

## Série de TD n°1 (Structure de l'ensemble $\mathbb{R}$ )

### Exercice 1.

I. Montrer que :

- (a)  $|x - y| \leq |x| + |y|$ ,
- (b)  $||x| - |y|| \leq |x + y|$ ,
- (c)  $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ,
- (d)  $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ ,
- (e)  $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$ .

II. Soit  $[x]$  la partie entière de  $x$ , montrer que :

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$ .
- (b)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$ .
- (c)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, [x + a] = [x] + a$ .

**Exercice 2.** On considère l'ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  muni de l'ordre usuel et  $A$  une partie de  $E$ . Déterminer pour chacun des ensembles suivants : l'ensemble des majorants  $Maj(A)$ , l'ensemble des minorants  $Min(A)$ , la borne supérieure  $\sup A$ , la borne inférieure  $\inf A$ , le plus petit élément  $\min A$  et le plus grand élément  $\max A$ .

- 1.  $A = [-2, 2], [-2, 2[, ] - 2, 2], ] - 2, 2[, E = \mathbb{R}$ .
- 2.  $A = \left\{ \frac{1}{x-1}, x \in ]0, \frac{1}{2}[ \right\}, E = \mathbb{R}$ .
- 3.  $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}, E = \mathbb{Q}$ .

**Exercice 3.** En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, montrer que :

- 1.  $\sup A = 0$  et  $\inf A = -1$  pour  $A = \left\{ \frac{1}{n^2} - 1, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .
- 2.  $\sup B = 2$  et  $\inf B = 0$  pour  $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

Déterminer le maximum et le minimum de chacun de ces ensembles s'ils existent.

**Exercice 4.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que :

$$A = \left\{ \frac{2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

- 1. Trouver  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}.$$

- 2. Montrer que  $A$  est bornée.
- 3. Montrer que  $\sup A = \frac{2}{3}$  et  $\inf A = 0$ , et déterminer  $\max A$  et  $\min A$  s'ils existent.

**Exercice 5.** On note par  $\mathcal{P}_B(\mathbb{R})$  l'ensemble des parties bornées de  $\mathbb{R}$ ; montrer que  $\forall A, B \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R})$  :

- 1.  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$  et  $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$ .
- 2.  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  et  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ , où  $A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}$ .

**Application :**

- 1. Soient  $A = \{1\}$  et  $B = \left\{ \frac{-2}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- a) Déterminer  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\sup B$  et  $\inf B$ .
- b) En déduire  $\sup C$  et  $\inf C$  où  $C = \left\{ \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
2. Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in A$ . Montrer que si  $\sup A > \alpha$  alors :

$$\sup A = \sup (A \setminus \{\alpha\}) .$$