Méthode du Déterminant

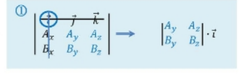
Pour calculer le produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$, on utilise aussi la méthode dite du déterminant. Tel que les vecteurs de la base en considération constituent la première ligne de ce déterminant. La seconde ligne est formée par les composantes du premier vecteur du produit vectoriel, c'est-à-dire $\vec{A}$, et la troisième ligne par les composantes du vecteur $\vec{B}$:

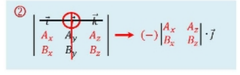
$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \qquad \vec{B}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}.$$

Remarquer que la position des composantes de $\vec{A}$ et celles de $\vec{B}$ suit l'ordre du produit vectoriel à calculer ; $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ou $\vec{B}\wedge\vec{A}$. Et ce, a son effet sur le calcul et le résultat final.

Le calcul du déterminant précédent se fait en trois étapes schématisées sur les figures ci-dessous.

1ère étape :
On barre la 1ère ligne et la 1ère colonne, ainsi le coefficient de $\vec{\imath}$ est le déterminant en bleu.





2ème étape :
Pour le coefficient de $\vec{\jmath}$ on barre la 2ème colonne et on multiplie par (-1) le déterminant en rouge.

3ème étape :
Alors que pour $\vec{k}$ on élimine la 3ème colonne. Le coefficient de $\vec{k}$ est donc le déterminant en vert.



Le produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$ est la somme de ces trois éléments ainsi déterminés :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\cdot\vec{\imath}-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\cdot\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

D'où :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=(A_yB_z-B_yA_z)\cdot\vec{\imath}-(A_xB_z-B_xA_z)\cdot\vec{\jmath}+(A_xB_y-B_xA_y)\cdot\vec{k}.$$