Université Abderrahmane MIRA-Béjaia

1ère année ingénieurs : ST+TM — *Année : 2026/2027*

Module : Algèbre 01 — *Semestre : 01*

Série de TD n°02 :Ensembles-Relations binaires(03 séances)

Exercice 1.

1. Soient E un ensemble non vide, et A, B, C et D des parties de E. Montrer que :
   (a) $A \cap B = \varnothing \implies A \subseteq C_E B$
   (b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
2. Simplifier les expression suivantes :
   (a) $\overline{A} \cap (B \cup A)$.
   (b) $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap A)}$.
3. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.
   (a) Donner l'ensemble $E \times E$.
   (b) Déterminer les ensembles

$$A = \{(i,j) \in E \times E \mid i < j\}, \quad B = \{(i,j) \in E \times E \mid i > j\}, \quad C = \{(i,j) \in E \times E \mid i = j\}.$$

   (c) Montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation R par :

$$(x,y)\, R\, (x',y') \iff x + y = x' + y'.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

Exercice 3. Soit T la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\, T\, y \iff \exists k \in \mathbb{Z} :\ x + 4y = 5k.$$

1. Montrer que T est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Pour $a \in \mathbb{Z}$ déterminer la classe d'équivalence de a et en déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/T$.

Exercice 4.

1. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire R par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

   Montrer que :
   (a) R n'est pas symétrique.
   (b) R n'est pas antisymétrique.
2. On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire S par :

$$\forall x, y \in]\tfrac{1}{2}, +\infty[, \quad xSy \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

   (a) Montrer que S est une relation d'ordre.
   (b) Cet ordre est-il total ?