Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Siences et Technologie
1ère année Ingénieurs(ST+TM) et LMD

Année universitaire : 2026-2027
Module : Algèbre 01

***Série de TD n° 01* :(02 séances)**

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{x} \leq 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 2$
3. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, xy = 0$
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n + m > 0$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par un raisonnement direct que :

$$n \text{ est impair} \Rightarrow (n^2 - 1) \text{ est divisible par } 8.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer par contraposition que :

$$(x \neq 2y) \ \Rightarrow\ (x^2 - xy - 2y^2 \neq 0).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que :

$$\frac{6n + 3}{(n + 2)^2} \leq 1.$$

4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que

$$\Big(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y\Big) \implies x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1).$$

Exercice 3. Montrer par récurrence :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 5 divise $(6^n - 1)$.

(Tournez la page)

Exercices supplémentaires (Laissés aux étudiants) :

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

1) $(2 < 3) \wedge (2 \ \ divise \ \ 4)$; 2)$(9 = 2^3) \vee (6 \ \ est \ impair)$

3) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*; xy = 1$; 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; xy > 0$;

5)$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x + y > 0$, 6)$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

Exercice 5. Soient P, Q et R trois propositions. En utilisant la table de vérité, montrer que :

1. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$
2. $non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
3. $\overline{P \vee (Q \wedge R)} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et considérons la proposition

$$S : (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2).$$

a) Donner la négation de la proposition S.
b) Montrer que la proposition S est vraie.

Exercice 6.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En utilisant le raisonnement direct, montrer que

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que

$$\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Montrer par contraposition que

$$(x \neq 2) \wedge (y \neq 1) \Longrightarrow xy - x - 2y \neq -2.$$

Exercice 7. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ divisible par 9.
3. On considère les propositions suivantes :

$$P(n) : (4^n - 1 \ \ \text{divisible par} \ \ 3)$$

$$Q(n) : (4^n + 1 \ \ \text{divisible par} \ \ 3)$$

a)Montrer que $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.
b)Montrer que $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
c)Que peut-on dire de $Q(n)$?.