



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
De la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira – Bejaia



Faculté de Technologie

Département D'Architecture

Domaine : Architecture, urbanisme et métiers de la ville

Filière : Architecture

Spécialité : Architecture

Master 1, Spécialité « Architecture »

Matière : **Résistance Des Matériaux-1 (RDM-1)**

Polycopie de cours en vue d'expertise

Responsable de la matière : **Mme. BOUDINA Tounsia**
Année universitaire : 2024/2025

PALIER MASRER	INTITULE DE LA MATIERE			SEMESTRE 1
	Domaine : Architecture, Urbanisme et Métiers de la Ville			
NIVEAU M1	Filière : Architecture		Spécialité : Architecture	DATE
LIEU D'ENSEIGNEMENT	UNITE D'ENSEIGNEMENT	V.H.S (H)	CREDITS	COEFFICIENT
	Résistance des matériaux 1 UET3 –SEMESTRE 1	45h	2	2
INTERVENANTS	Mme / Mr : BOUDINA Tounsia		Mme / Mr :	
	GRADE : M.C.A		GRADE :	
	Email pro. tounsia.boudina@univ-bejaia.dz		Email pro.	
DESCRIPTION	La Résistance des Matériaux (RDM) est une discipline de la mécanique qui étudie le comportement des corps solides soumis à des sollicitations mécaniques afin de garantir leur résistance, rigidité et stabilité. Elle permet de déterminer les contraintes, déformations et déplacements dans des structures comme les poutres, barres ou arbres, en tenant compte des lois de comportement des matériaux. Appliquée dans le dimensionnement et la vérification de pièces mécaniques ou de structures (bâtiment, machines, ponts, etc.), la RDM constitue une base essentielle pour les étudiants en génie civil, mécanique ou industriel, car elle relie la théorie à la pratique du calcul de résistance et de sécurité des structures.			
OBJECTIF GENERAL DE LA MATIERE D'ENSEIGNEMENT	Contenu de la matière ➤ Forces- Moments- Actions. D'une manière générale, la force est une notion physique qui exprime l'action qu'exerce un corps sur un autre. ➤ Principes- Représentation des forces, moments et déplacements. Les forces et moments obéissent à trois ➤ Principes à partir desquels on peut comprendre l'analyse du jeu des forces dans les structures. ➤ Équilibre. Nous devons considérer l'équilibre dans le plan et l'espace, et ce pour assurer la stabilité d'ensemble d'une structure. ➤ Éléments structuraux. Une structure est un ensemble d'éléments (horizontaux, verticaux ...) ➤ Les appuis ➤ Calcul des poutres ➤ Diagrammes des efforts intérieurs (moment fléchissant, efforts tranchants et efforts normaux) dans les Poutres ➤ Notions de contraintes ➤ Propriétés mécaniques des matériaux.			
OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE	Le principal objectif du module de RDM dans la formation de l'architecte est que celui-ci doit être capable de comprendre et de sentir le comportement de la structure qui portera son ouvrage, quels que soient les matériaux qui la constituent. Il s'agit de comprendre les phénomènes physiques en jeu (force, équilibre, contrainte, résistance, déformation, etc.) et leurs conséquences pour la conception (choix d'un matériau, géométrie des éléments et de leur section, types d'assemblages). La résistance des matériaux dispensée aux étudiants de deuxième année qui constitue une matière de base pour les modules de structure des années suivantes consiste à leur donner l'ensemble des ingrédients nécessaires à une bonne compréhension de la théorie de la RDM.			

PRE-REQUIS	Pour une bonne conduite de cette matière, l'étudiant doit se baser sur ces efforts et compétences individuels, et sur l'ensemble des connaissances acquises pendant sa formation en licence, à savoir Technologie des matériaux de construction 1 et 2, Mathématiques et Physique du bâtiment.				
APERCU INDICATIF DU PROGRAMME DISPENSE	La formation se déroulera avec des cours magistraux dispensé en salle (en Power-Point) avec la publication des résumés en format PDF et des séries de TD sur la plateforme Learning.				
MATERIEL OBLIGATOIRE					
ORGANISATION DE LA MATIERE	Cours H	T.D H	T.P H	Stage H	Sortie d'étude U
	1h30	1h30	/	/	/
SYSTEME D'EVALUATION	Examen programmé : 60 %			Contrôles continus : 40 %	
PLANNING PREVISIONNEL DU SEMESTRE	Arrêt de : cours/ Ateliers/ TD : le 15/12/2023				
	Rendus : TD/ Affichage Atelier :				
	Période examens : à partir du 8 /01/2024				
	Dates de vacances : du 17/12/2023 – 07/01 /2024 (dates officielles)				
	Fin Semestre 1 :				
CALENDRIER DES ENSEIGNEMENTS	COURS MAGISTRAL / ATELIER			TD / LOGE	
SEMAINE 01	Généralités				
SEMAINE 02	Généralités			Forces- Moments- Actions	
SEMAINE 03	Généralités			Calcul des réaction d'appuis	
SEMAINE 04	Caractéristiques géométriques des sections droites				
SEMAINE 05	Caractéristiques géométriques des sections droites			Exercices sur les différents types des sections composées.	
SEMAINE 06	Caractéristiques géométriques des sections droites			Exercices sur les différents types des sections composées.	
SEMAINE 07	Les efforts internes				
SEMAINE 08	Les efforts internes			Exercices sur les calculs des efforts internes.	
SEMAINE 09	Les efforts internes			Exercices	
SEMAINE 10	Etats de contrainte				

SEMAINE 11	Etats de contrainte	Application sur les états de contraintes
SEMAINE 12	Etats de contrainte	Exercices sur les états de contrainte
SEMAINE 13		
REFERENCES OUVRAGES EXISTANTS DANS LA BIBLIOTHEQUE DE L'UNIVERSITE	- Aide mémoire RDM (Pissarenco, Ed Moscou) - Analyse des structures (Med. Osman Zakaria 1986-OPU Alger) - Statique des constructions (Dobrescu –Alexandru OPU Alger) - Dobrescu C et Alexandru « Statiques des constructions » (OPU 1992) - J.C Doubrère « Cours pratique de résistance des matériaux » (Éditions Eyrolles 1979) - Anissimov,Djilali Berkene,Strakhov « Flambage-systèmes isostatiques des barres » (OPU 1987) - Pissarenco « Aide mémoire RDM » (Ed Moscou) - Med. Osman Zakaria « Analyse des structures » (1986-OPU Alger) - Dobrescu –Alexandru « Statique des constructions » (OPU Alger) - Goulet Jean « Résistance des matériaux »	
CONSEILS A DONNER AUX ETUDIANTS	-La prise de notes pendant les cours. -Assiduité des cours pour la réussite et la compréhension de la matière. -Préparation des travaux TD demandé. -La préparation aux examens.	

LISTE DES ETUDIANTS :

	N°	Matricule	Nom	Prénoms	Émargement
	01				
	02				
	03				
	04				
	05				
	06				
	07				
	08				
	09				
	10				
	11				
	12				
	13				
	14				
	15				
	16				
	17				
	18				
	19				
	20				
	21				
	22				
	23				
	24				
	25				
	26				
	27				
	28				
	29				
	30				

SIGNATURE DE L'ENSEIGNANT

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année en architecture et a pour objectif de leur fournir les bases fondamentales de la Résistance des Matériaux (RDM-1), une discipline essentielle à la compréhension du comportement mécanique des structures. La maîtrise de ces notions est indispensable pour concevoir des bâtiments sûrs, durables et conformes aux exigences techniques. Le document est structuré en quatre chapitres complémentaires, qui suivent une progression logique :

1. **Généralités** : Ce premier chapitre introduit les notions de base de la RDM, les hypothèses fondamentales, les unités utilisées, ainsi que le cadre général d'analyse des structures.
2. **Caractéristiques géométriques des sections planes** : Ce chapitre traite des propriétés géométriques des sections transversales, telles que le centre de gravité, le moment d'inertie ou le moment statique, éléments clés pour l'étude de la résistance des éléments de structure.
3. **Les efforts internes** : On y étudie les sollicitations internes (traction, compression, cisaillement, flexion, torsion) qui résultent des charges appliquées sur les structures. L'objectif est de comprendre comment ces efforts sont distribués et transmis à travers les éléments porteurs.
4. **État de contrainte** : Enfin, ce dernier chapitre introduit la notion de contrainte, les différents types de contraintes dans un matériau, ainsi que les critères de résistance, permettant d'évaluer si un matériau ou un élément de structure est capable de supporter les efforts auxquels il est soumis.

Ce support de cours vise à accompagner les étudiants dans leur apprentissage en leur offrant des explications claires, des schémas explicatifs et des exemples pratiques. Il ne se substitue pas à l'enseignement en classe, mais constitue un outil complémentaire pour la compréhension et la révision. Nous espérons que ce document contribuera efficacement à votre formation et à votre développement en tant que futur architecte.

L'auteur, BOUDINA. T

Table de matière

Avant-propos

Sommaire

CHAPITRE 1 : Généralités

1. Introduction	2
2. Hypothèses de la résistance des matériaux	3
2.1. Hypothèses sur les matériaux	3
2.1.1 Continuité et homogénéité	3
2.1.2 Isotropie	3
2.1.3 Caractéristiques mécaniques obtenues expérimentalement	3
2.2. Hypothèses sur la géométrie des poutres	3
2.2.1 Forme allongée (poutres élancées)	4
2.2.2 Courbure modérée	4
2.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs	4
2.3.1 Types de charges	4
3. Classification des solides	5
3.1 Selon le comportement :	5
Selon la géométrie :	6
4. Différents types de chargements	7
4.1 Traction / Compression : force agissant selon l'axe de la pièce.	7
4.2 Cisaillement (ou effort tranchant) : force parallèle à la section de la pièce.	7
4.3 Flexion : combinaison d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant.	8
4.4 Torsion : moment tournant appliqué autour de l'axe longitudinal.	8
4.5 Chargement combiné : combinaison de plusieurs sollicitations simultanées.	8
5. Différents types de liaisons en Génie Civil (GC)	8
6. Principe général d'équilibre : (principe de l'action et de la réaction)	9
6.1 Équilibre de translation	9
6.2 Équilibre de rotation	10
7. Principe de la coupe et convention de signe	10
.....	10
Les conventions de signe, les signes des efforts internes dépendent des conventions adoptées. En général :	11

8. Conclusion	11
----------------------------	-----------

CHAPITRE 2 : Caractéristiques géométriques

1. Introduction	13
2.1. Aire de la section A	13
2.2. Centre de gravité X_G et Y_G (Centre de masse)	14
2.3. Moment d'inertie I_x et I_y	16
2.4 Moment statique d'une section droite S_x, S_y	17
2.5. Moment d'inertie polaire	17
2.6 Produit d'inertie (Moment d'inertie centrifuge)	19
2.7. Module de résistance (S)	19
2.8. Rayon de giration (r)	19
2.9. Autres caractéristiques géométriques	20
2.10. Formule de transformation des moment d'inertie	20
2.10.1 Translation d'axes :	20
2.10.2 Rotation d'axes :	22
2.11 Caractéristiques géométriques des sections usuelles	22
2.12 Moment d'inertie principaux :	23
2.13. APPLICATION	24
Conclusion	26

CHAPITRE 3 : Les efforts internes

Introduction	28
1. Définition et types d'efforts internes	28
1.1 Efforts de traction et de compression (Effort normal N)	29
1.2 Efforts de cisaillement (Efforts tranchants)	30
1.3 Moments fléchissants	30
1.4 Moment de torsion	31
2. Relation entre les efforts internes et les charges externes	32
2.1 Principe de l'équilibre statique	33
2.2 Diagrammes des efforts internes	33
3. Méthodes de calcul des efforts internes	34

3.1 Méthode des sections	34
3.2 Méthode de l'intégration	34
4. Efforts internes et déformation	34
5. APPLICATIONS	35
6. Conclusion	38

CHAPITRE 4 : Etats de contrainte

4.1 Introduction	40
4.2. Notion de contrainte	40
<i>4.3. État de contrainte</i>	<i>41</i>
4.3.1 Équation de transformation de l'état de contrainte linéaire (1D)	43
4.3.2 Équation de transformation de l'état de contrainte plan (2D)	44
4.3.3 Les contraintes principales	45
4.4 Cercle de Mohr pour les contraintes	48
4.5 Relation entre contrainte et déformation	49
4.6 Mesure des déformations expérimentales	53
6.1. Jauge de déformation (jauge extensométrique électrique)	53
6.2. Extensomètre mécanique	55
6.3. Extensomètre optique ou par corrélation d'image (DIC)	55
6.4. Machine d'essai universelle (INSTRON, Zwick, etc.)	56
7. Application 1 : Calcul de l'état de contrainte dans une barre soumise à une force axiale	56
8. Application 2 : Analyse d'un état plan de contrainte	58
Conclusion	60

[Conclusion générale](#)

[Liste des références](#)

Liste des figures et des tableaux

Liste des figures

N°	Titre	Page
Fig. 1.1	a) Charge concentrées, b) Charge de contact, c) Charge réparties linéaire, d) Charge réparties surfacique.	6
Fig. 1.2	Courbe contrainte-déformation (Domaine Elastique, Domaine Plastique).	7
Fig. 1.3	Elément poutre de longueur L , de section S .	7
Fig. 1.4	Elément plaque à deux dimension et à faible épaisseur.	7
Fig. 1.5	Elément coque à deux rayon de courbure (sphérique).	8
Fig. 1.6	Traction / Compression d'une pièce.	8
Fig. 1.7	Cisaillement ou effort tranchant d'une poutre.	8
Fig. 1.8	Flexion d'une poutre (fibres comprimées, fibres tendues).	9
Fig. 1.9	Torsion et moment de torsion appliqué sur une poutre.	9
Fig. 1.10	Différents types de liaisons	10

Fig. 1.11	Les conventions de signe	11
Fig. 2.1	Schéma de centre de gravité d'une section A de forme quelconque	17
Fig. 2.2	Centre de gravité d'une section A composé de plusieurs section simple A_i	19
Fig. 2.3	Moment d'inertie polaire d'une surface quelconque	21
Fig. 2.4	Moment d'inertie polaire d'un disque	22
Fig. 2.5	Formule de moment d'inertie en translation d'axes	24
Fig. 2.6	Formule de moment d'inertie en rotation d'axes	25
Fig. 3.1	Sollicitation dans une section transversale d'une poutre sur deux appuis	35
Fig. 3.2	Moment de torsion (M_r)	36
Fig. 3.3	Efforts de traction et de compression (Effort normal N)	36
Fig. 3.4	Convention de signe des efforts tranchants	37
Fig. 3.5	Convention de signe du moment fléchissant	39
Fig. 3.6	Convention de signe en cas de la torsion	40
Fig. 3.7	Les étapes de la méthode des section	43

Fig. 3.8	Courbe contrainte déformation	43
Fig. 3.9	Poutre ABC sous sollicitation de flexion	
Fig. 3.10	Diagrammes des efforts internes	46
Fig. 3.11	Exercice d'application 1	47
Fig. 3.12	Exercice d'application 2	47
Fig. 4.1	Contrainte normale, tangentielle et vecteur de contrainte appliqués sur un élément de matière.	51
Fig. 4.2	Notion de contrainte	52
Fig. 4.3	Représentation tridimensionnelle de l'état de contrainte en un point	53
Fig. 4.4	État de contrainte	54
Fig. 4.5	Etats de contrainte sur une face	54
Fig. 4.6	Transformation des contraintes sur une section inclinée d'un element unidimensionnel soumis à la traction	55
Fig. 4.7	Etat de contrainte selon une direction Sa	56
Fig. 4.8	Etat plan de contrainte dans le plan (x, y)	57
Fig. 4.9	Les contraintes sur les	58

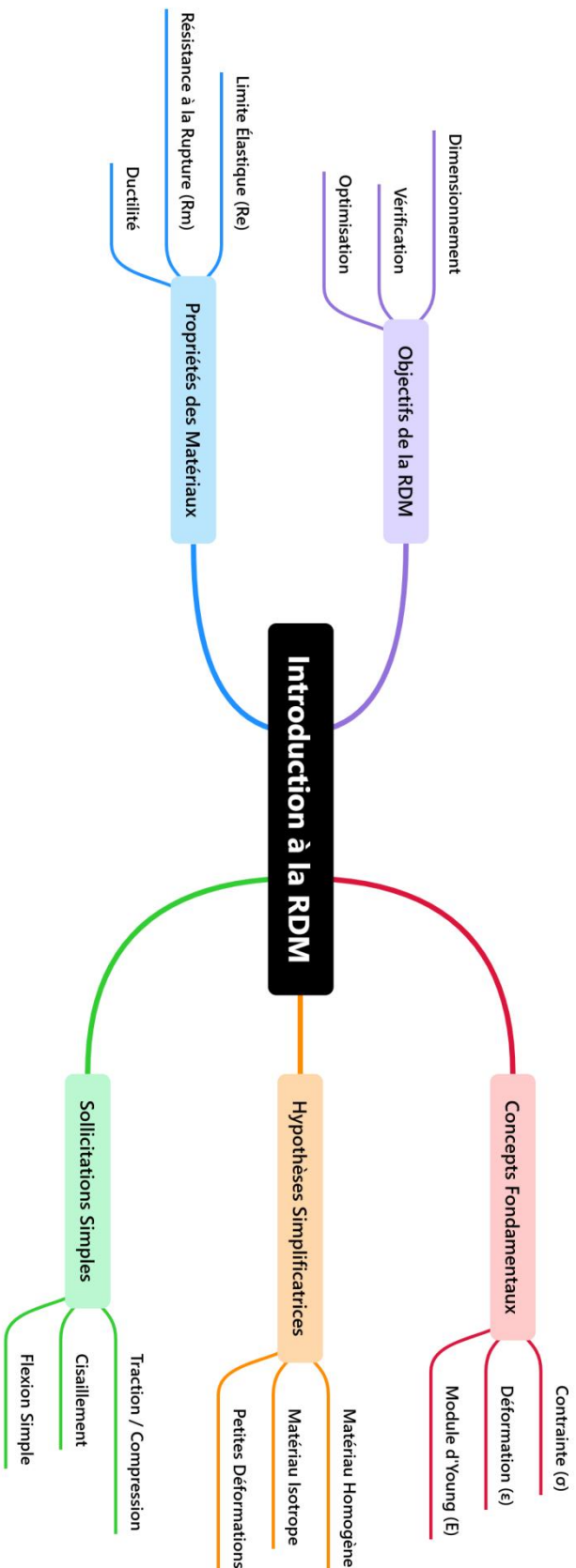
	différentes faces du prisme	
Fig. 4.10	Contraintes principales et directions principales (les contraintes de cisaillement sont nulles)	60
Fig. 4.11	Cercle de Mohr pour un état plan de contrainte	62
Fig. 4.12	Les contraintes normales et de cisaillements sur les facettes	63
Fig. 4.13	Cercle de Mohr	63
Fig. 4.14	Allongement d'une barre en traction et loi de Hooke	65
Fig. 4.15	Schema de cisaillement pur et déformation de cisaillement angulaire	66
Fig. 4.16	Coefficient de Poisson	67
Fig. 4.17	Rosette extensométrique, extensomètre mécanique	70
Fig. 4.18	Mesure de déformation expérimentale	71
Fig. 4.19	Mésure des déformations de surface par corrélation d'images numériques (DIC)	73
Fig. 4.20	Machine universelle d'essai (INSTRON? Zwick)	74
Fig. 4.21	Représentation de l'état plan de contrainte - Cercle de Mohr	78

Liste des tableaux

N°	Titre	Page
Tab. 1.1	Caractéristiques géométriques des sections usuelles	26
Tab. 4.1	Module d'élasticité E (GPa)	69

Chapitre I

Généralités

Carte mentale de la structure du chapitre

1. Introduction

La Résistance des Matériaux (RDM) est une branche de la mécanique des milieux continus qui joue un rôle fondamental dans l'analyse et la conception des structures mécaniques et des ouvrages et des structures. Elle permet d'étudier les effets des sollicitations (charges, forces, moments) sur les solides afin d'en assurer la résistance, la rigidité et la stabilité.

Elle s'intéresse principalement à déterminer les dimensions des systèmes mécaniques afin qu'ils puissent résister aux efforts auxquels ils sont soumis en service, tout en respectant les conditions de sécurité exigées.

Elle permet de :

- Déterminer les efforts internes dans une structure (contraintes, efforts tranchants, moments fléchissants, etc.).
- Vérifier que les déformations restent dans des limites acceptables.
- Concevoir des structures résistantes, fiables et économiques (poutres, colonnes, arbres, coques, etc.).

La RDM est essentielle dans de nombreux domaines du génie civil, du génie mécanique, de l'aéronautique, et plus généralement dans toute discipline impliquant la conception de structures ou d'éléments porteurs.

Avant d'aborder les méthodes de calcul proprement dites, il est essentiel de comprendre les concepts de base sur lesquels repose cette discipline : la finalité de la résistance des matériaux, les hypothèses adoptées, la classification des solides, les types de chargement, les différentes liaisons mécaniques, ainsi que les principes d'équilibre et les conventions associées aux efforts internes.

Ce chapitre introductif pose donc les fondements nécessaires pour aborder l'étude détaillée des comportements mécaniques des pièces sollicitées.

L'analyse en RDM repose sur un ensemble d'hypothèses qui visent à simplifier les phénomènes physiques tout en conservant leur représentativité. Ces hypothèses portent sur la nature des matériaux, la géométrie des structures (notamment les poutres), et le type d'efforts extérieurs appliqués.

2. Hypothèses de la résistance des matériaux

2.1. Hypothèses sur les matériaux

2.1.1 Continuité et homogénéité

On suppose que les matériaux étudiés sont **continus**, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de discontinuités internes (fissures, vides, inclusions...). De plus, le matériau est considéré comme **homogène**, ce qui signifie que ses propriétés mécaniques (densité, module d'élasticité, résistance, etc.) sont **constantes dans tout le volume**.

Ces hypothèses permettent de traiter la matière comme un **milieu continu**, sans avoir à tenir compte de sa structure microscopique (atomes, grains, fibres, etc.).

2.1.2 Isotropie

Le matériau est également supposé **isotrope**, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques sont **identiques dans toutes les directions**. Cette hypothèse simplifie les modèles car elle évite d'avoir à distinguer plusieurs axes de comportement.

Certains matériaux (bois, composites, béton armé) sont **anisotropes**, mais peuvent parfois être assimilés à des matériaux isotropes à l'échelle macroscopique.

2.1.3 Caractéristiques mécaniques obtenues expérimentalement

Le comportement mécanique des matériaux est défini par des **paramètres mesurés en laboratoire**, tels que :

- Le **module de Young** (rigidité),
- La **limite d'élasticité** (seuil de comportement plastique),
- La **résistance à la traction ou compression**,
- Le **coefficient de Poisson** (liant déformations axiales et transversales).

Ces données sont généralement obtenues par des **essais normalisés**, comme l'essai de traction ou de compression uniaxiale.

2.2. Hypothèses sur la géométrie des poutres

La RDM s'applique essentiellement à des structures de type **poutres**, dont les dimensions suivent des critères géométriques particuliers.

2.2.1 Forme allongée (poutres élancées)

On suppose que la poutre est un solide dont **la longueur est très supérieure à ses dimensions transversales** (hauteur et largeur). Cela permet de modéliser la structure en une dimension (axe longitudinal).

On utilise les rapports géométriques suivants :

- Poutres droites, le rapport $L/30 \leq h/L \leq L/5$ (généralement : entre $L/15$ et $L/10$)
- Poutres courbes, ce rapport $L/100 \leq h/L \leq L/50$.
- Le rayon de courbure de la ligne moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre, en général, ce rayon doit être $\geq$ à 5 fois de la hauteur de la section.

Ces conditions garantissent que la déformation principale est la **flexion**, et non un comportement tridimensionnel plus complexe.

2.2.2 Courbure modérée

Dans le cas des poutres courbes, on suppose que le **rayon de courbure de la ligne moyenne** (ligne située à mi-hauteur de la poutre) est **largement supérieur à la hauteur de la section**.

Cette condition permet de justifier certaines simplifications dans l'analyse des contraintes internes.

2.3. Hypothèses sur les efforts extérieurs

Les sollicitations appliquées aux structures sont également idéalisées selon des hypothèses standards.

2.3.1 Types de charges

Les actions mécaniques peuvent être :

- **Concentrées** : forces appliquées en un point précis (ex. : charge ponctuelle).
- **En contact** : forces exercées directement sur la surface (appuis, pressions).
- **Réparties linéaire** : forces distribuées sur une longueur (force répartie le long d'une ligne) ex. : poids propre d'une poutre.

- **Réparties surfacique** : forces distribuées sur une surface (force répartie le long d'une ligne) une surface ou un volume (ex. : poids propre, pression du sol).
- **À distance** : comme les champs de force (ex. : gravitation, champ magnétique — souvent négligés en RDM classique).

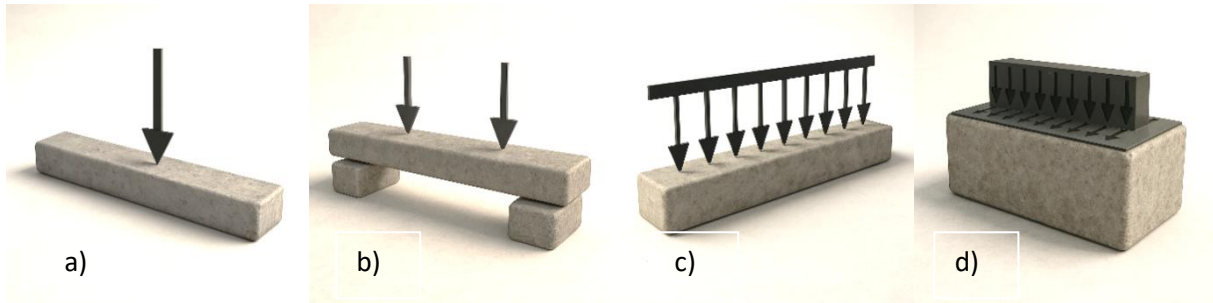


Fig. 1.1. a) Charge concentrées, b) Charge de contact, c) Charge réparties linéaire, d) Charge réparties surfacique.

2.3.2 Hypothèse de quasi-staticité

On suppose que les charges sont **appliquées lentement**, sans provoquer d'accéléérations importantes. Cela permet de négliger les **effets dynamiques** (inertie, vibration, résonance) et de considérer le problème comme **statique**.

3. Classification des solides

Les solides utilisés en RDM sont classés selon leur **comportement mécanique** et leur **forme géométrique**.

3.1 Selon le comportement :

- **Solides élastiques** : reviennent à leur forme initiale après suppression des charges.
- **Solides plastiques** : présentent une déformation permanente après dépassement d'un certain seuil.
- **Solides fragiles** : se rompent sans déformation plastique significative.
- **Solides ductiles** : peuvent se déformer de manière importante avant rupture.

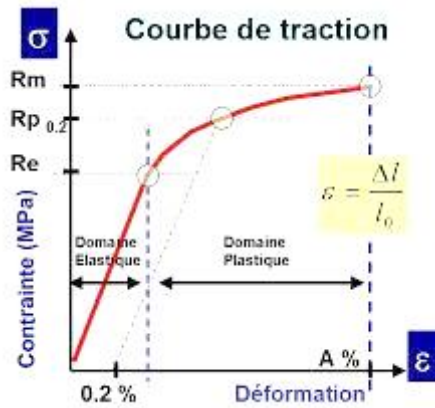
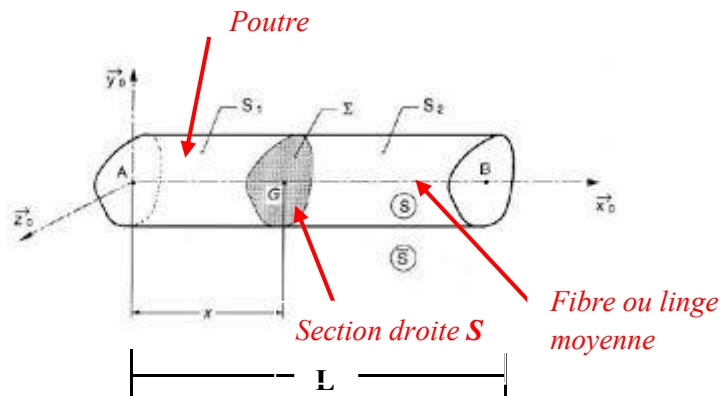


Fig. 1.2. Courbe contrainte-déformation (Domaine Elastique, Domaine Plastique).

Selon la géométrie :

- 3.2.1 **Poutres** : solides longs dont une dimension (la longueur) est très supérieure aux deux autres. Une poutre est engendrée par une aire plane (S) dont le centre de gravité (G) décrit une courbe (τ), le plan de l'aire (S) reste normal par rapport à (τ).



S : L'aire de la section (section droite).
 τ : La courbe, est appelée fibre moyenne.

Fig. 1.3. Élément poutre de longueur L , de section S .

- 3.2.2 **Plaques** : L'épaisseur très faible par rapport aux autres dimensions. Les plaques sont des structures dont une des dimensions est très faible devant les autres (épaisseur).

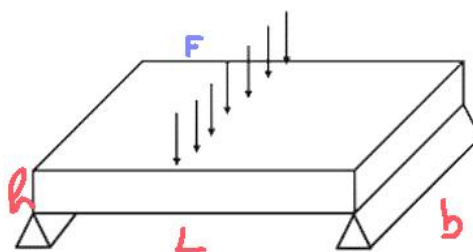


Fig. 1.4. Élément plaque à deux dimension et à faible épaisseur.

3.2.3 **Coques** : Des structures minces courbes (ex. : réservoirs, coupoles). Les coques ont un rayon de courbure au moins plus faible devant les autres dimensions.

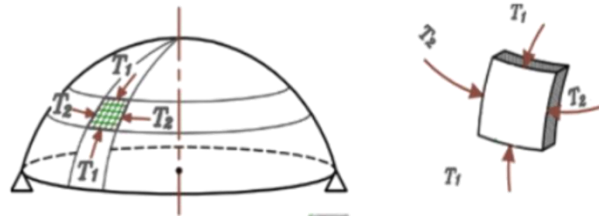


Fig. 1.5. Elément coque à deux rayon de courbure (sphérique).

4. Différents types de chargements

Une pièce peut être soumise à plusieurs types de sollicitations, qui génèrent des efforts internes différents :

4.1 **Traction / Compression** : force agissant selon l'axe de la pièce.

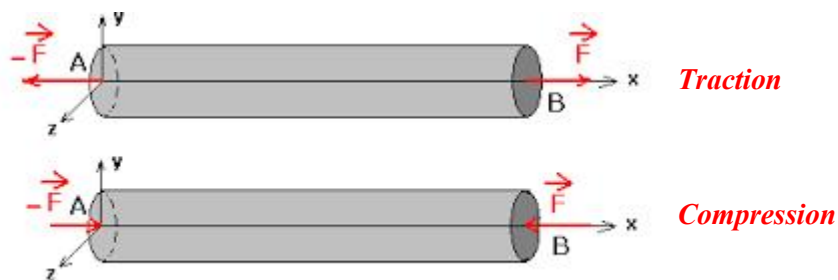


Fig. 1.6. Traction / Compression d'une pièce.

4.2 **Cisaillement (ou effort tranchant)** : force parallèle à la section de la pièce.

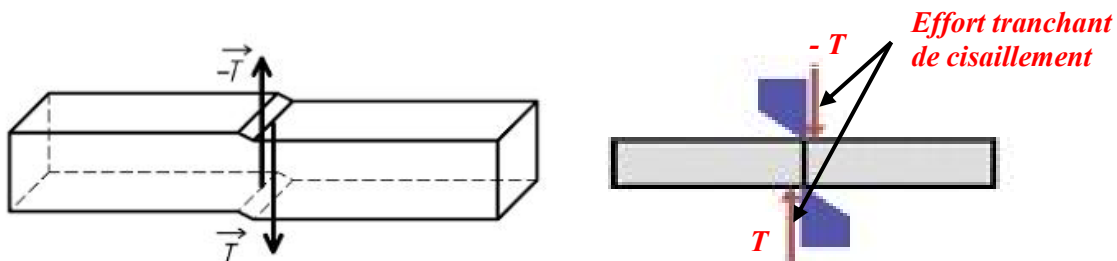


Fig. 1.7. Cisaillement ou effort tranchant d'une poutre.

4.3 Flexion : combinaison d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant.

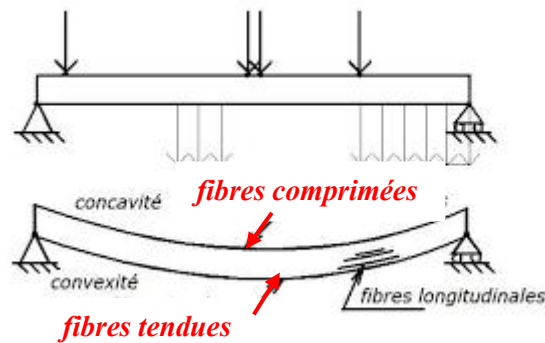


Fig. 1.8. Flexion d'une poutre (fibres comprimées, fibres tendues).

4.4 Torsion : moment tournant appliqué autour de l'axe longitudinal.

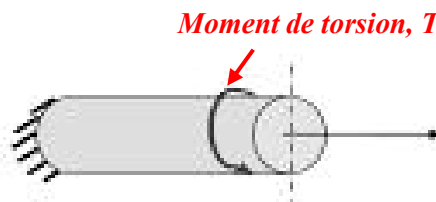


Fig. 1.9. Torsion et moment de torsion appliqué sur une poutre.

4.5 Chargement combiné : combinaison de plusieurs sollicitations simultanées.

Chaque type de chargement produit des contraintes et des déformations spécifiques, que la RDM permet de modéliser et de calculer.

5. Différents types de liaisons en Génie Civil (GC)

Les **liaisons mécaniques** permettent de relier des pièces entre elles ou à leur environnement.

En génie civil (fig. 1.6), on distingue principalement :

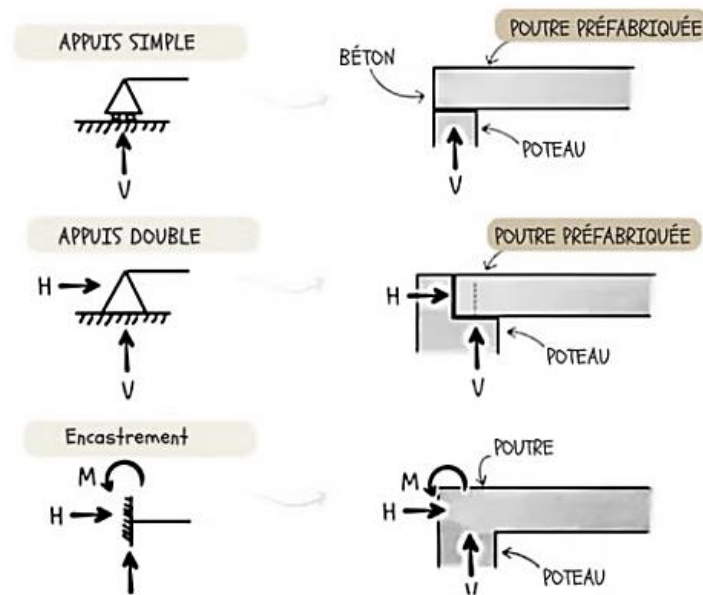


Fig. 1.10. Différents types de liaisons

- ✓ **Appui simple** (ou articulation simple) : autorise la rotation mais empêche la translation dans une direction.
- ✓ **Encastrement** : empêche toute translation et toute rotation.
- ✓ **Double appui** : deux appuis simples permettent de supporter une poutre (cas classique).
- ✓ **Rotule** : permet une rotation libre dans toutes les directions.

Chaque liaison engendre des réactions spécifiques (forces et/ou moments) qui doivent être prises en compte dans l'étude des structures.

6. Principe général d'équilibre : (principe de l'action et de la réaction)

Le principe fondamental de la statique, aussi appelé **principe de l'action et de la réaction** (3^e loi de Newton), stipule que :

« À toute action exercée par un corps A sur un corps B correspond une réaction de B sur A, de même intensité, de même direction, mais de sens opposé. »

La forme des **équations d'équilibre** appliquées, est la suivante :

6.1. Équilibre de translation

- $\sum F_x = 0$ (Équilibre de translation selon xx)

- $\sum F_y = 0$ (Équilibre de translation selon yy)

6.2 Equilibre de rotation

- $\sum M_{/i} = 0$ (Équilibre de rotation par rapport au point i)

Ces équations sont essentielles pour déterminer les efforts internes dans une structure à partir des sollicitations extérieures.

7. Principe de la coupe et convention de signe

Pour étudier l'état interne d'une structure, on utilise le **principe de la coupe** :

On isole une portion de la pièce en la "coupant" en un point donné, puis on applique les équations d'équilibre à la partie restante.

Cela permet de faire apparaître les **efforts internes** :

- Effort normal (**N**) : force axiale.
- Effort tranchant (**T**) : force perpendiculaire à l'axe.
- Moment fléchissant (**Mf**) : moment autour de l'axe perpendiculaire à la section.
- Moment de torsion (**Mt**) : moment autour de l'axe longitudinal.

Lorsque on fait une section dans une poutre, les efforts internes sont comme suit :

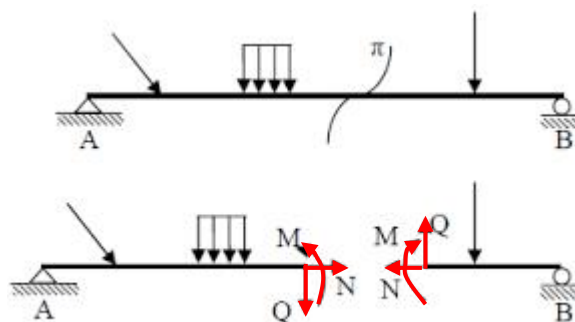


Fig. 1.11. Les conventions de signe

Les conventions de signe, les signes des efforts internes dépendent des conventions adoptées.

En général :

- Effort normal (N) est positif si la fibre est en traction.
- Effort tranchant (Q) est positif s'il fait tourner la section dans le sens horaire.
- Moment fléchissant (M) est positif s'il tend à courber la poutre avec les fibres tendues en dessous (sourire).
- Moment de torsion (M_t) est positif selon la règle du tire-bouchon.

Ces conventions permettent de garder une cohérence dans les calculs et l'interprétation des résultats.

Conclusion

Ce premier chapitre a permis de poser les bases théoriques indispensables à la compréhension de la Résistance des Matériaux. En identifiant les objectifs de la RDM, ses hypothèses de modélisation, les classifications des solides et les différents types de sollicitations, l'étudiant dispose désormais d'un cadre conceptuel solide.

La maîtrise des principes d'équilibre, du principe de la coupe et des conventions de signe est essentielle pour aborder les chapitres suivants, qui traiteront de manière plus approfondie le calcul des efforts internes et des déformations. Ces connaissances de base guideront toute analyse mécanique rigoureuse d'une structure ou d'un élément de construction.

Travaux Dirigés Corrigés – Chapitre I : Généralités

Exercice 1 –

Une structure est composée des éléments suivants :

1. Un câble supportant une enseigne.
2. Un poteau en béton supportant une toiture.
3. Une poutre simplement appuyée portant un plancher.
4. Un arbre de transmission.
5. Un boulon reliant deux plaques métalliques.

Questions :

- a) Identifier la sollicitation principale de chaque élément.
- b) Indiquer le type de contrainte produite.
- c) Préciser si l'effort est normal, tranchant, de flexion ou de torsion.

Solution détaillée

Élément	Sollicitation	Contrainte	Justification
Câble	Traction	Normale de traction	Le câble ne travaille qu'en traction.
Poteau	Compression	Normale de compression	Le poids agit suivant l'axe du poteau.
Poutre	Flexion	Contrainte de flexion	Les charges transversales provoquent un moment fléchissant.
Arbre	Torsion	Contrainte de cisaillement	Transmission d'un couple de torsion.
Boulon	Cisaillement	Contrainte de cisaillement	Les plaques tendent à glisser l'une par rapport à l'autre.

À retenir

- La traction et la compression produisent des contraintes normales.
- La flexion produit un moment fléchissant.

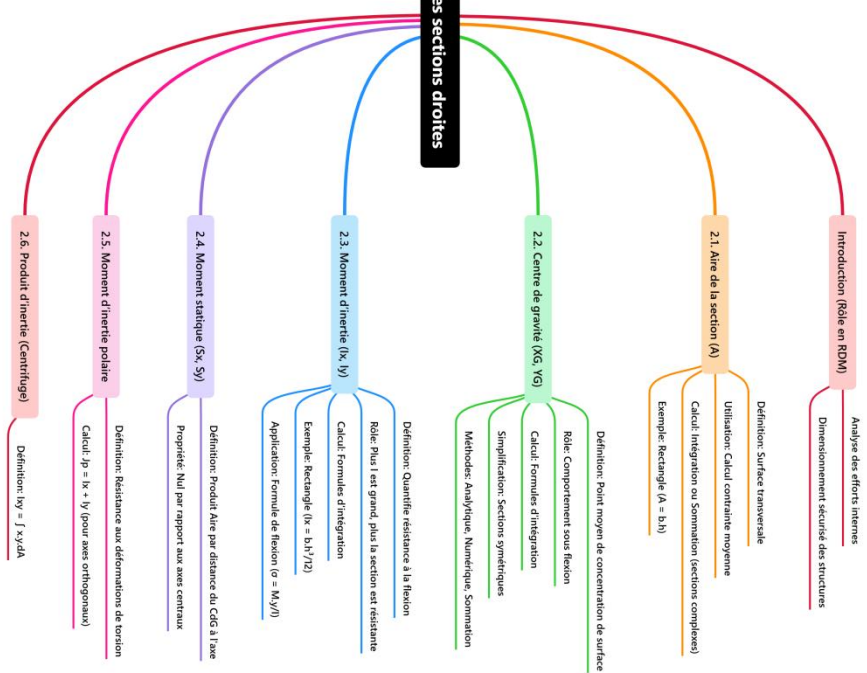
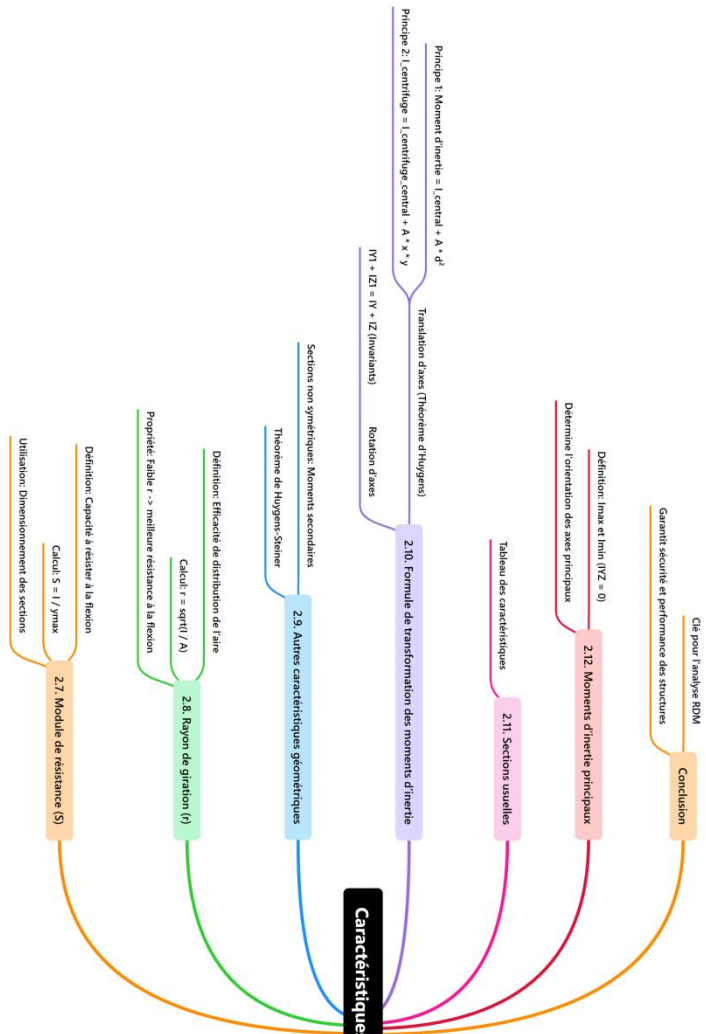
- La torsion produit des contraintes de cisaillement.
- Le cisaillement résulte d'efforts parallèles à la section.

Compétences visées

Identifier les principales sollicitations mécaniques rencontrées dans les éléments structuraux.

Chapitre II

Caractéristiques géométriques des sections droites



Carte mentale de la structure du chapitre II
Caractéristiques géométriques des sections droites

1. Introduction

En Résistance des Matériaux (RDM), les sections planes jouent un rôle crucial dans l'analyse des structures. Les caractéristiques géométriques d'une section plane permettent de déterminer la répartition des efforts internes, tels que les moments fléchissants et les contraintes de cisaillement, en fonction de la géométrie de la section.

Les principales caractéristiques géométriques des sections planes en RDM sont les suivantes :

La Résistance des Matériaux (RDM) est une discipline fondamentale dans l'ingénierie civile et mécanique qui s'intéresse à l'étude du comportement des matériaux et des structures sous l'effet des charges appliquées. Une partie essentielle de cette analyse repose sur les caractéristiques géométriques des sections planes, qui permettent de déterminer la répartition des efforts internes, comme les moments fléchissants, les efforts tranchants et les contraintes de traction et compression. Comprendre et maîtriser ces caractéristiques est indispensable pour dimensionner des structures capables de supporter des charges de manière sécurisée.

Dans ce chapitre, nous aborderons les principales caractéristiques géométriques des sections planes utilisées en RDM, telles que l'aire de la section, le centre de gravité, le moment d'inertie, le module de résistance, le rayon de giration, et d'autres éléments essentiels pour l'analyse des structures.

La résistance des matériaux (RDM) est un domaine fondamental en ingénierie, essentiel pour concevoir des structures sûres et fiables. Les sections planes, en particulier, jouent un rôle crucial dans l'analyse des efforts internes dans les structures. Ces caractéristiques géométriques permettent de prédire les déformations et les contraintes sous différentes charges.

Ce chapitre explore en profondeur les caractéristiques géométriques des sections planes : aire, centre de gravité, moment d'inertie, module de résistance, et rayon de giration, en illustrant chaque concept avec des exemples pratiques et des applications concrètes.

2.1. Aire de la section A

L'aire de la section plane est la surface de la section transversale à travers laquelle passent les efforts internes. Cette grandeur est fondamentale pour l'analyse de la résistance des matériaux car elle permet de calculer des différentes grandeurs comme la contrainte moyenne. Pour une

section rectangulaire, par exemple, l'aire A est simplement le produit de la largeur b et de la longueur h :

$$A = b \times h$$

Dans les sections plus complexes, l'aire est obtenue par intégration de l'élément de surface comme suit :

$$A = \iint dA$$

L'aire est également utilisée pour le calcul des contraintes moyennes (pression ou traction) qui dépendent de la force appliquée divisée par l'aire de la section.

2.2. Centre de gravité X_G et Y_G (Centre de masse)

Le centre de gravité (ou centre de masse pour une section plane) est un point crucial dans l'analyse des sections en RDM. Il représente le point moyen où toute la surface de la section peut être considérée comme étant concentrée. En pratique, il est essentiel pour déterminer le comportement d'une structure sous l'effet des efforts de flexion.

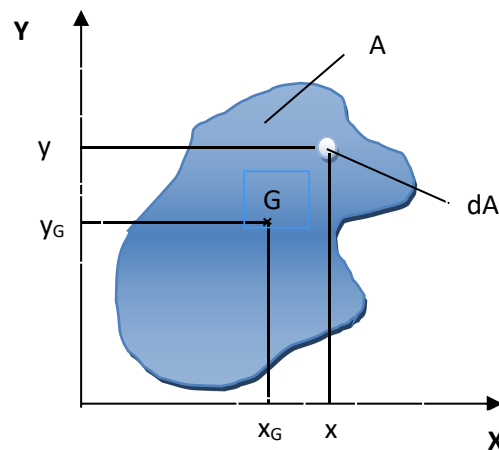


Figure 2.1 . Schéma de centre de gravité d'une section A de forme quelconque.

Les coordonnées du centre de gravité d'une section homogène sont calculées comme suit :

$$X_G = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

$$Y_G = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

x et y sont les coordonnées de l'aire élémentaire dA .

Le calcul du centre de gravité permet de déterminer le moment d'inertie par rapport à ce point, ce qui est crucial pour l'analyse de la flexion et de la déformation d'une structure.

Dans le cas d'une section symétrique, comme un rectangle ou un cercle, le centre de gravité se trouve sur l'axe de symétrie, ce qui simplifie les calculs.

Application 1 :

Pour une section rectangulaire de largeur b , et de longueur h le centre de gravité est déterminé comme suit :

Sachant que :

L'aire de surface de rectangle est égale à $A=b.h$, et la surface élémentaire dA est représenté par $dA= dx.dy$

$$X_G = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{1}{b.h} \int_0^b x dx \cdot \int_0^h dy = \frac{b}{2}$$

Et de la même manière on aura :

$$Y_G = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{h}{2}$$

Ces intégrales peuvent être évalué analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expression mathématiques simples (exemples les formes géométriques simple comme :

rectangles, carré, triangle... etc), par contre, si le contour est une courbe irrégulière, on procède dans ce cas par les méthodes numériques.

La méthode la plus simple consiste à discuter la section en élément de surface A_i et faire la sommation comme suit :

$$X_G = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

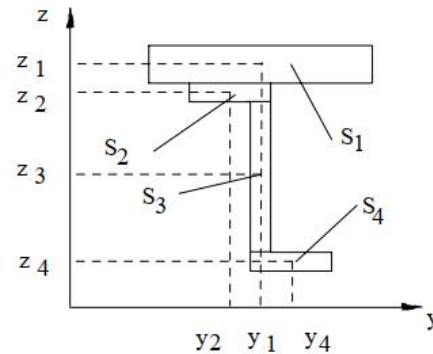


Figure 2.2 . Centre de gravité d'une section A composé de plusieurs section simple A_i .

2.3. Moment d'inertie I_x et I_y

Le moment d'inertie, aussi appelé moment d'inertie géométrique ou moment quadratique, est une caractéristique fondamentale qui permet de quantifier la résistance d'une section à la flexion. Il mesure la distribution de la surface autour d'un axe donné, généralement l'axe horizontal passant par le centre de gravité. Plus le moment d'inertie est grand, plus la section est résistante aux déformations de flexion.

Pour une section rectangulaire, par exemple, le moment d'inertie I_x par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité est donné par :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Où b est la base et h la hauteur de la section.

Le moment d'inertie quadratique est l'intégrale des produits des carrés des distances à partir de l'axe considéré par les aires élémentaires, ainsi le moment d'inertie d'une surface A quelconque par rapport aux axes **OX** et **OY** sont les suivants :

$$I_X = \iint_A y^2 dA$$

$$I_Y = \iint_A x^2 dA$$

Le moment d'inertie joue un rôle central dans la formule de flexion des poutres :

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

Où σ est la contrainte de flexion, M le moment fléchissant, et y la distance au centre de gravité.

2.4 Moment statique d'une section droite S_x, S_y

On appelle le moment statique de l'aire A par rapport aux axes OX et OY les quantités :

$$S_y = \iint_s z ds$$

$$S_z = \iint_s y ds$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égale au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré, les équations précédentes deviennent :

$$S_y = S \cdot Z_G$$

$$S_z = S \cdot Y_G$$

Pour les surfaces complexes composé de n surfaces simples, les moments statiques par rapport aux axes OX et OY sont égale à, respectivement :

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_i \cdot Z_i$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n S_i \cdot Y_i$$

Les moments statiques d'une surface A par rapport aux axes qui passent par son centre de gravité sont nuls.

2.5. Moment d'inertie polaire

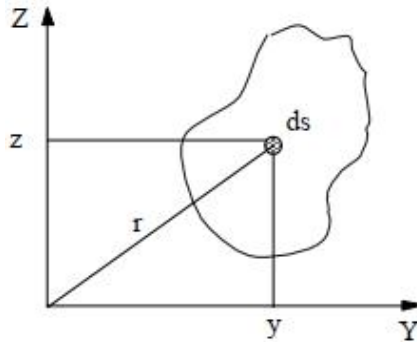


Figure 2.3 . Moment d'inertie polaire d'une surface quelconque

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle. Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_P = \iint_S r^2 ds = \iint_S (z^2 + y^2) ds = I_Z + I_Y$$

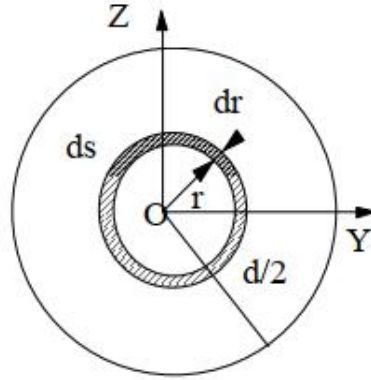


Figure 2.4 . Moment d'inertie polaire d'un disque

De l'équation (2-10), il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.

$$I_0 = \iint_s r^2 ds$$

$$I_0 = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}$$

2.6 Produit d'inertie (Moment d'inertie centrifuge)

Le produit d'inertie d'une section droite A, est l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires dA par leurs distances x, y comptées à partir des axes OX et OY selon la formule suivante:

$$I_{YZ} = \iint_s yz ds$$

2.7. Module de résistance (S)

Le module de résistance S est un paramètre géométrique qui permet de mesurer la capacité d'une section à résister à un moment de flexion. Il est défini comme le rapport du moment d'inertie I de la section par la distance maximale y_{max} entre l'axe neutre (ou le centre de gravité) et la fibre la plus éloignée de la section.

$$S = \frac{I}{y_{max}}$$

Le module de résistance est utilisé pour dimensionner une section afin qu'elle résiste aux moments de flexion sans dépasser les contraintes admissibles. Il est particulièrement important pour les calculs de sécurité dans les structures soumis à des moments importants.

2.8. Rayon de giration (r)

Le rayon de giration est une caractéristique géométrique qui indique l'efficacité de la distribution de l'aire autour du centre de gravité. Plus la section est compacte, plus le rayon de giration est faible, ce qui améliore la résistance de la section aux efforts de flexion.

Le rayon de giration est défini par la relation suivante :

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Le rayon de giration est un indicateur de la manière dont la matière est répartie dans la section : une section avec un rayon de giration élevé a une forme moins efficace pour résister à la flexion.

2.9. Autres caractéristiques géométriques

En fonction de la complexité de la section, d'autres moments d'inertie et caractéristiques géométriques peuvent être utilisés pour affiner les calculs de résistance. Par exemple, pour des sections non symétriques, des moments d'inertie supplémentaires peuvent être calculés par rapport à des axes autres que celui passant par le centre de gravité. Les **moments d'inertie secondaires** (ou moments quadratiques supplémentaires) sont calculés pour ces cas afin de mieux comprendre la distribution des contraintes.

De plus, pour certaines formes complexes de sections, des outils comme le théorème de Huygens-Steiner sont utilisés pour déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au centre de gravité.

2.10. Formule de transformation des moment d'inertie

Les moments d'inertie d'une section varient selon la disposition des axes par rapport auxquels ces moments sont calculés. Deux types de transformation seront étudiées : translation et rotation d'axes. La variation des moment d'inertie par rapport à un système d'axes quelconques, est déterminé à l'aide d'une combinaison de deux transformations partant d'un système d'axe central.

2.10.1 Translation d'axes :

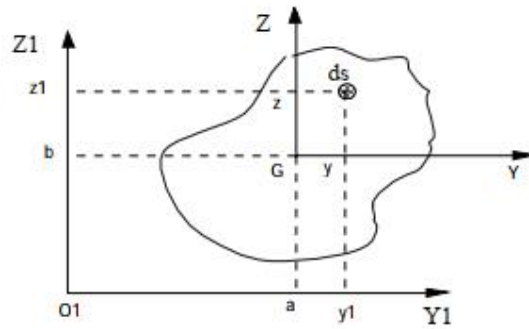


Figure 2.5 . Formule de moment d'inertie en translation d'axes

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes Y_1, Z_1 parallèles à des axes centraux Y, Z dont les moments sont supposés connus.

$$I_Z = \iint_s y^2 ds, I_Y = \iint_s z^2 ds, I_{ZY} = \iint_s y z ds$$

Les moments par rapport à Y_1, Z_1

$$I_{Z1} = \iint_s y_1^2 ds, I_{Y1} = \iint_s z_1^2 ds, I_{Z1Y1} = \iint_s y_1 z_1 ds$$

La translation des axes est exprimée par :

$$y_1 = y + a, z_1 = z + b$$

$$I_{z1} = I_z + a^2 S$$

On aurait de même :

$$I_{y1} = I_y + b^2 S$$

$$I_{y1z1} = I_{yz} + abS$$

D'où le théorème d'Huygens :

- 1- Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes.
- 2- Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système orthogonal est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.

2.10.2 Rotation d'axes :

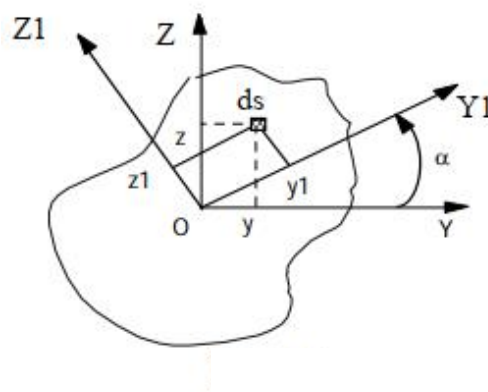


Figure 2.6 . Formule de moment d'inertie en rotation d'axes

Les moments et produit d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OYZ. Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OY₁Z₁ obtenu par une rotation α des axes initiaux donnés par :

$$I_{y1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y1z1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

En ajoutant les équations précédentes terme à terme, on obtient :

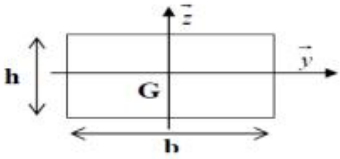
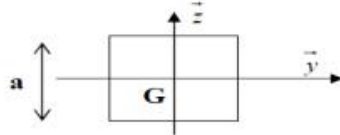
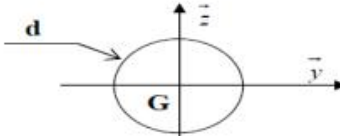
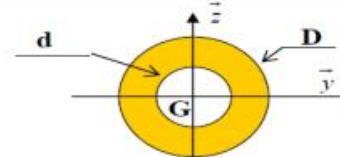
$$I_y + I_z = I_{y1} + I_{z1}$$

Donc : $I_P = I_{P1}$

2.11 Caractéristiques géométriques des sections usuelles

Les caractéristiques géométriques des sections usuelles sont données dans le tableau suivant :

Tableau 2.1 . caractéristiques géométriques des sections usuelles

	I_{Gyy}	I_{Gzz}	$I_G = I_{Gyy} + I_{Gzz}$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{hb}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

2.12 Moment d'inertie principaux :

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation α . Les valeurs maximales et minimales sont particulièrement recherchées. Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge $I_{yz}=0$

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales si l'on y pose $\alpha = \alpha_0$.

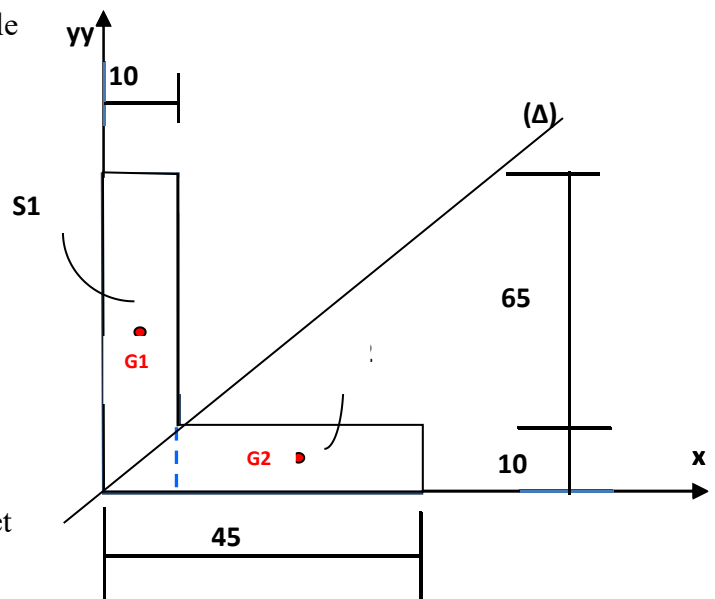
$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

2.13. EXERCICE D'APPLICATION

On considère la section en L de la figure suivante, toutes les dimensions sont en **mm**.

- 1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section dans le repère (O, X, Y) ;
- 2) Calculer les moments d'inertie axiaux de la figure par rapport au repère (O, X, Y) ;
- 3) Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ , I_Δ ;
- 4) Déduire les moments d'inertie de cette figure par rapport aux axes passant par le centre de gravité X_G et Y_G ;
- 5) Déterminer la position des axes principaux X et Y ;
- 6) Calculer les moments d'inerties principaux $I_{\max}$ et $I_{\min}$



Solution

- 1) Les coordonnées du centre de gravité :

$$\begin{cases} X_G = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} \\ Y_G = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} \end{cases}$$

$$\sum A_i = A_1 + A_2 = 10 \times 35 + 10 \times 75$$

$$\sum A_i = 1100 \text{ mm}^2$$

$$\sum A_i X_i = A_1 X_1 + A_2 X_2 = 350 \times (27,5) + 750 \times (5)$$

$$\sum A_i X_i = 13375 \text{ mm}^3$$

$$\sum A_i Y_i = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 350 \times (5) + 750 \times (37,5)$$

$$\sum A_i Y_i = 29875 \text{ mm}^3$$

$$\begin{cases} X_G = 12,16 \text{ mm} \\ Y_G = 27,15 \text{ mm} \end{cases}$$

2) Calcul des moments d'inertie

$$I_x = \frac{10 (75)^3}{12} + 10 \times 75 (37,5)^2 + \frac{35 (10)^3}{12} + 35 \times 10 (5)^2 = 1\,417\,916,66 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{75 (10)^3}{12} + 10 \times 75 (5)^2 + \frac{10 (35)^3}{12} + 35 \times 10 (10 + 17,5)^2 = 325\,416,66 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = A_1 X_1 Y_1 + A_2 X_2 Y_2 = (35 \times 10) (27,5)(5) + (75 \times 10)(37,5)(5) = 188\,750 \text{ mm}^4$$

3) Calcul des moments d'inertie par rapport à l'axe (Δ)

$$I_{x(\Delta)} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = 682\,916,66 \text{ mm}^4$$

$$I_{y(\Delta)} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha = 1\,060\,416,66 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy(\Delta)} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 546\,250 \text{ mm}^4$$

4) Le moment d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité

$$\begin{aligned} I_{xG} &= \frac{10 (75)^3}{12} + 10 \times 75 (37,5 - 27,15)^2 + \frac{35 (10)^3}{12} + 35 \times 10 (27,15 - 5)^2 \\ &= 606\,538,91 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{yG} = \frac{75 (10)^3}{12} + 10 \times 75 (12,16 - 5)^2 + \frac{10 (35)^3}{12} + 35 \times 10 (27,5 - 12,16)^2$$

$$= 162\,788,826 \text{ mm}^4$$

5) La position des axes principaux

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 I_{xGyG}}{I_{yG} - I_{xG}}$$

$$I_{xGyG} = \int_A xy \, dA = A_1 x_{G1} y_{G1} + A_2 x_{G2} y_{G2}$$

$$I_{xGyG} = (35 \times 10) \left(\frac{35}{2} + 10 - 12,16 \right) (27,15 - 5) + (75 \times 10) (12,16 - 5) \left(\frac{75}{2} - 27,15 \right)$$

$$I_{xGyG} = 174\,502,85 \text{ mm}^4$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 I_{xGyG}}{I_{yG} - I_{xG}} = \frac{2(174\,502,85)}{162\,788,826 - 606\,538,91} = -0,786$$

$$\theta = -19,08^\circ$$

6) Calcul des moment d'inertie principaux

$$I_{max} = \frac{I_{xG} + I_{yG}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xG} - I_{yG}}{2} \right)^2 + (I_{xGyG})^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_{xG} + I_{yG}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xG} - I_{yG}}{2} \right)^2 + (I_{xGyG})^2}$$

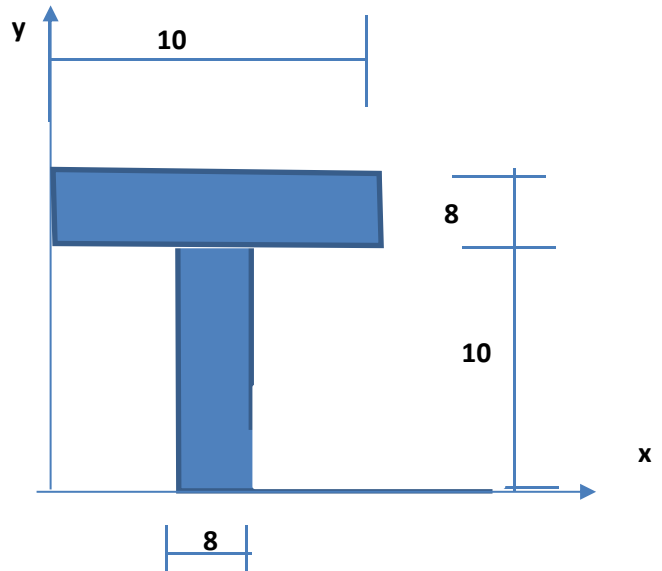
$$I_{max} = 606\,938,93 \text{ mm}^4$$

$$I_{min} = 102\,387,826 \text{ mm}^4$$

EXERCICE SUPPLIMENTAIRE

On considère la section en T de la figure suivante, toutes les dimensions sont en **cm**.

- 7) Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section dans le repère (O, X, Y) ;
- 8) Calculer les moments d'inertie axiaux de la figure par rapport au repère (O, X, Y) ;
- 9) Déduire les moments d'inertie de cette figure par rapport aux axes passant par le centre de gravité X_G et Y_G ;
- 10) Déterminer la position des axes principaux X et Y ;
- 11) Calculer les moments d'inerties principaux $I_{\max}$ et $I_{\min}$
- 12) Déterminer le moment polaire I_p



Conclusion

Les caractéristiques géométriques des sections planes sont des éléments clés dans l'analyse des structures en RDM. Elles permettent de déterminer les comportements sous efforts de flexion, de traction, de compression et de torsion. Une bonne maîtrise de ces caractéristiques est essentielle pour garantir la sécurité et la performance des structures.

Les concepts abordés, tels que l'aire, le centre de gravité, le moment d'inertie, le module de résistance, et le rayon de giration, sont au cœur des calculs en résistance des matériaux. En outre, la prise en compte des propriétés géométriques des sections non seulement facilite la conception des structures, mais assure aussi leur stabilité et leur durabilité face aux charges auxquelles elles sont soumises.

Travaux Dirigés Corrigés – Chapitre II : Caractéristiques géométriques des sections

Exercice 1 –

Une section rectangulaire en béton armé possède les dimensions suivantes :

- Largeur $b = 200 \text{ mm}$
- Hauteur $h = 400 \text{ mm}$

On demande de déterminer :

1. L'aire de la section.
2. Les coordonnées du centre de gravité G.
3. Les moments d'inertie I_x et I_y par rapport aux axes passant par le centre de gravité.
4. Indiquer quel axe est le plus résistant à la flexion et justifier.

Solution détaillée

1) Calcul de l'aire

$$A = b \times h = 200 \times 400 = 80\,000 \text{ mm}^2$$

2) Centre de gravité

$$x_G = b/2 = 100 \text{ mm}$$

$$y_G = h/2 = 200 \text{ mm}$$

3) Moments d'inertie

$$I_x = (b \cdot h^3)/12 = (200 \times 400^3)/12 = 1,067 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_y = (h \cdot b^3)/12 = (400 \times 200^3)/12 = 2,667 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

4) Comparaison

$$I_x > I_y$$

La section est donc beaucoup plus rigide en flexion autour de l'axe x.

Interprétation

Le moment d'inertie caractérise la résistance d'une section à la flexion. Plus le moment d'inertie est élevé, plus la section est rigide vis-à-vis de la flexion autour de l'axe considéré. Dans ce cas, la hauteur importante de la section augmente fortement I_x , car le moment d'inertie dépend du cube de la hauteur.

Réponses finales

Grandeur

Valeur

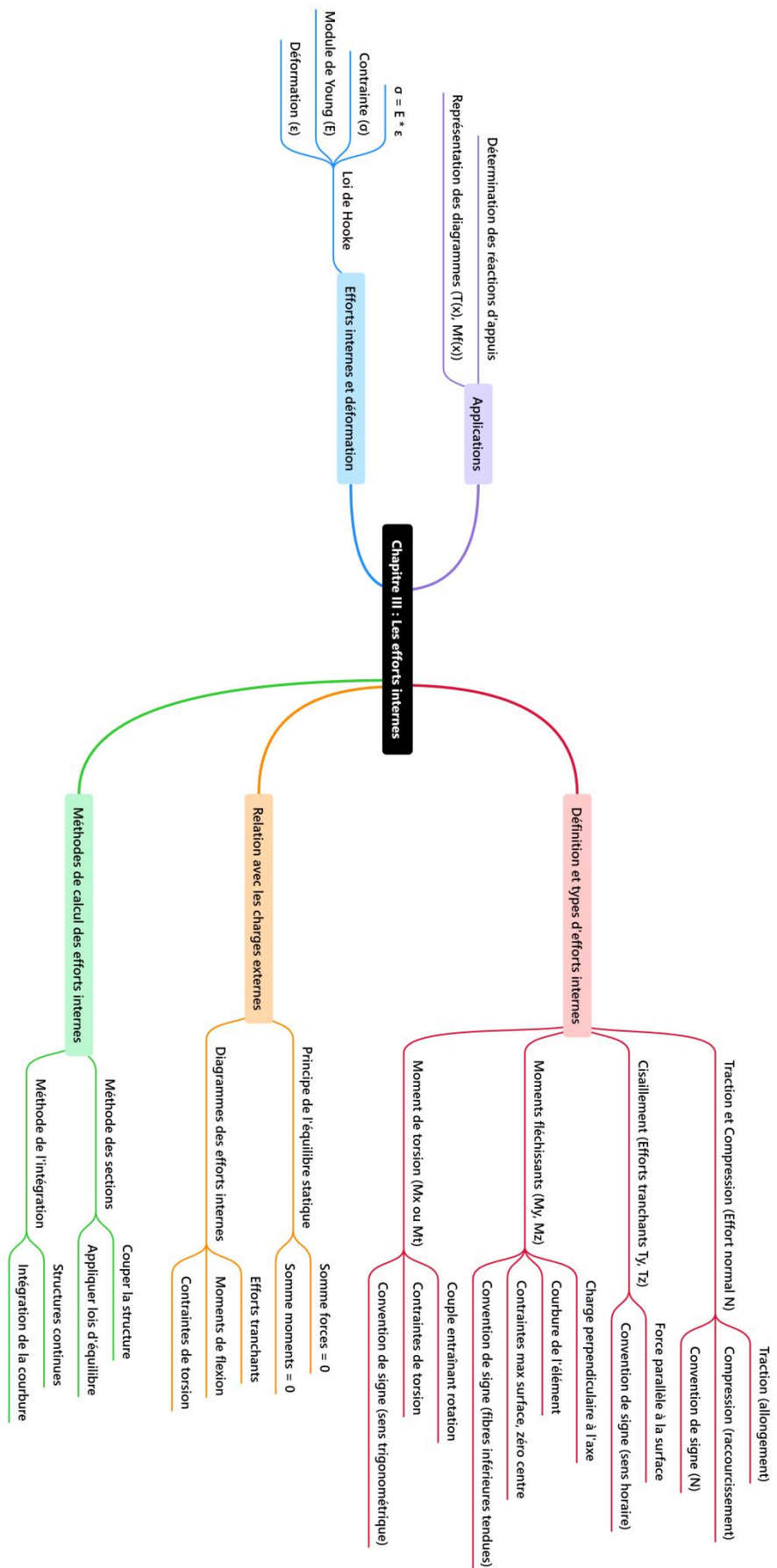
A	80 000 mm ²
xG	100 mm
yG	200 mm
I _x	$1,067 \times 10^9 \text{ mm}^4$
I _y	$2,667 \times 10^8 \text{ mm}^4$
Axe le plus résistant	Axe x

À retenir

- L'aire caractérise la quantité de matière.
- Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des surfaces.
- Le moment d'inertie dépend fortement de la géométrie de la section.
- Plus la hauteur est importante, plus la résistance à la flexion augmente.

Chapitre III

Les efforts internes



Carte mentale de la structure du chapitre III
Les efforts internes

Introduction

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent-être réparties avec une densité donnée de surface ou de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis.

L'un des concepts fondamentaux dans le domaine de résistance des matériaux est l'étude des efforts internes, qui sont les forces ou moments développés à l'intérieur d'un matériau en réponse à des charges externes. Ces efforts sont importants pour déterminer si une structure peut résister aux sollicitations externes sans se déformer excessivement ou échouer.

Les efforts internes peuvent être classés selon leur nature : traction, compression, flexion et torsion. Chaque type d'effort interne génère des contraintes spécifiques dans le matériau, et ces contraintes peuvent être analysées à l'aide de diverses méthodes théoriques. Ce chapitre détaillera les différents types d'efforts internes, leur relation avec les charges externes, les méthodes de calcul et leur influence sur la déformation des structures.

1. Définition et types d'efforts internes

Les efforts internes désignent les forces générées au sein d'un matériau (élément) en équilibre lorsqu'il est soumis à des charges externes. Ces efforts se manifestent sous forme de contraintes dans les matériaux, créant des déformations et parfois des ruptures, selon l'intensité des forces appliquées et la résistance du matériau.

Afin de faciliter l'étude des forces exercés sur chaque particule du matériau (effort interne), on considère une section transversale d'une poutre sur deux appuis soumis à des sollicitations (Fig.3.1). Les efforts internes générées répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force $F (N, T_z, T_y)$ et le vecteur moment $M (M_x, M_y, M_z)$ résultant des forces intérieures dans la section.

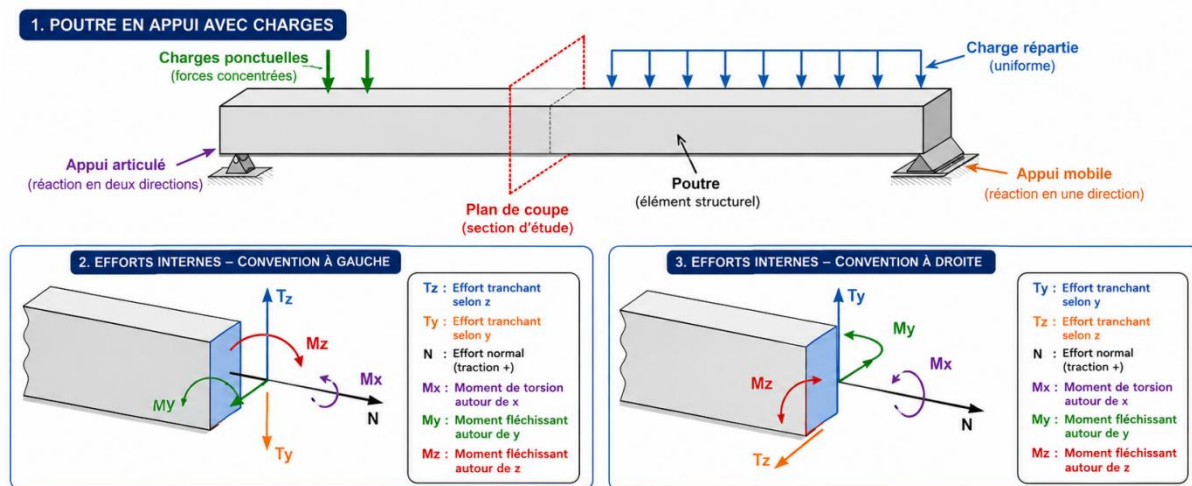


Fig. 3.1. Sollicitation dans une section transversale d'une poutre sur deux appuis

1.1 Efforts de traction et de compression (Effort normal N)

Les efforts de traction et de compression sont associés à des forces qui agissent le long de l'axe longitudinale d'un élément structurel, tel qu'une barre ou une poutre. Ces efforts sont responsables des déformations axiales, c'est-à-dire des changements de longueur de l'élément sous l'effet des charges externes.

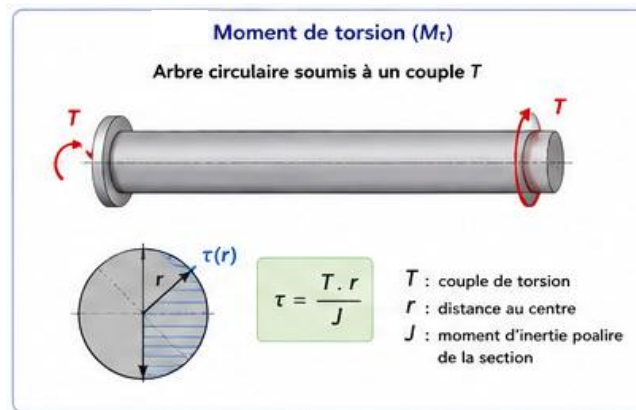
La résultante des forces F (La somme des projections de toutes les forces intérieures) agissant selon la normale (le perpendiculaire) de la section représente N de l'**Effort Normal Interne**.

Traction : Lorsqu'une force est appliquée pour allonger un corps, l'effort interne généré est une force de traction. Cela entraîne une augmentation de la longueur du corps. La contrainte de traction σ_t est donnée par :

$$\sigma_t = \frac{F}{A}$$

Où :

F est la force appliquée et A la surface de la section transversale de l'élément.

Fig. 3.2. Moment de torsion (M_r)

Compression : Lorsqu'une force est appliquée pour raccourcir un corps, l'effort interne généré est une force de compression. Cela entraîne une réduction de la longueur du corps. La contrainte de compression σ_c est également donnée par la relation :

$$\sigma_c = \frac{F}{A}$$

Cependant,

- La compression a un effet inverse par rapport à la traction, car elle entraîne une réduction de la longueur initiale de l'élément.
- Les efforts de traction et de compression peuvent entraîner des déformations, et si ces efforts dépassent la résistance du matériau, des ruptures ou des instabilités peuvent se produire, comme la flambée pour les éléments minces soumis à la compression.
- L'effort normal N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

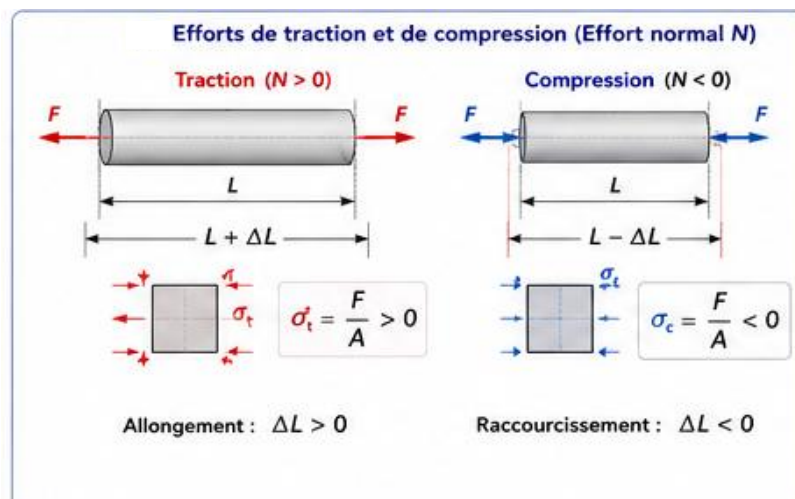


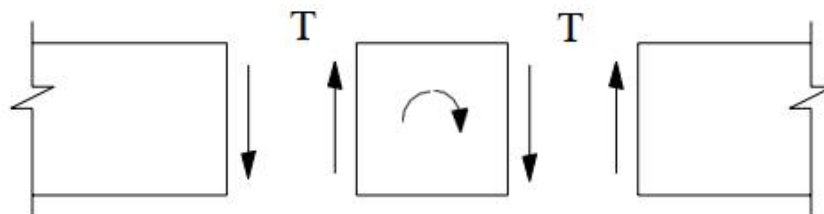
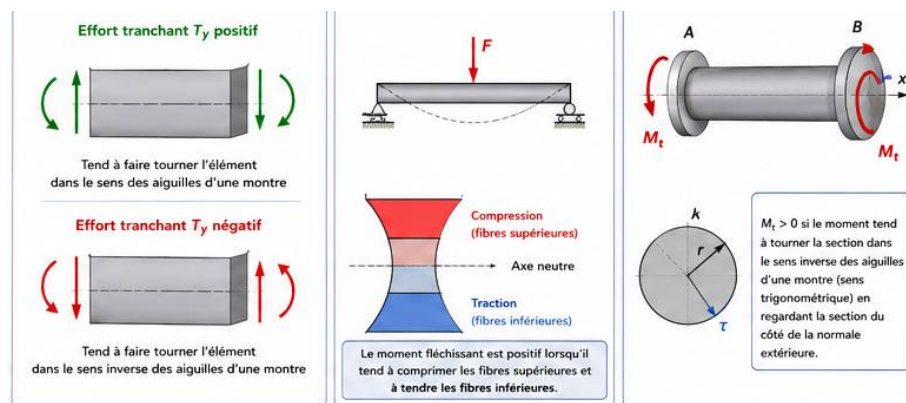
Fig. 3.3. Efforts de traction et de compression (Effort normal N)**1.2 Efforts de cisaillement (Efforts tranchants)**

Les efforts de cisaillement nommé souvent efforts tranchants T_y et T_z surviennent lorsqu'une force est appliquée parallèlement à la surface d'une section transversale d'un élément de la structure, générant des cisaillements des bords de la section dans le matériau. Ces efforts sont courants dans les poutres soumises à des forces transversales. La contrainte de cisaillement peut être calculée à partir de :

$$\tau = \frac{T}{A}$$

Où T est la force de cisaillement et A la surface transversale.

Concernant la convention de signe de l'effort tranchant T , cette dernière est considérée positif quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la fig. 3.4

**Fig. 3.4.** Convention de signe des efforts tranchants

1.3 Moments fléchissants

Les moments de flexion se produisent lorsqu'une charge est appliquée perpendiculairement à l'axe longitudinal d'une poutre ou d'un autre élément structurel. Ces efforts génèrent une courbure de l'élément, entraînant une déformation qui est fonction de l'intensité de la charge, de la géométrie de la poutre et des conditions de soutien.

Les composants M_y et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette Y et Z respectivement.

Lorsqu'un élément est soumis à une charge transversale, des contraintes de flexion se développent. Ces contraintes sont maximales à la surface extérieure de la poutre et sont égales à zéro au centre de la poutre (c'est-à-dire à l'axe neutre). La distribution des contraintes de flexion suit une relation quadratique par rapport à la distance de l'axe neutre.

Le moment de flexion M en un point est défini par la relation :

$$M = F \times d$$

Où F est la force appliquée et d la distance perpendiculaire entre la ligne d'action de la force et l'axe neutre.

Les efforts de flexion génèrent également des déformations angulaires, et le calcul de la flèche ou de la déflexion maximale est important pour évaluer les performances de la structure.

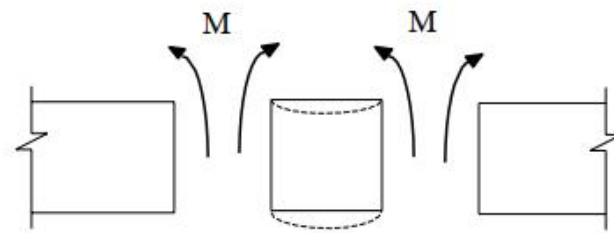
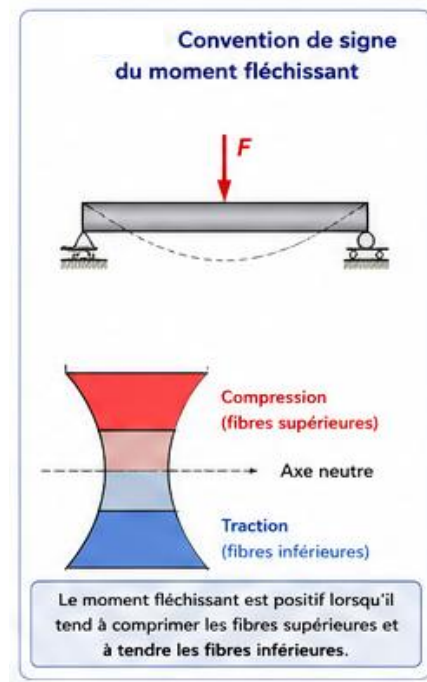


Fig. 3. 5. Convention de signe du moment fléchissant

La convention de signe du moment fléchissant considère le sens positif les moments qui tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

1.4 Moment de torsion

La torsion se produit lorsqu'un couple est appliqué à un élément, tel qu'un arbre de transmission ou une tige cylindrique, provoquant une rotation de l'élément autour de son axe longitudinal. La torsion engendre des contraintes de torsion uniformément réparties à travers les sections transversales de l'élément.

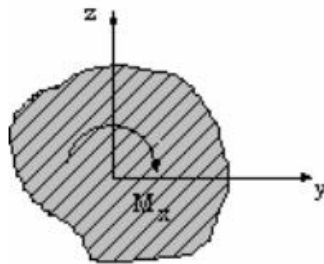
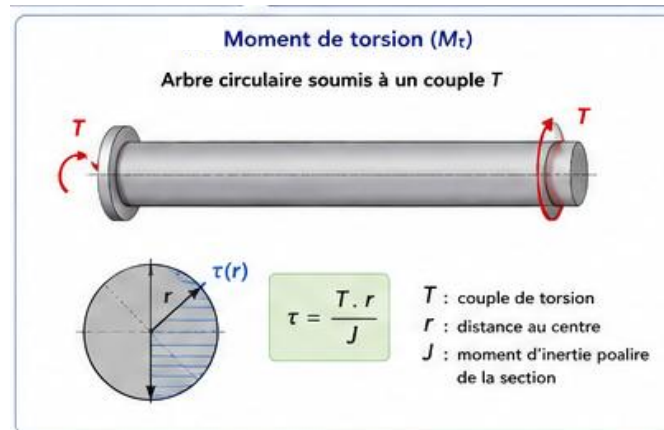


Fig. 3.6. Convention de signe en cas de la torsion

Les moments de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe longitudinale de la barre X. Les moments de torsion induisent des déformations de rotation angulaire qui sont directement proportionnelles à l'intensité du couple appliqué. Les contraintes de torsion τ peuvent être calculées à partir de la formule :

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}$$

Où T est le couple de force appliqué, r est la distance au centre de la section, et J est le moment d'inertie polaire de la section transversale.

Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.

2. Relation entre les efforts internes et les charges externes

Les efforts internes ne sont pas indépendants des charges externes appliquées à une structure. Ils dépendent de plusieurs facteurs, dont la nature des charges, la géométrie de l'élément, et les conditions de soutien.

2.1 Principe de l'équilibre statique

Dans le cadre de la mécanique des solides, l'un des principes fondamentaux est l'équilibre statique, qui stipule que pour qu'une structure soit stable sous l'effet des charges externes, la somme des forces et la somme des moments doivent être égales à zéro :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{et} \quad \sum \vec{M} = 0$$

Les **efforts internes** sont directement liés à ces équilibres. Chaque type de charge génère une distribution spécifique d'efforts internes dans la structure. Par exemple, une charge de traction sur une barre génère un effort interne de traction uniforme sur toute la longueur de la barre, tandis qu'une charge transversale sur une poutre génère un moment de flexion qui varie le long de la longueur de la poutre.

2.2 Diagrammes des efforts internes

Les diagrammes des efforts internes sont des outils visuels puissants pour analyser les contraintes dans les structures. Ces diagrammes montrent l'évolution des efforts internes le long de la structure en fonction de la position des charges appliquées.

- **Diagramme des efforts tranchants (cisaillement)** : Il permet de visualiser la variation des efforts de cisaillement dans une poutre soumise à des charges transversales.
- **Diagramme des moments de flexion** : Il représente l'évolution du moment de flexion tout au long de la longueur de la poutre.
- **Diagramme des contraintes de torsion** : Il illustre la variation des contraintes de torsion dans un élément soumis à un couple.

3. Méthodes de calcul des efforts internes

3.1 Méthode des sections

La méthode des sections consiste à couper une structure en plusieurs segments et à appliquer les lois de l'équilibre statique pour chaque segment. En considérant un élément coupé, on peut calculer les efforts internes à l'aide des équations d'équilibre :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

Cela permet de déterminer les efforts internes à chaque section et ainsi d'évaluer les contraintes générées dans la structure.

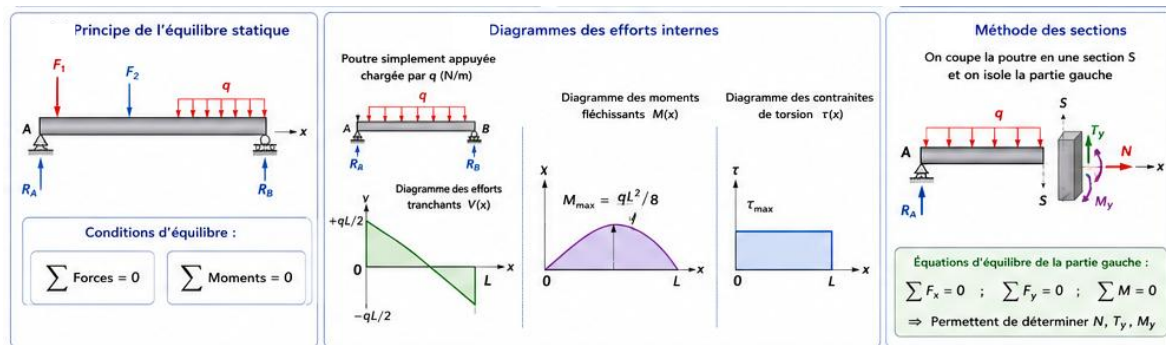


Fig. 3.7. Les étapes de la méthode des section

3.2 Méthode de l'intégration

La méthode de l'intégration est utilisée pour des structures continues où la distribution des efforts internes n'est pas simple. Par exemple, pour une poutre soumise à une charge transversale, l'intégration de la courbure permet de calculer les contraintes internes à chaque point.

4. Efforts internes et déformation

Les efforts internes sont directement liés à la déformation de la structure, selon la loi de Hooke pour les matériaux élastiques. Voir la figure suivante courbe contrainte-déformation.

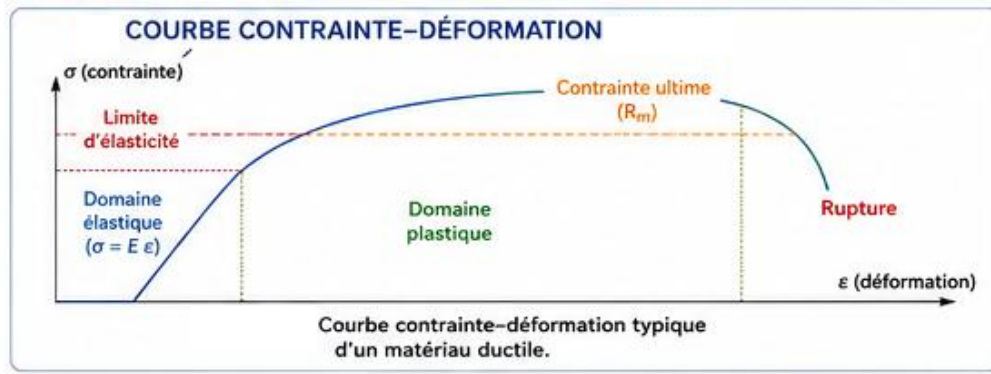


Fig. 3.8. Courbe contrainte déformation

La relation entre contrainte et déformation est donnée par :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Où :

- σ est la contrainte (force interne par unité de surface),
- E est le module de Young (propriété du matériau),
- ε est la déformation (variation relative de la longueur).

5. APPLICATIONS

On considère la poutre ABC de la figure 3.9, posée respectivement sur l'appui simple (C) et à l'appui double en (B).

- 1- Calculer les réactions R_B et R_C aux appuis (B) et (C)
- 2- Représenter le diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ et du moment de flexion $M_f(x)$.

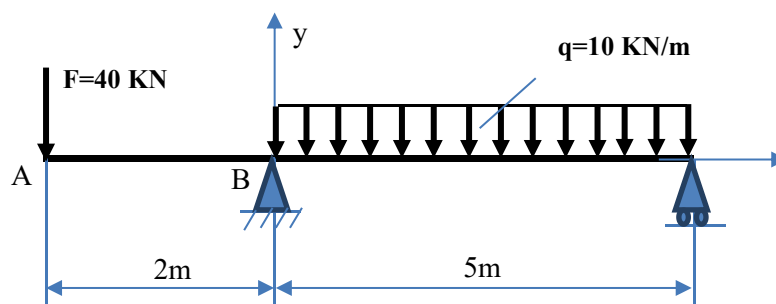
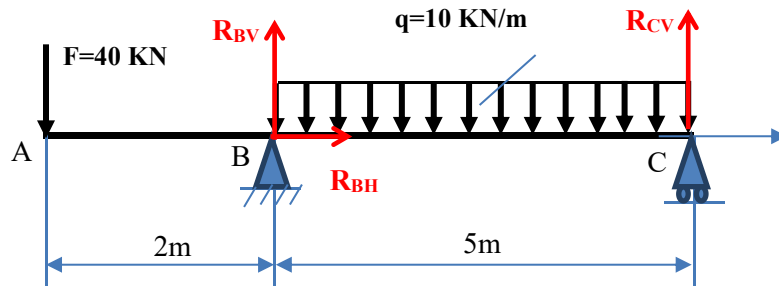


Figure 3.9. Poutre ABC sous sollicitation de flexion

Solution



1) Détermination des réactions d'appuis

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow R_{BH} = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F + q \cdot 5 - R_{BV} - R_{AV} = 0$$

$$R_{BV} + R_{AV} = 40 + 10 \times 5$$

$$R_{BV} + R_{AV} = 90 \quad (I)$$

$$\sum \vec{M}_{/B} = \vec{0} \Rightarrow F(2) - q(5)(2.5) + R_{CV}(5) = 0$$

$$R_{CV} = \frac{-40(2) + 10(5)(2.5)}{5}$$

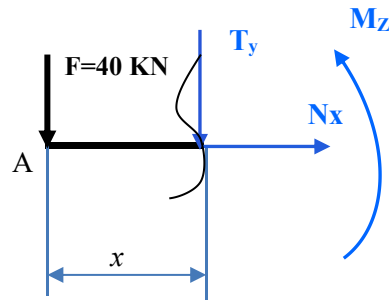
$$R_{CV} = +9 \text{ kN} \quad (II)$$

$$(II) \text{ dans } (I) : R_{BV} = -81 \text{ kN}$$

Nous pouvons faire la vérification à l'aide de : $\sum \vec{M}_{/C} = \vec{0}$

2) Détermination des efforts tranchants T_y et des moments de flexion M_f :

Tronçons (I) : $0 \leq x \leq 2\text{m}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

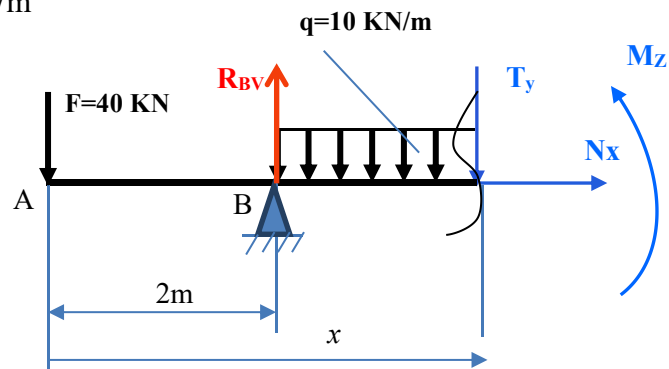
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y + F = 0$$

$$T_y = -F \Rightarrow T_y = -40 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/i} = 0 \Rightarrow M_z + F \cdot x = 0$$

$$M_z = -40 \cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \text{ m} \\ x = 2 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} M_z = 0 \text{ kN.m} \\ M_z = -80 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Tronçons (II) : $2 \leq x \leq 7\text{m}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y + F - R_{BV} + q(x - 2) = 0$$

$$T_y = -10x + 61 \quad \begin{cases} x = 2 \text{ m} \\ x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} T_y = 41 \text{ kN} \\ T_y = -9 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M_{/i} = \vec{0} \Rightarrow M_z + F \cdot x - R_{BV}(x - 2) + q(x - 2) \frac{(x - 2)}{2} = 0$$

$$M_z = -40x + 81(x-2) - 10 \frac{(x-2)^2}{2} = 0$$

$$M_z = -5x^2 + 61x - 182 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \text{ m} \\ x = 7 \text{ m} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} M_z = -80 \text{ KN.m} \\ M_z = 0 \text{ KN.m} \end{array} \right\}$$

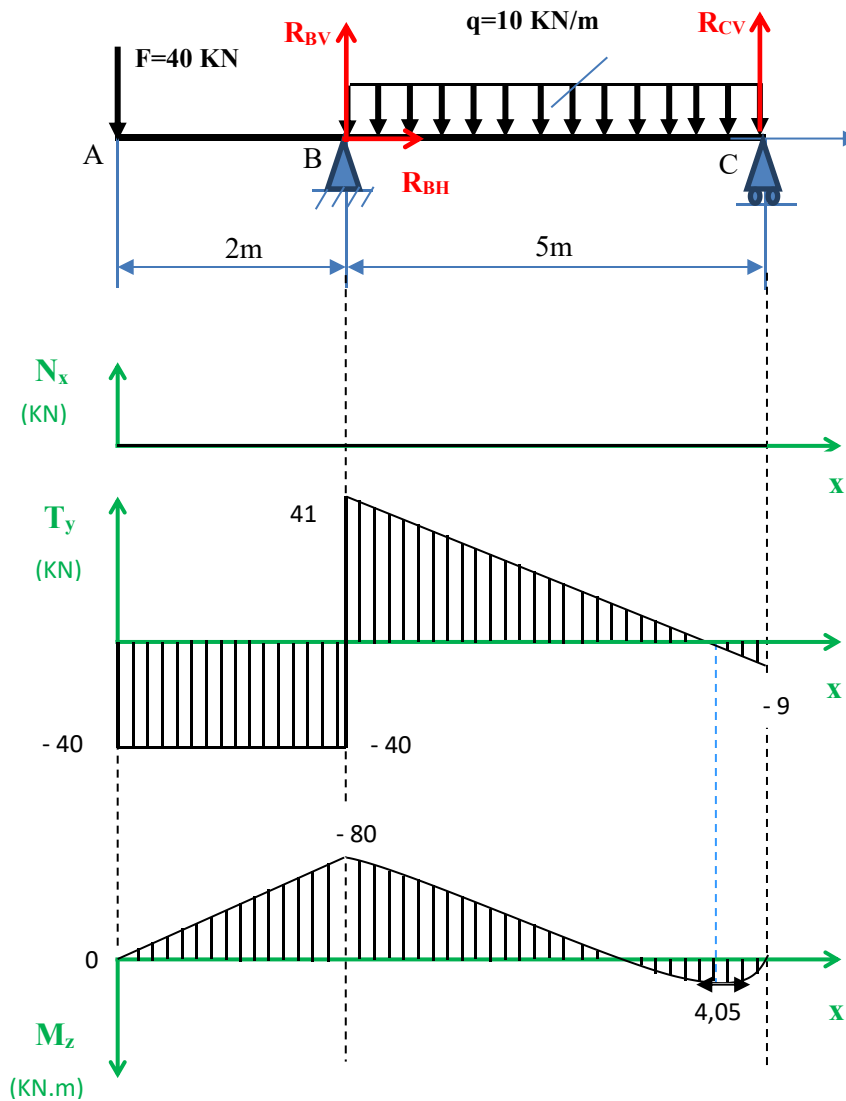


Fig. 3.10. Diagrammes des efforts internes

Remarque :

On peut commencer les sections de droite à gauche pour vérifier les résultats des efforts internes de dernier tronçon (le tronçon à droite).

EXERCICES SUPPLIMENTAIRES

EXERCICE 1

On considère la poutre ABC de la figure (3.11), posée respectivement sur l'appui simple (C) et à l'appui double en (B).

- 3- Calculer les réactions R_B et R_C aux appuis (B) et (C)
- 4- Représenter le diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ et du moment de flexion $M_f(x)$.

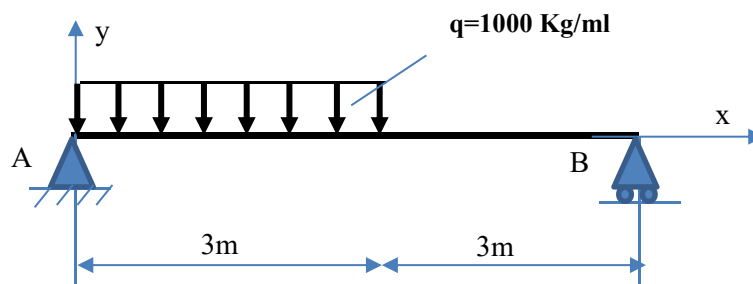


Figure 3.11

EXERCICE 2

On considère la poutre ABC de la figure (3.12), posée respectivement sur l'appui simple (C) et à l'appui double en (B).

- 5- Calculer les réactions R_B et R_C aux appuis (B) et (C) respectivement;
- 6- Déterminer les valeurs des moments flechissants et des efforts tranchants dans chaque section.
- 7- Représenter le diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ et du moment de flexion $M_f(x)$ de la poutre .
- 8- Déterminer les sections dangereuses.
- 9- Que déduit-on de ces résultats?.

Sachant que :

$[\sigma^+] = 170 \text{ N/mm}^2$ $[\sigma^-] = 180 \text{ N/mm}^2$
--

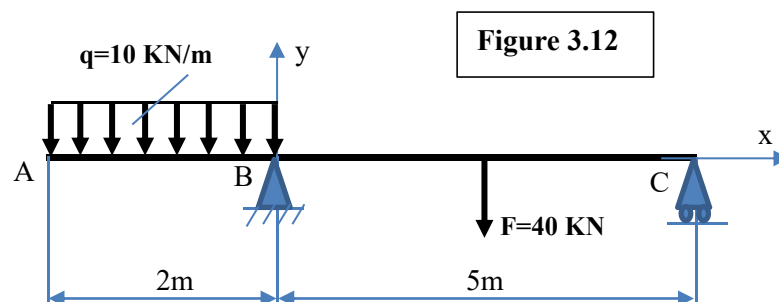


Figure 3.12

Conclusion

Les efforts internes sont des éléments essentiels de l'analyse de la résistance des matériaux. Ils sont déterminés par les charges externes et sont responsables des déformations des structures. Une analyse rigoureuse des efforts internes permet de concevoir des structures sûres et efficaces, en optimisant la résistance des matériaux et en prévenant les défaillances.

Travaux Dirigés Corrigés – Chapitre III : Les efforts internes

Exercice 1 –

Une poutre simplement appuyée AB de longueur $L = 6$ m est soumise à une charge ponctuelle $P = 24$ kN appliquée au milieu de la portée.

On demande de :

1. Déterminer les réactions d'appui.
2. Établir les expressions de l'effort tranchant $T(x)$.
3. Établir les expressions du moment fléchissant $M(x)$.
4. Tracer les diagrammes de $T(x)$ et $M(x)$.
5. Déterminer le moment fléchissant maximal.

Solution détaillée

1) Calcul des réactions d'appui

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - 24 = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_B \times 6 - 24 \times 3 = 0$$

$$R_B = 12 \text{ kN}$$

$$R_A = 12 \text{ kN}$$

2) Effort tranchant

Tronçon 1 : $0 \leq x < 3$ m

$$T(x) = +12 \text{ kN}$$

Tronçon 2 : $3 \leq x \leq 6$ m

$$T(x) = -12 \text{ kN}$$

3) Moment fléchissant

$$0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$M(x) = 12x \text{ (kN}\cdot\text{m)}$$

$$3 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$M(x) = 12(6-x) \text{ (kN}\cdot\text{m)}$$

4) Diagrammes

- Le diagramme de l'effort tranchant est constitué de deux segments constants : +12 kN puis -12 kN.
- Le diagramme du moment fléchissant est triangulaire avec une valeur maximale au milieu de la poutre.

5) Moment maximal

$$M_{\max} = P \times L / 4$$

$$M_{\max} = 24 \times 6 / 4 = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Résultats

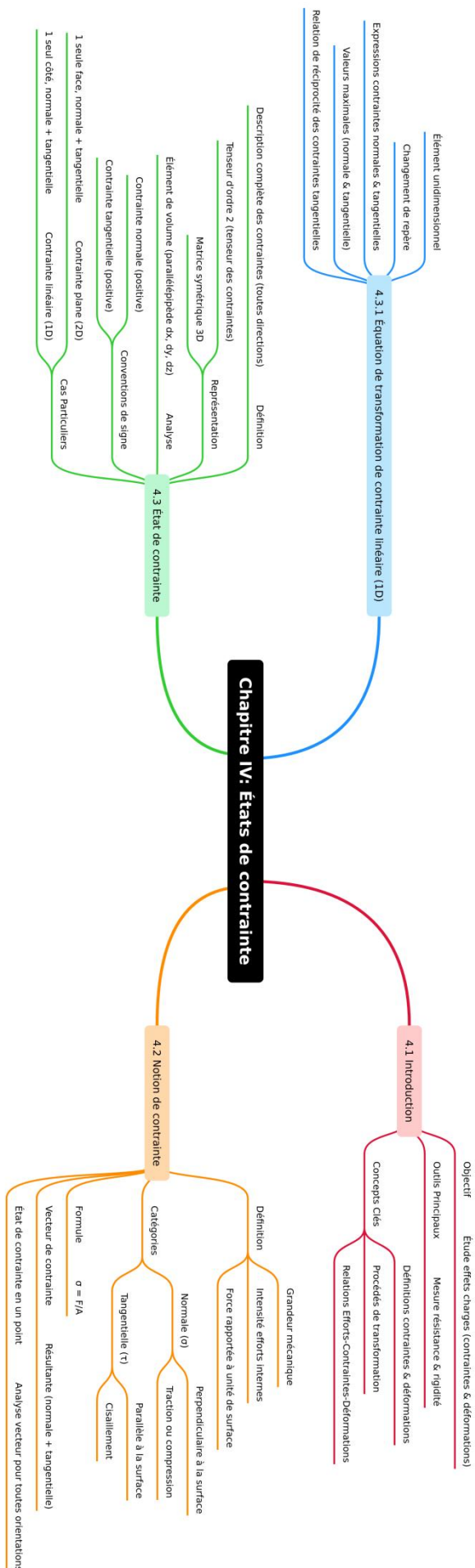
Grandeur	Valeur
RA	12 kN
RB	12 kN
T gauche	+12 kN
T droite	-12 kN
Moment maximal	36 kN·m

À retenir

- Les réactions d'appui se déterminent par les équations d'équilibre.
- L'effort tranchant est constant entre deux charges ponctuelles.
- Le moment fléchissant est maximal lorsque l'effort tranchant s'annule.

Chapitre IV

Etats de contrainte



Carte mentale de la structure du chapitre IV
Etats de contrainte

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude des effets des charges sur les éléments auquel elles sont appliquées, en termes de contraintes et de déformations. Ces dernières constituent l'outil principal de mesure de la résistance et de la rigidité des éléments. En d'autres termes se sont les quantités de base d'appréciation de l'état et du comportement des éléments sous l'effet des charges. Les définitions des notions de contraintes et de déformation seront examinées. Les procédés de transformation (translation et rotation) des contraintes et des déformations seront énoncés. Finalement les relations entre les efforts et les contraintes d'une part, et d'autre part, entre ces dernières et les déformations seront aussi établies.

4.2. Notion de contrainte

La contrainte est une grandeur mécanique qui traduit l'intensité des efforts internes s'exerçant entre les différentes parties d'un corps soumis à des sollicitations extérieures. Elle représente une force rapportée à une unité de surface.

On distingue deux grandes catégories de contraintes :

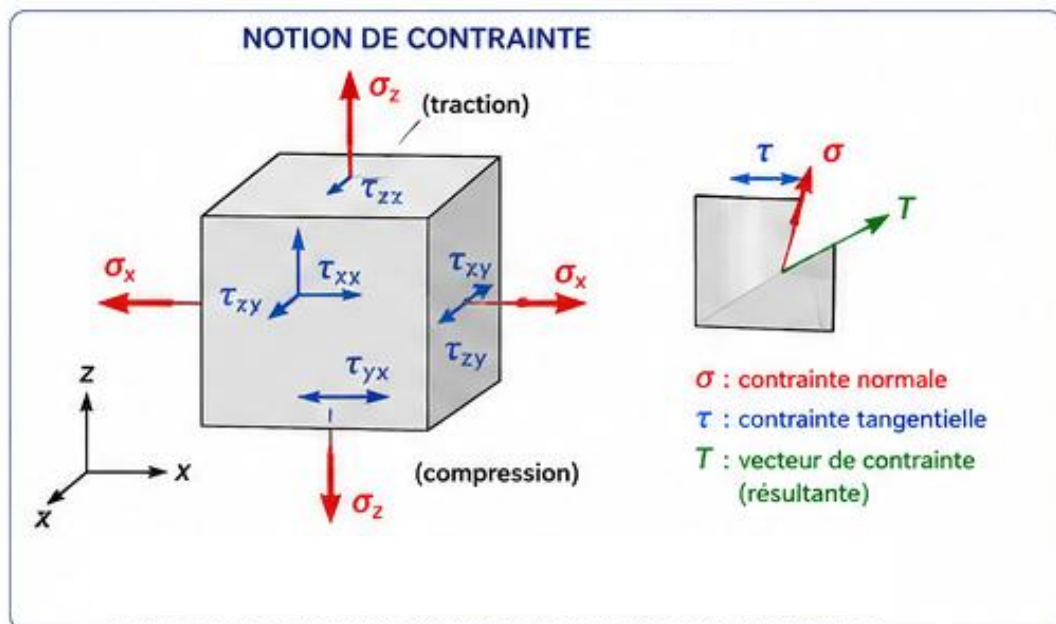


Fig. 4.1. Contrainte normale, tangentielle et vecteur de contrainte appliqués sur un élément de matière.

- **Contrainte normale (σ)** : perpendiculaire à la surface (traction ou compression),
- **Contrainte tangentielle ou de cisaillement (τ)** : parallèle à la surface.

La contrainte est définie par :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Où :

- σ : est la contrainte normale (Pa),
- F : est la force normale (N),
- S : est la surface sur laquelle s'exerce cette force (m²).

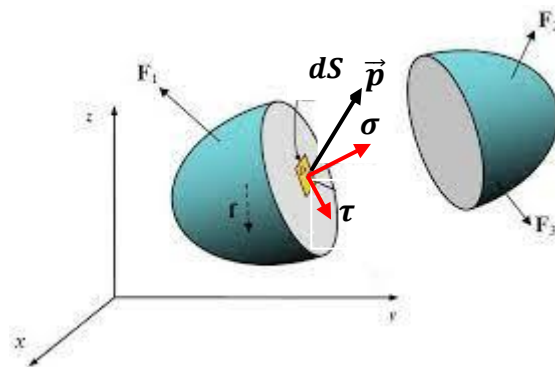


Fig. 4.2. Notion de contrainte

Considérons deux plans sécants π et π' passant par un point O d'un corps soumis à des sollicitations extérieures F_1, F_2, F_3 (voir Fig. 4.1). Une **contrainte normale** au point O, qu'elle soit de traction ou de compression, traduit l'effet d'éloignement ou de rapprochement respectif des plans π et π' . En revanche, le **glissement relatif** de ces deux plans est associé à l'action de **contraintes tangentielles** τ .

Lorsque contraintes normales et tangentielles coexistent, elles provoquent un déplacement des plans suivant la direction d'une résultante, appelée **vecteur de contrainte** $\vec{p}$.

L'analyse de ce vecteur $\vec{p}$, considéré pour toutes les orientations possibles d'un élément de surface unitaire dS passant par un point donné, constitue ce que l'on appelle **l'état de contrainte en un point**.

4.3. État de contrainte

L'état de contrainte en un point d'un solide est la description complète des contraintes qui s'exercent dans toutes les directions autour de ce point.

Il peut être représenté par un **tenseur d'ordre 2**, appelé **tenseur des contraintes**. Dans un repère cartésien 3D (x, y, z), il est exprimé par une matrice symétrique :

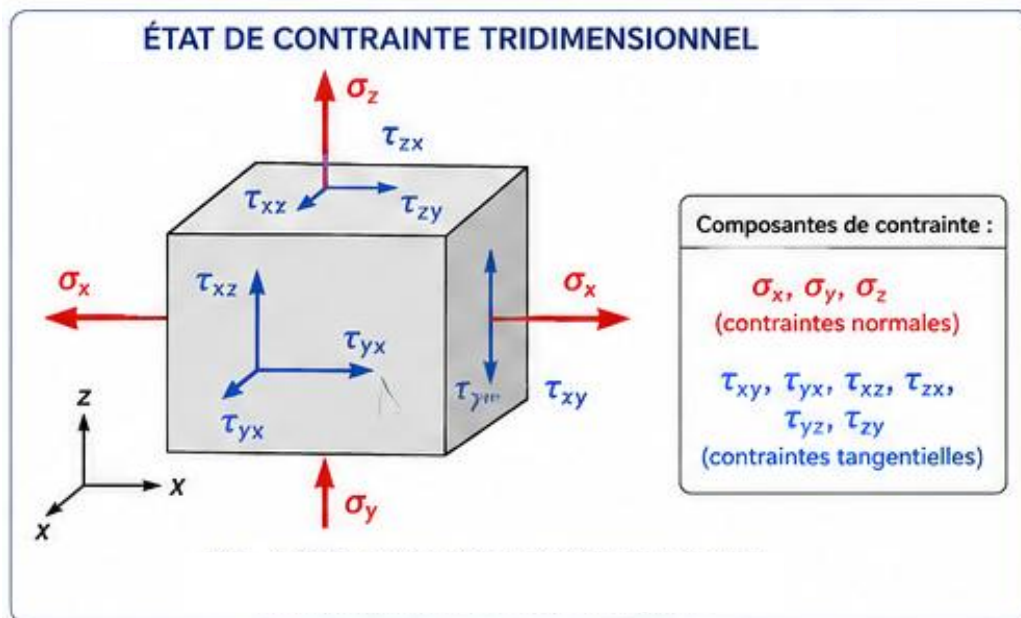


Fig. 4.3. Représentation tridimensionnelle de l'état de contrainte en un point

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Cette représentation permet de caractériser toutes les sollicitations internes en un point.

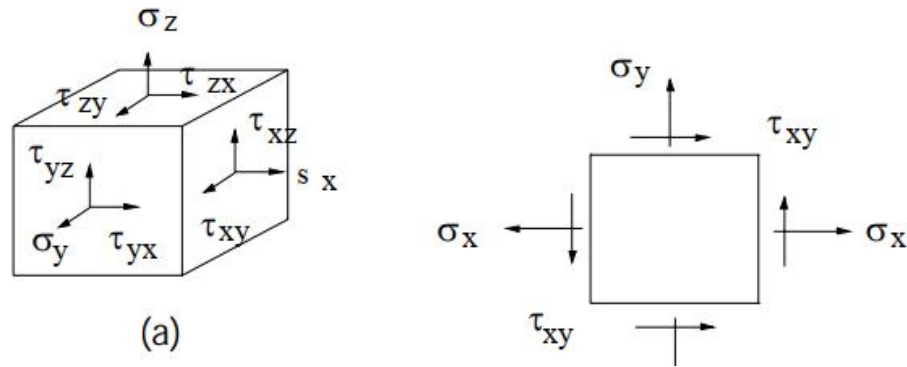


Fig 4.4. État de contrainte

Considérons, au voisinage du point O d'un solide soumis à des sollicitations, un élément de volume infiniment petit en forme de parallélépipède rectangle, de dimensions dx , dy et dz . Chaque face de cet élément est soumise à une contrainte normale ainsi qu'à deux contraintes tangentiels.

La contrainte normale est définie comme positive lorsqu'elle s'exerce :

- Soit sur une face orientée positivement, dans le sens de l'axe considéré,
- Soit sur une face orientée négativement, dans le sens opposé à cet axe.

Une contrainte tangentielle est considérée comme positive lorsqu'elle agit, sur une face orientée positivement dans le sens positive de l'axe parallèle à cette facette, ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle à cette face.

Toutes les contraintes représentées sur la figure 4.5 sont considérées comme positives selon ces conventions.

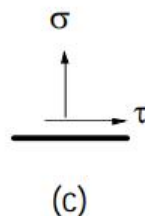


Fig. 4.5. États de contrainte sur une face

- **L'état de contrainte plane** correspond à un cas particulier où l'on considère une seule face d'un élément de volume. Sur chacun des deux côtés de cette face, agissent à la fois une contrainte normale et une contrainte tangentielle.
- **L'état de contrainte linéaire** représente un cas encore plus spécifique, où l'on ne considère qu'un seul côté de la face. Ce côté est soumis à une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

4.3.1 Équation de transformation de l'état de contrainte linéaire (1D)

Lorsqu'un élément unidimensionnel est soumis à un effort de traction, un changement de repère implique une transformation des contraintes. On considère alors l'état de contrainte selon une direction S_α , dont la normale extérieure n_α forme un angle α avec l'axe principal de la contrainte σ . La contrainte résultante P_α exercée dans cette direction s'exprime alors comme suit :

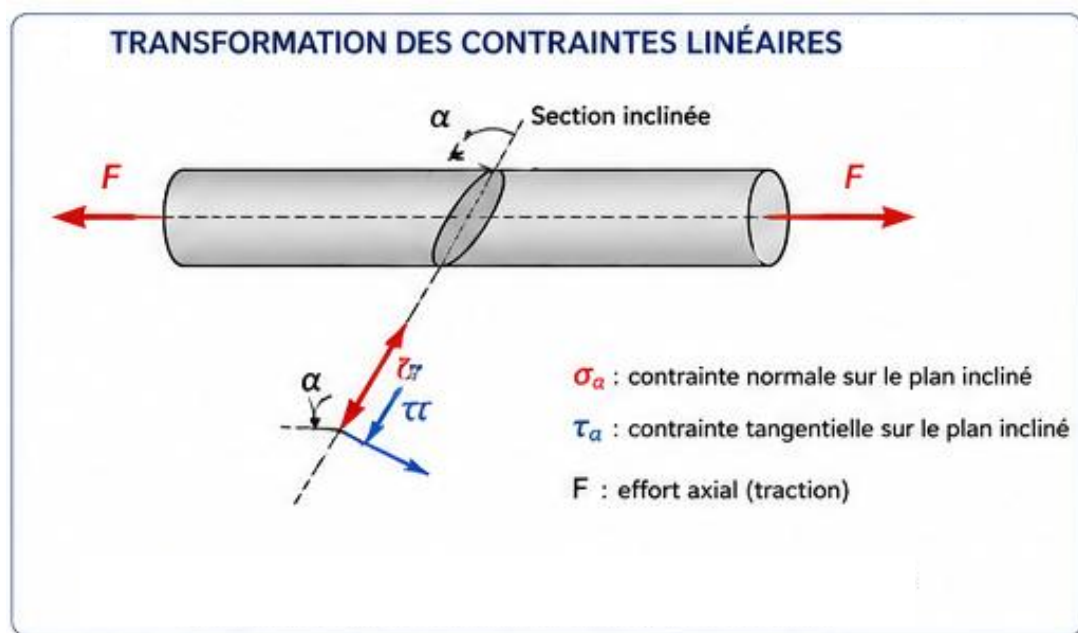


Fig. 4.6. Transformation des contraintes sur une section inclinée d'un élément unidimensionnel soumis à la traction

$$P_\alpha = \frac{N}{S_\alpha} = \frac{N}{S} \cos \alpha$$

$$P_\alpha = \sigma \cos \alpha$$

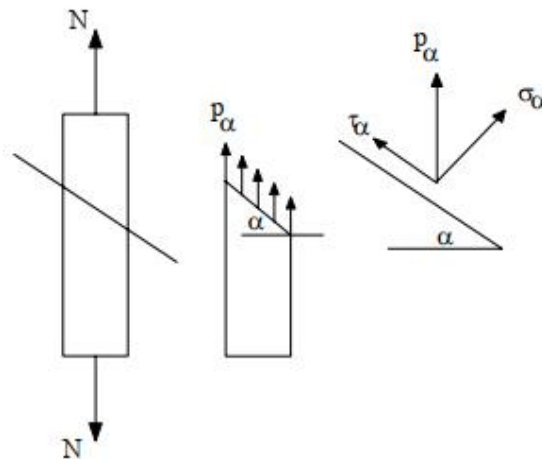


Fig. 4.7. Etat de contrainte selon une direction S_α

Les contraintes normales et tangentielles dans la section S_α , d'après la figure 4.7 :

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha$$

En remplaçons P_α par sa valeur on aura :

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \sigma \cos \alpha * \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

Les valeurs maximales de la contrainte normale et tangentielle sont données par :

$$\sigma_{max} = \sigma = P_\alpha \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \tau_0 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \sigma_{\pi/4} = \sigma/2$$

En considérant les contraintes exercées sur deux sections orthogonales, on obtient la relation de réciprocité des contraintes tangentielles, exprimée comme suit :

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = -\tau_{\alpha}$$

Ce cas simple illustre que les contraintes changent de nature selon l'orientation du plan de coupe.

4.3.2 Équation de transformation de l'état de contrainte plan (2D)

Dans une analyse plane (2D), les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} sont étudiées dans le plan (x,y) . Pour déterminer les contraintes dans une direction inclinée d'un angle α par rapport à l'axe x , on considère un prisme triangulaire droit extrait de l'élément (voir fig. 4.4), dont la face inclinée de surface S permet d'établir les contraintes dans le nouveau repère (x_1, y_1) .

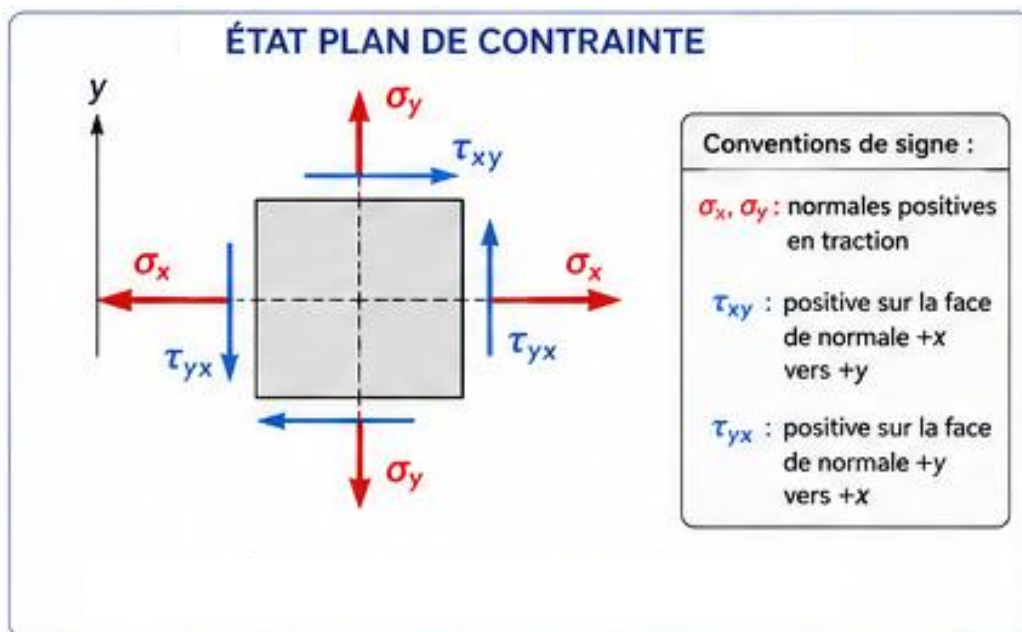


Fig. 4.8. Etat plan de contrainte dans le plan (x, y)

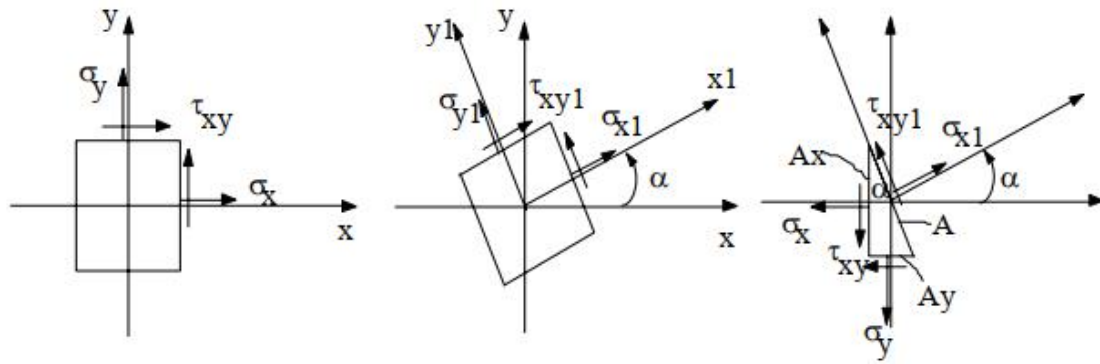


Fig. 4.9. Les contraintes sur les différentes faces du prisme

$$A_x = S \cos \alpha$$

$$A_y = S \sin \alpha$$

Les contraintes sur les différentes faces du prisme doivent s'équilibrer, on a :

Suivant la normale :

$$\sum F_{\alpha+90} = 0$$

$$A\sigma_\alpha - A\sigma_x \cos \alpha * \cos \alpha - A\tau_{xy} \cos \alpha * \sin \alpha - A\sigma_y \sin^2 \alpha - A\sigma_y \tau_{xy} \sin \alpha * \cos \alpha = 0$$

Suivant la tangente :

$$\sum F_{\alpha+90} = 0$$

$$A\tau_\alpha + A\sigma_x \cos \alpha * \sin \alpha - A\tau_{xy} \cos^2 \alpha + A\tau_{xy} \sin^2 \alpha - A\sigma_y \sin \alpha * \cos \alpha = 0$$

Soit :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha * \cos \alpha$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x + \sigma_y) \sin \alpha * \cos \alpha + \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

En substituant dans les équations 4.13 et 4.14 les expressions :

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) , \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \text{et} \quad \sin \alpha * \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

On obtient :

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Ces équations sont fondamentales pour déterminer les contraintes dans toute direction.

4.3.3 Les contraintes principales

Les contraintes principales sont les **valeurs extrêmes** de la contrainte normale obtenues pour certaines directions particulières, appelées directions principales, où la contrainte de cisaillement est nulle.

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont les valeurs maximales et minimales que peut prendre la contrainte normale σ_α selon l'orientation du plan. Elles apparaissent sur des plans où la contrainte tangentielle est nulle ($\tau_\alpha=0$).

Pour trouver la direction α_0 correspondant à σ_1 , on cherche l'angle pour lequel la dérivée de σ_α par rapport à α s'annule :

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

En résolvant cette équation, on obtient : $\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

Les fonctions trigonométriques de $2\alpha_0$ peuvent également s'exprimer sous la forme :

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad \text{et} \quad \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 correspondent aux **valeurs propres** du tenseur des contraintes, et s'obtiennent par :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{et } \tau_{xy} = 0$$

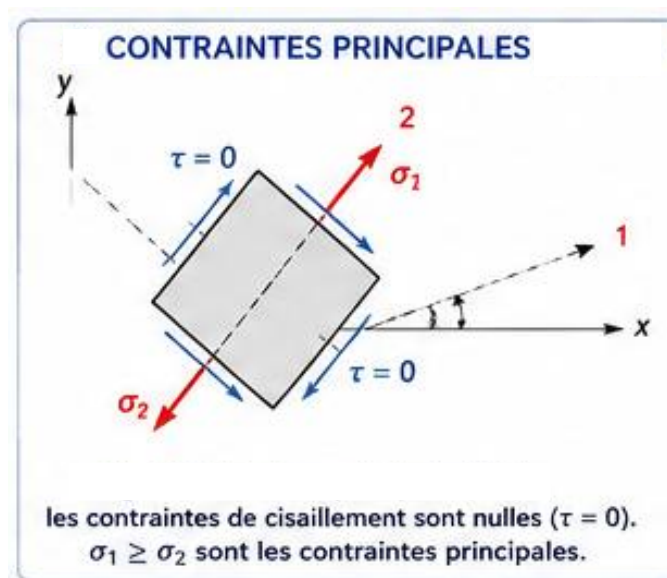


Fig. 4.10. Contraintes principales et directions principales (les contraintes de cisaillement sont nulles)

Pour distinguer l'orientation des axes principaux, on remplace l'angle $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donné par la formule 4.17 dans l'expression de σ_α et on compare avec σ_1 et σ_2 . Ainsi on identifie la direction de l'un des axes sens principaux, l'orientation du deuxième axe correspond à l'angle $(\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2})$. Le sens positif des angles est le sens trigonométrique.

On peut aussi utiliser les eq 4.18 et 4.19 pour déterminer l'angle α_0 car sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ un seul angle peut satisfaire les deux équations en même temps.

Suivant un système d'axes orientés de α par rapport aux axes principaux les équations de transformations s'écrivent en fonction de contraintes normales principales sous les formes suivantes :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha+90} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

On procède de la même manière que pour les contraintes principales, en annulant l'expression de la dérivée de τ_α :

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \right) = 0$$

Et on tire : $\tan 2\alpha_{0'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

On remarque que :

$$\tan 2\alpha_{0'} \times \tan 2\alpha_0 = -1$$

$$\tan 2\alpha_{0'} = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0} = -\cotan 2\alpha_0$$

Par analogie avec :

$$2\alpha_{0'} = 2\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_{0'} = \alpha_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

Le plan des contraintes tangentiels maximales est de 45° par rapport à celui des contraintes normales principales.

On dit que :

$$\cos 2\alpha_0' = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad \sin 2\alpha_0' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

Et en substituant ces valeurs dans l'expression τ_α , on obtient l'expression de la contraintes tangentielle maximale :

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

4.4 Cercle de Mohr pour les contraintes

Le cercle de Mohr est une **représentation graphique** de l'état de contrainte dans un plan. Il permet de visualiser :

- Les contraintes normales et tangentielles sur tout plan passant par un point,
- Les contraintes principales,
- Les directions principales (angle d'orientation).

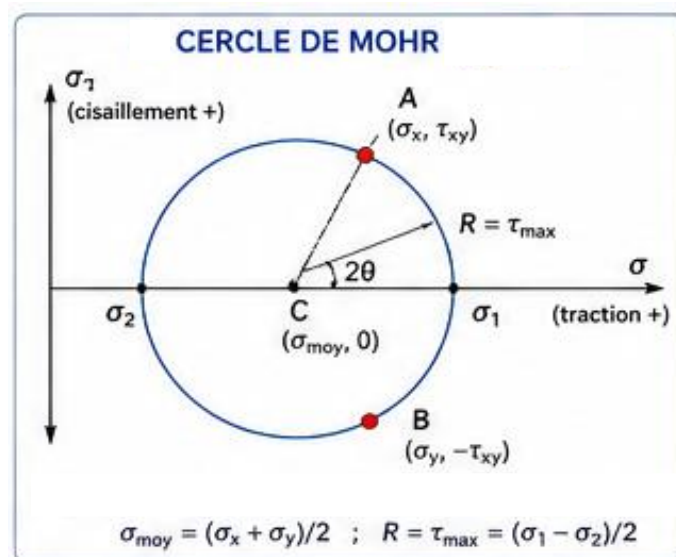


Fig. 4.11. Cercle de Mohr pour un état plan de contrainte

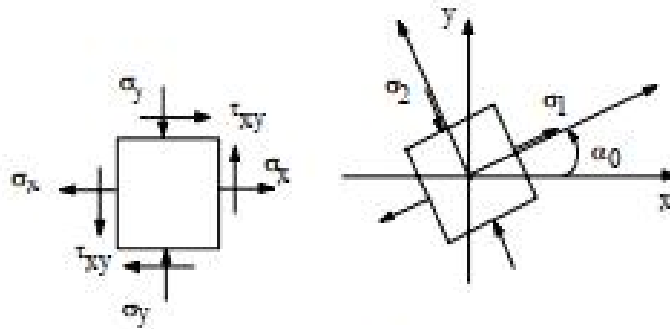


Fig. 4.12. Les contraintes normales et de cisaillements sur les facettes

Le principe de la représentation graphique des contraintes connue sous le nom de *Cercle de Mohr* est le suivant :

- L'axe d'abscisses représente les contraintes normales et les contraintes tangentielles sont projetées sur un axe perpendiculaire dirigé vers le bas, afin que le sens positif des angles soit le sens trigonométrique.

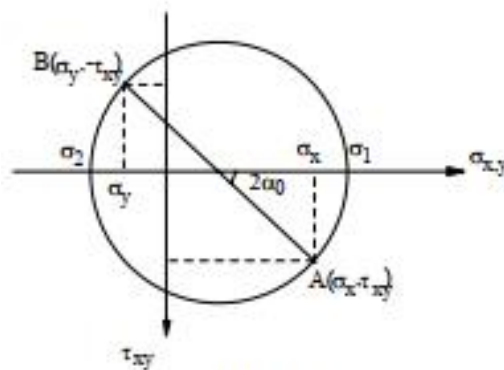


Fig. 4.13. Cercle de Mohr

- Le cercle de Mohr peut être positionné sur le plan (σ, τ) en connaissant l'état de contrainte en un point défini par σ_x , σ_y et τ_{xy} et de l'utiliser pour déterminer graphiquement les contraintes principales σ_1 et σ_2 .

- Dans ce cas on fixe deux points A (σ_x, τ_{xy}) et B(σ_y, τ_{xy}) sur le plan (σ, τ) et on prend le segment AB qui coupe l'axe σ en C comme le diamètre de cercle de Mohr ayant son centre en C.
- Les points d'intersection de la circonférence avec l'axe de σ détermine les contraintes principales σ_1 et σ_2 . l'angle entre AC et l'axe de abscisse σ est égale à $2\alpha_0$ (l'angle du plan des contraintes principales).

Chaque point du cercle correspond à une orientation du plan, définie par angle α , et donne les valeurs de σ et τ correspondantes. Le problème indirect consiste à construire le cercle de Mohr à partir de l'état de contrainte principales et de déterminer ensuite quel état de contrainte orienté d'un angle α .

4.5 Relation entre contrainte et déformation

4.5.1 Cas uni-axial :

*La relation entre la **contrainte** (σ) et la **déformation** (ε) dans le domaine élastique est donnée par la **loi de Hooke** :*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

où :

- σ : est la **contrainte normale** (en pascals, Pa),
- ε : est la **déformation unitaire** (sans dimension),
- E : est le **module d'élasticité** ou **module de Young** (en Pa ou GPa). E a la dimension d'une contrainte [N/mm^2] et représente une des constantes caractéristiques mécaniques du matériau.

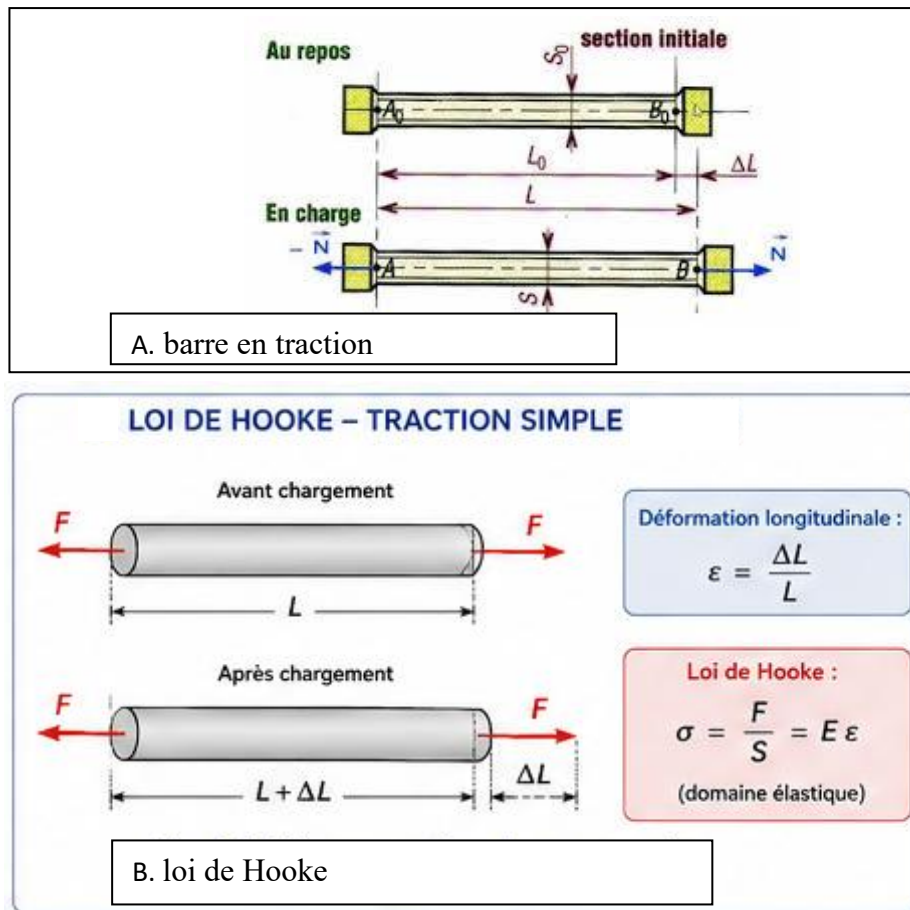


Fig. 4.14. Allongement d'une barre en traction et loi de Hooke

Considérons une barre fabriquée à partir d'un matériaux homogène et isotrope, soumise à un effort axiale (fig. 4.6).

4.5.2 Cas bidimensionnel (plan stress) :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Où :

- ν : coefficient de Poisson,
- G : module de cisaillement, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Ces équations permettent de relier l'état de contrainte à l'état de déformation dans les matériaux élastiques.

En admettant la validité de l'hypothèse de Bernoulli, toutes les fibres longitudinales de l'élément de longueur initiale L subissent un allongement identique ΔL . Ainsi, la déformation longitudinale (ou allongement relatif), notée ε , est uniforme et exprimée par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \text{constante}$$

Sous l'effet de la contrainte normale σ_x , une **déformation longitudinale relative** ε_x apparaît dans la direction de l'axe x . De manière analogue, les **contraintes tangentielles** τ_{xy} induisent une **déformation angulaire relative** γ_{xy} . Cette dernière résulte du **déplacement d'un élément de matière selon l'axe y** , provoquant une **distorsion de la facette orientée selon x** et une **modification de l'angle initialement droit** entre les directions x et y , comme illustré sur la figure.

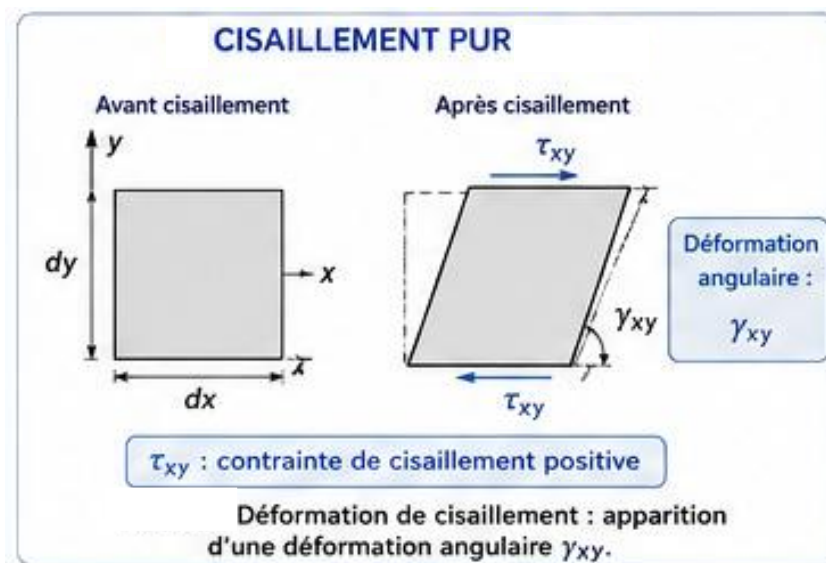


Fig. 4.15. Schema de cisaillement pur et déformation de cisaillement angulaire

G désigne le module de cisaillement (ou module d'élasticité transversal), qui représente le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation dans le cas du cisaillement. Ce module possède les mêmes dimensions qu'une contrainte, à savoir le pascal (Pa). La relation entre la contrainte tangentielle τ_{xy} et la déformation angulaire relative γ_{xy} est décrite par la loi de Hooke appliquée au cisaillement :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

4.5.3 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke généralisée traduit les relations linéaires entre les contraintes et les déformations dans le cas tridimensionnel.

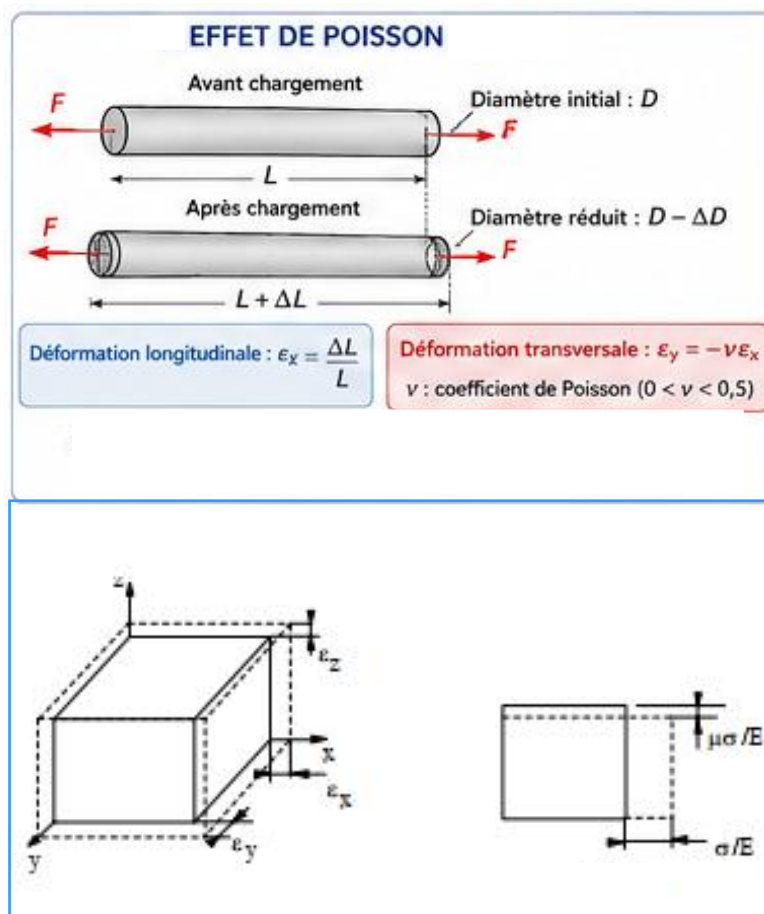


Fig. 4.16. Coefficient de Poisson

Considérons d'abord les déformations normales ε_x , ε_y et ε_z de l'élément de volume unitaire de la figure suivantes :

Ces déformations peuvent être exprimées en terme des contraintes normales par superposition de leurs efforts.

Chaque contrainte normale provoque selon son axe d'application une déformation relative ε proportionnelle à la contrainte σ :

$$\varepsilon' = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

Et

$$\varepsilon'' = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

ν est le coefficient de Poisson sans dimension ($0 \leq \nu \leq 0.5$)

Et suivant les deux autres axes, des déformations relatives :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Donc la déformation relative suivant chaque axe est la somme de la déformation relative due à la contrainte suivant cet axe et celle provoquées par les contraintes selon les deux autres axes perpendiculaires.

D'où

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

Du même pour

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Il faut noter que les contraintes tangentielles ne provoquent qu'une distorsion angulaire :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Ces équations représentent la loi de Hooke généralisée par les constantes élastiques E, G et ν .
Un matériaux élastique, isotrope.

Complètement défini par E et ν car il existe une relation entre les trois paramètres définis par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Le **module d'élasticité (E)**, aussi appelé **module de Young**, est une grandeur fondamentale en RDM. Il exprime la **rigidité d'un matériau**, c'est-à-dire sa capacité à résister à la déformation élastique lorsqu'il est soumis à une contrainte. Plus E est élevé, plus le matériau est rigide. Le tableau ci-dessous présente quelques valeurs typiques de E pour des matériaux couramment utilisés dans l'ingénierie, la construction, et les applications industrielles.

Tableau 4.1. Module d'élasticité E des matériaux

Matériau	Module d'élasticité E (GPa)	Remarques
Acier	200 – 210	Très rigide, matériau courant en RDM
Aluminium	69 – 72	Léger, moins rigide que l'acier
Cuivre	110 – 130	Bon conducteur électrique et thermique
Titane	100 – 120	Léger et résistant à la corrosion

Matériau	Module d'élasticité E (GPa)	Remarques
Inox (acier inoxydable)	190 – 200	Résistant à la corrosion
Bois (selon direction)	10 – 16	Anisotrope, dépend du sens du fil du bois
Béton (armé ou non)	20 – 40	Dépend du taux d'humidité et du type
Plastiques (ex: PVC, PEHD)	0.1 – 3	Très déformables, E très faible
Caoutchouc	0.01 – 0.1	Très élastique, module très bas
Verre	60 – 90	Rigide mais fragile
Carbone (fibre de carbone)	200 – 600	Très rigide, utilisé en aéronautique

4.6 Mesure des déformations expérimentales

6.1. Jauge de déformation (jauge extensométrique électrique)

1.1 Principe : consiste à déterminer les déformations longitudinales à l'aide d'une jauge électrique, cette jauge est composée d'un fil conducteur ou d'une grille métallique très fine collée sur une surface du matériau.



Fig. 4.17. Rosette extensométrique, extensomètre mécanique

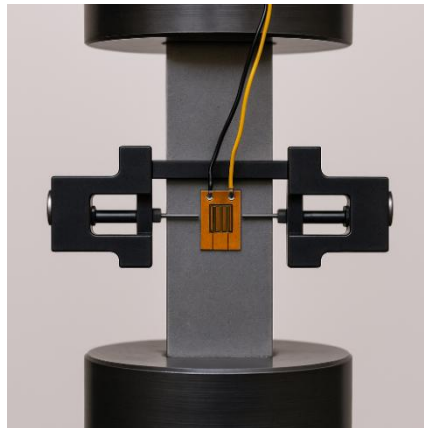


Fig. 4.18. Mesure de déformation expérimentale

1.2 Fonctionnement : Lorsqu'on applique une charge, le matériau se déforme, ce qui provoque une variation de la longueur et donc de la résistance électrique de la jauge.

1.3 Utilisation : Elle est connectée à un pont de Wheatstone pour mesurer ces faibles variations de résistance, ce qui permet de calculer la déformation (strain) avec une grande précision. Ces jauges sont dextrement sensibles et peuvent détecter des déformations de l'ordre de 10^{-6} . Une jauge permet de mesurer l'allongement relatif suivant une seule direction. Il est donc souvent nécessaire d'utiliser trois jauges pour effectuer 3 mesures suivant trois directions différentes pour pouvoir déterminer l'état de déformation en un point de la surface à étudier. L'ensemble des trois jauges disposées suivant une géométrie précise est appelée rosette.

Dans la pratique on place les trois jauges de telle façon que les angles qui les séparent soient des valeurs simples (45° , 60° , 120°)

A l'aide d'une rosette à 45° . Fixée en un point d'un élément, on mesure les déformations relatives ϵ_a , ϵ_b et ϵ_{45} suivant les axes x , y et l'axe orienté à 45° respectivement.

Pour définir complètement l'état de déformation dans ce point on doit déterminer γ_{xy} . on utilise donc l'équation de transformation suivante :

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

Pour $\alpha = 45^\circ$ on a :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_y$$

On aura : $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$

6.2. Extensomètre mécanique

2.1 Principe : Cet appareil se fixe directement sur la pièce à tester et mesure la variation de longueur entre deux points.

2.2 Fonctionnement : Il utilise un système de bras articulés ou de lames souples qui transmet le déplacement à une aiguille ou un capteur.

2.3 Utilisation : Très utilisé dans les essais de traction ou compression.

2.4 Avantages :

- Simple à utiliser.
- Robuste.

2.5 Inconvénient :

Moins précis que les systèmes électroniques ou optiques.

6.3. Extensomètre optique ou par corrélation d'image (DIC)

3.1 Principe : Utilise une ou deux caméras haute résolution pour filmer une surface du matériau pendant l'essai.

3.2 Fonctionnement : Un motif aléatoire (speckle) est appliqué sur la pièce. Le logiciel suit les déplacements de ce motif pour calculer la déformation entre les images.

3.3 Utilisation : Permet de mesurer les déformations en surface, sans contact.

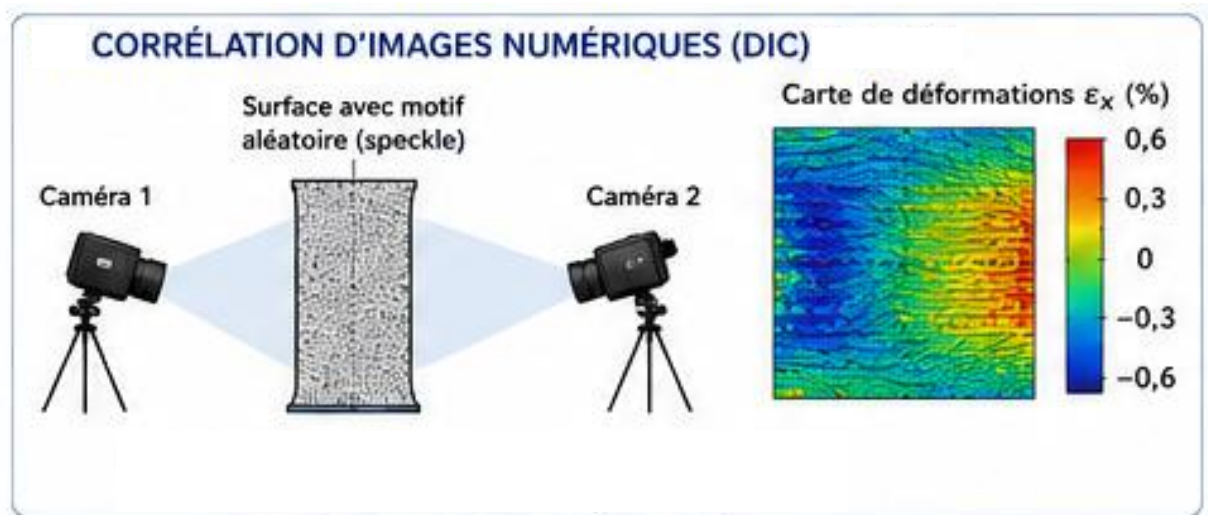


Fig. 4.19. Mésure des déformations de surface par corrélation d'images numériques (DIC)

3.4 Avantages :

- Très grande précision.
- Permet de cartographier la déformation sur une grande surface.

3.4 Inconvénient :

- Coût élevé.
- Nécessite un bon éclairage et des conditions stables.

6.4. Machine d'essai universelle (INSTRON, Zwick, etc.)

4.1 Principe : C'est une machine motorisée capable d'appliquer des efforts (traction, compression, flexion) sur un échantillon.

4.2 Fonctionnement : Elle est équipée de capteurs de force (cellule de charge) et souvent d'un extensomètre ou jauge pour mesurer les déformations.

4.3 Utilisation : Utilisée dans les laboratoires pour tester les propriétés mécaniques des matériaux (module d'Young, contrainte, allongement...)



Fig. 4.20. Machine universelle d'essai (INSTRON? Zwick)

4.4 Avantages :

- Permet des essais automatisés et contrôlés.
- Mesure simultanée de force et déformation.

4.5 Inconvénient :

- Volumineuse.
- Coût élevé.

7. Application 1 : Calcul de l'état de contrainte dans une barre soumise à une force axiale

On considère une **barre cylindrique** homogène et isotrope de section constante $S=200$, de longueur $L=1$ m, soumise à une **force de traction** axiale $F=20$ KN.

Le matériau a un **module de Young** $E=200$ GPa et un **coefficient de Poisson** $\nu=0,3$.

On cherche à :

- Déterminer la **contrainte normale** σ dans la barre.
- Calculer la **déformation longitudinale** ϵ .
- Calculer la **déformation transversale** (radiale) par effet de Poisson.

D. Donner l'**état de contrainte** en un point quelconque de la barre.

Solution 1

A. Contrainte normale σ

La contrainte normale (assumée uniforme selon l'hypothèse de Bernoulli) est donnée par :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Convertissons les unités :

- $F=20 \text{ kN}=20 \times 10^3 \text{ N}$
- $S=200 \text{ mm}^2=200 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\sigma = \frac{20 \times 10^3}{200 \times 10^{-6}} = 100 \times 10^6 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma = 100 \text{ MPa}$$

B. Déformation longitudinale ε

La déformation longitudinale est donnée par la loi de Hooke (en traction simple) :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Convertissons E : $E=200 \text{ GPa}=200 \times 10^9 \text{ Pa}$

$$\varepsilon = \frac{100 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 5.10^{-4}$$

$$\varepsilon = 5.10^{-4}$$

C. Déformation transversale (effet de Poisson)

La déformation radiale (dans une direction perpendiculaire à l'axe) est donnée par :

$$\varepsilon_{trans} = -\nu \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon_{trans} = -0,3 \times 5.10^{-4} = 1,5.10^{-4}$$

$$\varepsilon_{trans} = 1,5.10^{-4}$$

D. État de contrainte en un point

L'état de contrainte en tout point de la barre (en coordonnées cartésiennes x,y,z) est :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 100 \text{ MPa} & (\text{traction axiale}) \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 & (\text{pas de contraintes transversales}) \\ \tau_{ij} = 0 & (\text{aucune contrainte de cisaillement}) \end{cases}$$

Sous forme de tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

8. Application 2 : Analyse d'un état plan de contrainte

Un point d'un solide est soumis à un état plan de contrainte dans le plan xy, défini par les composantes suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_x = 80 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 20 \\ \tau_{xy} = 30 \end{cases}$$

On demande de :

- Représenter le **tenseur des contraintes** au point considéré.
- Calculer les **contraintes principales** σ_1 et σ_2 , ainsi que leur direction.
- Calculer la **contrainte de cisaillement maximale** $\tau_{\max}$ et la contrainte normale moyenne associée.
- Tracer qualitativement le **cercle de Mohr**.

Solution 2

a. Tenseur des contraintes

L'état plan de contrainte (en x,y) s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 30 & 20 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Remarque : dans un état plan, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

b. Contrainte principale

Les **contraintes principales** sont les valeurs propres du tenseur de contrainte, données par :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Substitution :

- $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 + 20}{2} = 50 \text{ MPa}$
- $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{80 - 20}{2} = 30 \text{ MPa}$
- $\sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} = 42,43 \text{ MPa}$

Donc :

$$\sigma_1 = 50 + 42,43 = 92,43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 50 - 42,43 = 7,57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 92,43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 7,57 \text{ MPa}$$

c. Contrainte de cisaillement maximale τ_{max}

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 42,43 \text{ MPa}$$

La **contrainte normale moyenne** associée est :

$$\tau_{moy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 50 \text{ MPa}$$

d. Cercle de Mohr

Le **cercle de Mohr** est centré en $C=(\sigma_{\text{moy}},0)=(50, 0)$ de rayon $R=\tau_{\text{max}}=42$.

Les extrémités du diamètre principal

sont les **contraintes principales** σ_1 et σ_2 . Points importants :

- Le point $A=(\sigma_x, \tau_{xy}) = (80, 30)$
- Le point $B=(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (20, -30)$

Ils sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr.

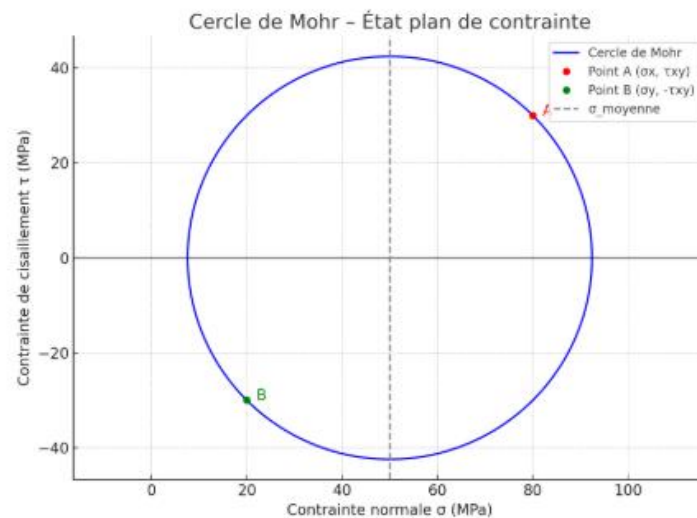


Fig. 4.21. Représentation de l'état plan de contrainte - Cercle de Mohr

Conclusion

L'état de contrainte en un point d'un matériau décrit l'ensemble des efforts internes (contraintes normales et de cisaillement) agissant sur des plans passant par ce point. En état plan de contrainte, seules les composantes dans un plan (souvent $xyxyxy$) sont non nulles, ce qui simplifie l'analyse sans négliger la réalité physique dans de nombreux cas pratiques (plaques minces, coques, etc.).

L'analyse de cet état permet de :

- Identifier les contraintes principales (valeurs extrêmes sans cisaillement),
- Déterminer la contrainte de cisaillement maximale, qui est critique pour la rupture par glissement,
- Visualiser graphiquement les efforts internes grâce au cercle de Mohr, outil très puissant pour interpréter les résultats.

Cette étude est essentielle pour :

- Vérifier les critères de résistance des matériaux (critère de Tresca, de Von Mises),
- Optimiser les orientations de fibres dans les matériaux composites,
- Éviter les ruptures, déformations plastiques ou instabilités.

Travaux Dirigés Corrigés – Chapitre IV : Contraintes et Déformations

Exercice 1 –

Une barre cylindrique en acier est soumise à une force de traction axiale.

Données :

- Longueur $L = 2,5$ m
- Diamètre $d = 20$ mm
- Force $F = 80$ kN
- Module de Young $E = 210$ GPa

On demande de déterminer :

1. La section de la barre.
2. La contrainte normale.
3. La déformation unitaire.
4. L'allongement de la barre.
5. Vérifier si la contrainte reste inférieure à la limite élastique de l'acier ($R_e = 250$ MPa).

Solution détaillée

1) Aire de la section

$$A = \pi d^2 / 4$$

$$A = \pi \times 20^2 / 4 = 314,16 \text{ mm}^2$$

2) Contrainte normale

$$\sigma = F / A$$

$$\sigma = 80\,000 / 314,16$$

$$\sigma = 254,65 \text{ MPa}$$

3) Déformation unitaire

$$\varepsilon = \sigma / E$$

$$E = 210\,000 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon = 254,65 / 210\,000$$

$$\varepsilon = 0,00121$$

4) Allongement

$$\Delta L = \varepsilon \times L$$

$$L = 2500 \text{ mm}$$

$$\Delta L = 0,00121 \times 2500$$

$$\Delta L = 3,03 \text{ mm}$$

5) Vérification

$$\sigma = 254,65 \text{ MPa}$$

$$R_e = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma > R_e$$

La barre dépasse légèrement la limite élastique ; la section doit être augmentée ou la charge réduite.

Résultats

Grandeur	Valeur
Section A	314,16 mm ²
Contrainte σ	254,65 MPa
Déformation ε	0,00121
Allongement ΔL	3,03 mm
Conclusion	Section insuffisante ($\sigma > R_e$)

À retenir

- $\sigma = F/A$
- $\varepsilon = \sigma/E$
- $\Delta L = \varepsilon L$
- La contrainte admissible doit rester inférieure à la limite élastique du matériau pour garantir un comportement élastique.

Bibliographie

- [1]. Timoshenko, S., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [2]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2012). *Mechanics of Materials* (6th ed.). McGraw-Hill.
- [3]. Ugural, A. C. (2009). *Stresses in Plates and Shells* (3rd ed.). CRC Press.
- [4]. Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1997). *Mechanics of Materials* (4th ed.). PWS Publishing.
- [5]. Popov, E. P. (1990). *Introduction to Mechanics of Solids*. Prentice-Hall.
- [6]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2015). *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill Education.
- [7]. Hibbeler, R. C. (2017). *Mechanics of Materials*. Pearson Education.
- [8]. Beer, F. P., Johnston, E. R., & DeWolf, J. T. (2015). *Mechanics of materials* (7th ed.). McGraw-Hill Education.
- [9]. Bourahla, N. (2003). *Résistance des matériaux de base*. Le Groupement Économique de Contrôle Technique de la Construction.
- [10]. Cazes, F. (2016). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [11]. Chéry, J., Cornet, F., & Gueguen, Y. (2014). *Mécanique des milieux continus*. Dunod.
- [12]. Flügge, W. (1969). *Résistance des matériaux*. Dunod.
- [13]. Lemaître, J., & Chaboche, J.-L. (2009). *Mécanique des matériaux solides* (3e éd.). Dunod.
- [14]. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [15]. Ugural, A. C., & Fenster, S. K. (2011). *Advanced strength and applied elasticity* (5th ed.). Pearson Education.
- [16]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2020). *Mechanics of Materials* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
- [17]. Gere, J. M., & Goodno, B. J. (2018). *Mechanics of Materials* (9th ed.). Cengage Learning.

-
- [18]. Hibbeler, R. C. (2020). Mechanics of Materials (11th ed.). Pearson.
- [19]. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (2009). Mechanics of Materials. Dover Publications.
- [20]. Ugural, A. C., & Fenster, S. K. (2012). Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity (5th ed.). Pearson.
- [21]. Popov, E. P. (1998). Engineering Mechanics of Solids (2nd ed.). Prentice Hall.
- [22]. Nash, W. A., & Potter, M. C. (2010). Schaum's Outline of Strength of Materials (5th ed.). McGraw-Hill.
- [23]. Philpot, T. A. (2018). Mechanics of Materials: An Integrated Learning System (4th ed.). Wiley.
- [24]. Benham, P. P., Crawford, R. J., & Armstrong, C. G. (1996). Mechanics of Engineering Materials (2nd ed.). Longman.
- [25].
- [26]. Crandall, S. H., Dahl, N. C., & Lardner, T. J. (1978). An Introduction to the Mechanics of Solids (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [27]. Young, W. C., Budynas, R. G., & Sadegh, A. M. (2012). Roark's Formulas for Stress and Strain (8th ed.). McGraw-Hill.
- [28]. Megson, T. H. G. (2019). Structural and Stress Analysis (4th ed.). Butterworth-Heinemann.
- [29]. Pilkey, W. D., & Pilkey, D. F. (2008). Peterson's Stress Concentration Factors (3rd ed.). Wiley.
- [30]. Budynas, R. G., & Nisbett, J. K. (2020). Shigley's Mechanical Engineering Design (11th ed.). McGraw-Hill.
- [31]. Ugural, A. C. (2018). Stresses in Plates and Shells (3rd ed.). CRC Press.
- [32]. EN 1993-1-1 (2005). Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-1.
- [33]. EN 1992-1-1 (2004). Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1.
- [34]. AFNOR (2013). NF EN 1990: Bases de calcul des structures.
- [35]. Gere, J. M. (2004). Theory of Elastic Stability (2nd ed.). Dover.
- [36]. Fung, Y. C. (1965). Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall.

Bibliographie

- [1]. Timoshenko, S., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [2]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2012). *Mechanics of Materials* (6th ed.). McGraw-Hill.
- [3]. Ugural, A. C. (2009). *Stresses in Plates and Shells* (3rd ed.). CRC Press.
- [4]. Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1997). *Mechanics of Materials* (4th ed.). PWS Publishing.
- [5]. Popov, E. P. (1990). *Introduction to Mechanics of Solids*. Prentice-Hall.
- [6]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2015). *Mechanics of Materials*. McGraw-Hill Education.
- [7]. Hibbeler, R. C. (2017). *Mechanics of Materials*. Pearson Education.
- [8]. Beer, F. P., Johnston, E. R., & DeWolf, J. T. (2015). *Mechanics of materials* (7th ed.). McGraw-Hill Education.
- [9]. Bourahla, N. (2003). *Résistance des matériaux de base*. Le Groupement Économique de Contrôle Technique de la Construction.
- [10]. Cazes, F. (2016). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [11]. Chéry, J., Cornet, F., & Gueguen, Y. (2014). *Mécanique des milieux continus*. Dunod.
- [12]. Flügge, W. (1969). *Résistance des matériaux*. Dunod.
- [13]. Lemaître, J., & Chaboche, J.-L. (2009). *Mécanique des matériaux solides* (3e éd.). Dunod.
- [14]. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [15]. Ugural, A. C., & Fenster, S. K. (2011). *Advanced strength and applied elasticity* (5th ed.). Pearson Education.
- [16]. Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2020). *Mechanics of Materials* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
- [17]. Gere, J. M., & Goodno, B. J. (2018). *Mechanics of Materials* (9th ed.). Cengage Learning.

-
- [18]. Hibbeler, R. C. (2020). Mechanics of Materials (11th ed.). Pearson.
- [19]. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (2009). Mechanics of Materials. Dover Publications.
- [20]. Ugural, A. C., & Fenster, S. K. (2012). Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity (5th ed.). Pearson.
- [21]. Popov, E. P. (1998). Engineering Mechanics of Solids (2nd ed.). Prentice Hall.
- [22]. Nash, W. A., & Potter, M. C. (2010). Schaum's Outline of Strength of Materials (5th ed.). McGraw-Hill.
- [23]. Philpot, T. A. (2018). Mechanics of Materials: An Integrated Learning System (4th ed.). Wiley.
- [24]. Benham, P. P., Crawford, R. J., & Armstrong, C. G. (1996). Mechanics of Engineering Materials (2nd ed.). Longman.
- [25].
- [26]. Crandall, S. H., Dahl, N. C., & Lardner, T. J. (1978). An Introduction to the Mechanics of Solids (2nd ed.). McGraw-Hill.
- [27]. Young, W. C., Budynas, R. G., & Sadegh, A. M. (2012). Roark's Formulas for Stress and Strain (8th ed.). McGraw-Hill.
- [28]. Megson, T. H. G. (2019). Structural and Stress Analysis (4th ed.). Butterworth-Heinemann.
- [29]. Pilkey, W. D., & Pilkey, D. F. (2008). Peterson's Stress Concentration Factors (3rd ed.). Wiley.
- [30]. Budynas, R. G., & Nisbett, J. K. (2020). Shigley's Mechanical Engineering Design (11th ed.). McGraw-Hill.
- [31]. Ugural, A. C. (2018). Stresses in Plates and Shells (3rd ed.). CRC Press.
- [32]. EN 1993-1-1 (2005). Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-1.
- [33]. EN 1992-1-1 (2004). Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1.
- [34]. AFNOR (2013). NF EN 1990: Bases de calcul des structures.
- [35]. Gere, J. M. (2004). Theory of Elastic Stability (2nd ed.). Dover.
- [36]. Fung, Y. C. (1965). Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall.