Série 02 : La théorie des ensembles et les relations binaires : (03 Séances)

Exercice 1 : Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$, on considère les parties suivantes :

$A = \{x \in E |\ \ x \text{ est divisible par } 2\}$ et $B = \{x \in E |\ x \text{ est divisible par } 3\}$

$C = \{1, 2, 3\}$ et $D = \{a, b\}$

1. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$
2. Déterminer les complémentaires $C_E A$, $C_E B$, $C_E A \cup B$
3. Déterminer $A \triangle B$
4. Déterminer $\mathcal{P}(C)$(l'ensemble des parties de C), puis calculer $C \times D$
5. Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble F, montrer que :
   (a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_F B$
   (b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Exercice 2 :

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\Re$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \Re y \Leftrightarrow xy > 0$, montrer que $\Re$ n'est pas réflexive.
2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $S : \forall x, y \in \mathbb{R},\ xSy \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$, montrer que S n'est pas symétrique.
3. Sur $\mathbb{Z}$, on définit $T : \forall x, y \in \mathbb{Z},\ aTb \Leftrightarrow a + b \text{ est pair}$, montrer que T n'est pas antisymétrique.
4. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \Leftrightarrow |x - y| < 1$, montrer que R n'est pas transitive.

Exercice 3 : On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par :

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 0$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la classe d'équivalence. $\overline{a}$

Exercice 4 :

I) On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation R par : $aRb \Leftrightarrow a < b + 1$

1. Montrer que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$
2. Cet ordre est-il total ?

II) On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation d'ordre T par : $aTb \iff a = b$ ou $|a| < |b|$.

1. Étudier la nature de cet ordre (total ou partiel)