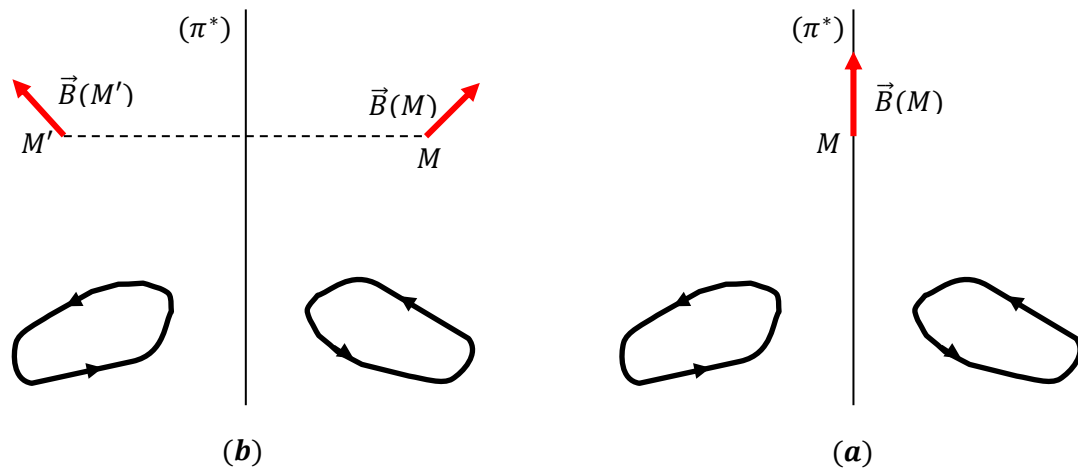


Fig. 6 : Champ $\vec{B}$ en un point d'un plan d'antisymétrie (a), en dehors du plan de symétrie (b)

Exemple d'application : Calcul de $\vec{B}$ créé par un conducteur cylindrique de rayon R et de longueur infinie, parcouru par un courant I , figure (7).

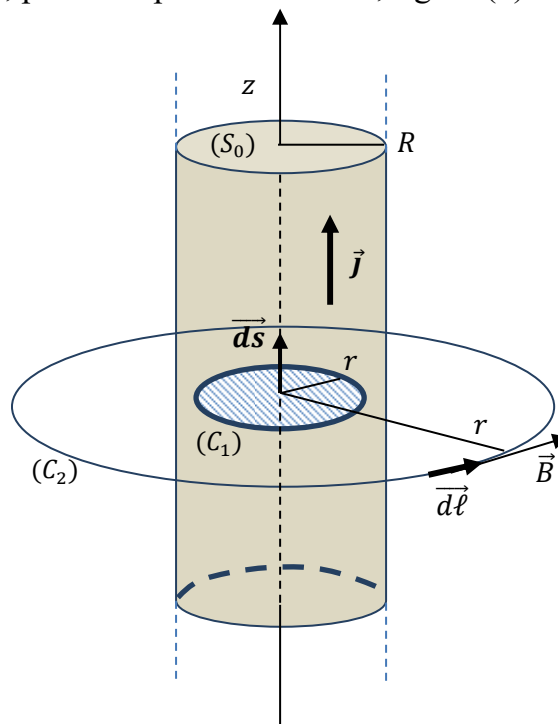


Fig. 7 : Champ magnétique d'un long fil cylindrique

Ce cylindre est plein et homogène. L'intensité du courant I se répartit de façon uniforme dans la section de ce cylindre. La densité de courant est uniforme, elle vaut :

$$\begin{cases} \vec{j} = j\vec{k} = \left(\frac{I}{\pi r^2}\right)\vec{k} & \text{pour } r < R \\ \vec{j} = \vec{0} & \text{pour } r > R \end{cases}$$

La distribution de courant est à symétrie cylindrique :

- Invariante par toute translation le long de z , $\vec{B}$ est indépendant de z .
- Invariante par toute rotation autour de z , $\vec{B}$ est indépendant de φ .

Cela implique que le champ est nécessairement de la forme : $\vec{B} = \vec{B}(r)$

De plus, tout plans contenant z est plan de symétrie pour la distribution de courant ce qui implique que le champ est normal à ce plan. Finalement, il s'écrit :

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\varphi$$

Pour déterminer $B(r)$ en un point de l'espace, nous appliquons le théorème d'Ampère.

• **A l'intérieur du cylindre ($r < R$)**

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

D'autre part :

$$\oint_{(C_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \oint_{(C_1)} d\ell = 2\pi r B(r)$$

D'où :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \vec{e}_\varphi$$

• **A l'extérieur du cylindre ($r > R$)**

On considère le contour fermé (C_2) de rayon $r > R$. Dans ce cas, $I_{int} = I$ (le courant total contenu dans le cylindre). Le champ $\vec{B}$ s'écrit alors:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

C'est le même résultat obtenu dans l'exemple précédent d'un fil infini filiforme.

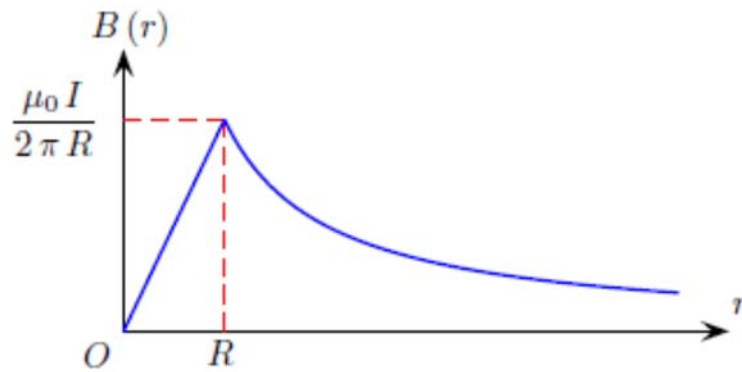


Fig. 8 : Champ magnétique créé par un fil cylindrique

3. Equations locales de la magnétostatique

3.1 Flux du champ magnétique

On montre que quelque soit (S) , une surface fermée, le flux du camp $\vec{B}$ est donné par :

$$\Phi_m = \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8)$$

C'est le théorème de Gauss pour le champ magnétique.

Le théorème de Green-Ostrogradski s'écrit :

$$\Phi_m = \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{B} \, dV$$

Cette expression est valable quelque que soit le volume V .

Ce qui permet d'écrire :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- Ce résultat implique que le flux du champ $\vec{B}$ est conservatif. Cette propriété reste valable même en régime variable. C'est une propriété fondamentale du champ magnétique $\vec{B}$.

- Cela signifie également qu'il n'y a pas de charge magnétique, comme dans le cas du champ électrostatique où $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$.

3.2 Circulation du champ magnétique

On a vu que (théorème d'Ampère) :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Le théorème de Stocks permet d'écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} B \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{rot}} B - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{S} = 0$$

La surface (S) est quelconque, ce qui donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}} B = \mu_0 \vec{j} \quad (10)$$

C'est la forme locale du théorème d'Ampère.

D'après cette dernière relation, le champ $\vec{B}$ est un champ rotationnel. En effet, les lignes de $\vec{B}$ sont des courbes fermées car il n'y a pas de charges magnétiques, contrairement au champ $\vec{E}$, qui a pour source des charges électriques, où les lignes de champ se dirigent des charges négatives vers les positives.

3.3 Le potentiel vecteur $\vec{A}$

La relation (9) implique qu'il existe un champ de vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (11)$$

Puisque $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = 0$ quelque soit le vecteur $\vec{A}$.

Le vecteur $\vec{A}$ est appelé *potentiel vecteur* (par analogie au potentiel scalaire V , où $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$).

Cependant, de même que le potentiel scalaire V n'est défini qu'à une constante près, le potentiel vecteur $\vec{A}$ n'est défini qu'à un gradient près. En effet, en considérant la transformation

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} U \quad (12)$$

Avec U un potentiel scalaire quelconque, le vecteur $\vec{A}'$ est aussi un potentiel vecteur pour $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} U) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Puisque on a toujours $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} U) = 0$ quelque soit la fonction scalaire U .

La transformation $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} U$ s'appelle *transformation de jauge*.

Le théorème d'Ampère donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

Soit

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

La liberté associée à la transformation de jauge (12) permet d'attribuer à $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ la forme fonctionnelle la plus adaptée. Par commodité, on choisit la jauge :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (13)$$

Cette jauge est appelée *jauge de Coulomb*.

Dans ce cas, les composantes du vecteur $\vec{A}$ vérifient l'équation de Poisson.

$$\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = 0 \quad (14)$$

Par analogie donc, la solution de l'équation de Poisson pour $\vec{A}$ est donnée par :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{J}^{(M)}}{r} dV(M) \quad (15)$$

Bibliographie

- [1] : J. D. Jackson, Electrodynamique classique – Cours et exercices d'électromagnétisme, Dunod, 2001.
- [2] : W. Greiner, Classical Electrodynamics, Springer, 1998.
- [3] : E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm, N. Piccioli, Electrostatique et Electrocinétiq, 2^{ème} Ed, Dunod, 2006.
- [4] : P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain, les phénomènes électromagnétiques, Dunod, 2002.
- [5] : P. Lorrain, D. R. Corson, F. Lorrain, Electromagnetic Fields and Waves, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.
- [6] : D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice-Hall, 1999.
- [7] : D. K. Cheng, Field and Wave – Electromagnetics, Tsinghua University Press, 2nd Ed., 2006.
- [8] : H. Gié et J.-P. Sarmant, Electromagnétisme 1, Lavoisier Tec & Doc, 1995.
- [9] : H. Gié et J.-P. Sarmant, Electromagnétisme 2, Lavoisier Tec & Doc, 1996.
-