Corrigé de la série de TD n°01-Algèbre 01

Exercice 1

1. Vrai ou faux avec la négation

1. La proposition $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} \leq 1$ est fausse (car pour $x = \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{x} = 2 > 1$.)
Sa négation est :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} > 1}.$$

2. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y = 2$ est vraie (Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre $y = 2 - x$).
Sa négation est :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \neq 2}.$$

3. La proposition $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R}^*, \quad xy = 0$ est fausse.
Sa négation est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad xy \neq 0}.$$

4. La proposition $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad n + m > 0$ est vraie.
Sa négation est :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}, \quad n + m \leq 0}.$$

Exercice 2

1. Méthode directe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k+1). \end{aligned}$$

Comme k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc leur produit est pair. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $k(k + 1) = 2p$.
Ainsi,

$$n^2 - 1 = 8p.$$

Donc 8 divise $(n^2 - 1)$.

2. Démonstration par contraposition

On veut montrer que

$$(x \neq 2y) \Rightarrow (x^2 - xy - 2y^2 \neq 0).$$

La contraposée est

$$(x^2 - xy - 2y^2 = 0) \Rightarrow (x = 2y).$$

Or,

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x - 2y)(x + y).$$

Si $x^2 - xy - 2y^2 = 0$, alors

$$(x - 2y)(x + y) = 0.$$

Donc $x = 2y$ ou $x = -y$. Puisque $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x > 0$ et $y > 0$, donc $x = -y$ est impossible. Ainsi, $x = 2y$. La contraposée est démontrée, donc

$$\boxed{x \neq 2y \Rightarrow x^2 - xy - 2y^2 \neq 0}.$$

3. Démonstration par l'absurde

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons, par l'absurde, que

$$\frac{6n + 3}{(n + 2)^2} > 1.$$

Comme $(n + 2)^2 > 0$, on obtient

$$6n + 3 > (n + 2)^2.$$

Donc

$$6n + 3 > n^2 + 4n + 4,$$

d'où

$$n^2 - 2n + 1 < 0.$$

Ainsi,

$$(n - 1)^2 < 0,$$

Contradiction puisque le carré d'un réel est toujours positif ou nul.
Par conséquent,

$$\boxed{\frac{6n + 3}{(n + 2)^2} \leq 1}.$$

Exercice 4

1. Démonstration par récurrence

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2.$$

Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2$$

et

$$(1 - 1)2^2 + 2 = 2.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.
Supposons que, pour un $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n - 1)2^{n+1} + 2.$$

Et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = ((n + 1) - 1)2^{(n+1)+1} + 2.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= 2n\,2^{n+1} + 2 \\ &= n2^{n+2} + 2 \\ &= ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2.\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2}.$$

2. Démonstration par récurrence

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5 \mid (6^n - 1).$$

Pour $n = 1$,

$$6^1 - 1 = 5.$$

Donc 5 divise $(6^1 - 1)$.

Supposons que 5 divise $(6^n - 1)$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$6^n - 1 = 5k.$$

Et montrons que, il existe alors $l \in \mathbb{Z}$ tel que

$$6^{n+1} - 1 = 5l.$$

On a

$$\begin{aligned}6^{n+1} - 1 &= 6 \cdot 6^n - 1 \\ &= 6(6^n - 1) + 5 \\ &= 30k + 5 \\ &= 5(6k+1) = 5l, \qquad l = 6k + 1 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ainsi, 5 divise $(6^{n+1} - 1)$. La propriété est donc vraie.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5 \mid (6^n - 1)}.$$