Chapitre 1

Eléments de la logique mathématique

Dans ce chapitre, on présentera les notions élémentaires de la logique mathématique et les différents modes de raisonnement.

1.1 Notions de logique

Définition : Une proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux. Les propositions sont distinguées par des lettres majuscules : P, Q, R, ...

Exemples :

a) "15 est plus grand que 10" est une proposition vraie.

b) "Trois est un nombre pair" est une proposition fausse.

c) "Le nombre x est impair" n'est pas une proposition puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on connait pas x.

1.1.1 Opérations sur les propositions, connecteurs logiques

a) Négation : La négation d'une proposition P notée (non P) ou $\overline{P}$ est une proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

b) Disjonction : La disjonction de deux propositions P et Q, not ée (P ou Q) oubien ($P \vee Q$) est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P, Q est vraie.

Remarque : $\left(P \vee \overline{P}\right)$ est toujours vraie.

c) Conjonction : La conjonction des propositions P et Q, noté e P et Q $(P \wedge Q)$ est une proposition qui n'est vraie que si P, Q sont toutes les deux vraies.

Remarque : $\left(P \wedge \overline{P}\right)$ est toujours fausse.

d) Implication : La proposition (non P ou Q) est appelée implication logique et on la note $P \Longrightarrow Q$: se lit P implique Q.

e) Equivalence : Deux propositions P, Q sont équivalentes si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ et on écrit $P \Longleftrightarrow Q$: se lit P est équivalente à Q.

Toutes les définitions précédentes peuvent être résumées dans la table ci-dessous dite table de vérité

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Remarques : 1) On remarque de cette table qu'une proposition vraie n'implique pas une proposition fausse.

2) Deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles ont la m ême valeur de vérité.

Exemples :

P :" $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel" est une proposition fausse.

$\overline{P}$:" $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel" est une proposition vraie.

$3 > 5$ ou $1 + 1 = 3$ est une proposition fausse.

$3 > 5$ ou $1 + 1 = 2$ est une proposition vraie.

$2 = 2$ et $2 = 1 + 1$ est une proposition vraie.

$2 < 1$ et $2 = 2 + 0$ est une proposition fausse.

$3 + 2 = 4 \Longrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition vraie.

$3 + 2 = 5 \Longrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition fausse.

$3 + 2 = 5 \Longrightarrow 3 \times 2 = 6$ est une proposition vraie.

$3 + 2 = 4 \Longleftrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition vraie.

1.1.2 Propriétés

1) $P \Longleftrightarrow \overline{\overline{P}}$.
2) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
3) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
4) $P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.
5) $[P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow R] \Longrightarrow P \Longrightarrow R$.
6) $(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
$(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.
7) $(P \vee Q) \wedge R \Longleftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
$(P \wedge Q) \vee R \Longleftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
8) $\left.\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \text{ est vraie} \\ \overline{P} \Longrightarrow Q \text{ est vraie} \end{array}\right\} \Longrightarrow Q \text{ est vraie.}$

1.1.3 Les quantificateurs

a) Quantificateur universel : noté $\forall$, se lit "quel que soit" ou "pour tout".
b) Quantificateur existentiel : noté $\exists$, se lit "il existe au moins".
Exemples :
1. P : "$\forall x, x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$".
Pour tout élément de $\mathbb{R}$ (ensemble des nombrse réels), l'inégalité est vraie.
2. Q : "$\exists x, x \in \mathbb{R}$, $2x + 1 \leq 0$".
Il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$, pour lequel l'inégalité précédente est vraie.
c) Propriétés :
1) $\overline{[\forall x, P(x)]} \Longleftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$.
2) $\overline{[\exists x, P(x)]} \Longleftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$.
3) $[\forall x, (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longleftrightarrow [\forall x, P(x)] \text{ et } [\forall x, Q(x)]$.
4) $[\exists x, (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longrightarrow [\exists x, P(x)] \text{ et } [\exists x, Q(x)]$.
5) $[\forall x, (P(x) \text{ ou } Q(x))] \Longrightarrow [\forall x, P(x)] \text{ ou } [\forall x, Q(x)]$.
Remarque : La réciproque dans 4) et 5) n'est pas toujours vraie.
Exemple : $P(x) : x \geq 2 \quad \exists x, x = 3$ tel que $P(x)$ est vraie,
$Q(x) : x < 2 \quad \exists x, x = 1$ tel que $Q(x)$ est vraie,
mais ceci n'implique pas l'existence d'un x tel que $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies à la fois.
Remarque importante :
Les relations "$\forall x, \exists y, P(x, y)$" et "$\exists y, \forall x, P(x, y)$" sont différentes car dans la premiè re y dépend de x alors que dans la seconde y ne dépend pas de x.
Cependant :

$$\forall x, \forall y, P(x, y) \Longleftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y)$$

et

$$\exists x, \exists y, P(x, y) \Longleftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y).$$

Exemple $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x^2 < y$ est vraie.
$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : x^2 < y$ est fausse.

1.2 Méthodes de raisonnement mathématique

Il existe plusieurs types de raisonnement mathématique, on va traiter dans cette partie les plus utilisés

1.2.1 Raisonnement par l'asurde :

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.
Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{N}$, $x + 1 \neq 0$.
On suppose que P est fausse : $\exists x \in \mathbb{N}$, $x + 1 = 0$ donc $x = -1$ et $x \in \mathbb{N}$. Contradiction avec la définition de $\mathbb{N}$.

1.2.2 Démonstration par la contraposée :

Si l'implication $P \Longrightarrow Q$ s'avère difficile à dé montrer alors compte tenu de l'équivalence $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$, donc il revient au même de démontrer que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

1.2.3 Démonstration par un contre exemple :

Pour démontrer que la proposition $(\forall x \in X, P(x))$ est fausse, il suffit de trouver un x_0 de X tel que $\overline{P(x_0)}$ est vraie.

Exemple :

$$P : "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0".$$

On a pour $x_0 = 1$, $1 - 1 = 0$ et $\overline{P}$ est vraie. Donc P est fausse.

1.2.4 Démonstration par récurrence :

Soit P une proposition dépendant de l'entier naturel n, s'il existe un entier naturel $n_0 \geq 0$ pour lequel $P(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1 :

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $n = 1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

donc $P(1)$ est vraie. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

Exemple 2 :

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$, On a

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1,$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k.$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'.$$

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8\left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times k'' \\ &= 17k' \text{ avec } k' = (8k + k'') \end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exemple 3 : Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > -1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$