Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2026–2027

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

✠– Série de TD numéro 1–✠

Exercice 1 : Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure, la borne supérieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

1. $[-3;10]$, 2. $]-1;15[$, 3. $[-4;4]\cap\mathbb{Z}$ 4. $\mathbb{N}$, 5. $A=\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\}$,
6. $B=\{(-1)^n+\frac{1}{n^2};\ n\in\mathbb{N}^*\}$, 7. $C=\{\frac{1}{2x+1};\ x\in\ [0;1]\}$, 8. $D=\{x\in\mathbb{R}\ /x^2-4x+3<0\}$.

Exercice 2 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $A\subset B$ alors $\sup(A)\leq\sup(B)$, 2. $A\subset B$ alors $\inf(A)\leq\inf(B)$,
3. $A\cup B$ est borné, 4. $\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$,
5. $\inf(A\cup B)=\max(\inf(A),\inf(B))$, 6. $\sup(-A)=-\inf(A)$.

Exercice 3

a. Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :
   1. $3+|x-2|$, 2. $|x+2|+|3x-6|$, 3. $|x+10|$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   1. $|x+3|\leq 5$, 2. $|3x-6|\leq|x+2|$, 3. $|x+3|\geq 7$, 4. $|x+4|=5$.

Exercice 4

a. Évaluer les expressions suivantes :‘
   1. $[\frac{2}{3}]$, 2. $[\pi]$ 3. $[-\frac{3}{4}]$.

b. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$.
   • Simplifier $[x+k]$.
   • Résoudre $[x]=4$, $[2x-1]+1=0$, $[2x+1]=[x+4]$, $[x]=2x-1$, $[x]=-2$.

c. Tracer graphiquement la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2026–2027

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 1–✠

Exercice 1 : Majorants, Minorants, Sup, Inf, Max et Min :

1. L'ensemble $[-3;10]$ admet $[10;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-3]$ comme ensemble des minorants, $\sup([-3;10]) = 10$, $\inf([-3;10]) = -3$, $\max([-3;10]) = 10$ et $\min([-3;10]) = -3$.
2. L'ensemble $]-1;15[$ admet $[15;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-1]$ comme ensemble des minorants, $\sup(]-1;15[) = 15$, $\inf(]-1;15[) = -1$, $\max(]-1;15[)$ et $\min(]-1;15[)$ n'existent pas.
3. Comme $[-4;4] \cap \mathbb{Z} = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, alors il admet $[4;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-4]$ comme ensemble des minorants, $\sup([-4;4]\cap\mathbb{Z}) = 4$, $\inf([-4;4]\cap\mathbb{Z}) = -4$, $\max([-4;4]\cap\mathbb{Z}) = 4$ et $\min([-4;4]\cap\mathbb{Z}) = -4$.
4. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'admet pas de majorants, l'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est l'intervalle $]-\infty;0]$, $\inf(\mathbb{N}) = 0$, $\sup(\mathbb{N})$ n'existe pas, $\max(\mathbb{N})$ n'existe pas, $\min(\mathbb{N}) = 0$.
5. Pour l'ensemble $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ est strictement décroissante, ayant 1 comme valeur maximale et tend vers 0 quant n tend vers l'infini. Alors A admet $[1;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;0]$ comme ensemble des minorants, $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$, $\max(A) = 1$ et $\min(A)$ n'existe pas.
6. Pour l'ensemble $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n \in \{-1,1\}$ et $\frac{1}{n^2}$ est strictement décroissante. On peut calculer les premiers termes comme suit :
   - Pour $n=1$: $(-1)^1 + \frac{1}{1^2} = -1+1 = 0$.
   - Pour $n=2$: $(-1)^2 + \frac{1}{2^2} = 1 + 0.25 = 1.25$.
   - Pour $n=3$: $(-1)^3 + \frac{1}{3^2} = -1 + \frac{1}{9} \approx -0.888$.
   - Pour $n=4$: $(-1)^4 + \frac{1}{4^2} = 1 + 0.0625 = 1.0625$.

   Analyse par parité :

   • Si n est **pair** : $B = 1 + \frac{1}{n^2}$, alors $B \subset]1, 1.25]$ et si n est **impair** : $B = -1 + \frac{1}{n^2}$, alors $B \subset]-1, 0] \implies B \subset]-1,0] \cup]1, 1.25]$. Donc B admet $[\frac{5}{4};+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-1]$ comme ensemble des minorants, $\sup(B) = \frac{5}{4}$, $\inf(B) = -1$, $\max(B) = \frac{5}{4}$ et $\min(B)$ n'existe pas car $-1 \notin B$.
7. Pour l'ensemble $C = \{\frac{1}{2x+1};\ x \in\ [0;1]\}$ on a $x \in\ [0;1]\} \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2 \Rightarrow 1 \le 2x+1 \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{2x+1} \le 1$. Donc C admet $[1;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;\frac{1}{3}]$ comme ensemble des minorants, $\sup(B) = 1$, $\inf(B) = \frac{1}{3}$, $\max(B) = 1$ et $\min(B) = \frac{1}{3}$.

8. $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 4x + 3 < 0\}$. $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0$.
Pour l'expression $(x-1)(x-3) < 0$, on peut tracer le tableau pour voir facilement les signes.

x	$]-\infty, 1[$	$]1, 3[$	$]3, +\infty[$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Donc $x^2 - 4x + 3 < 0 \implies x \in]1, 3[\implies D =]1, 3[$.
L'ensemble D admet $[3; +\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty; 1]$ comme ensemble des minorants, $\sup(D) = 3$, $\inf(D) = 1$, $\max(D)$ n'existe pas car $3 \notin D$ et $\min(D)$ n'existe pas car $1 \notin D$

Exercice 2 : Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors :
1. $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ (**vraie**) *car tout majorant de B est un majorant de A.*
2. $A \subset B$ alors $\inf(A) \leq \inf(B)$ (**fausse**). *Comme contre exemple on peut prendre* $(A = [1, 2]) \subset (B = [0, 3])$. *On a bien* $(\inf(A) = 1) > (\inf(B) = 0)$.
3. $A \cup B$ est borné (**vraie**) *car $A \cup B$ est majoré par le maximum des majorants et minoré par le minimum des minorants.*
4. $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ (**vraie**) *car la borne supérieur de l'union est le maximum des deux bornes supérieures.*
5. $\inf(A \cup B) = \max(\inf(A), \inf(B))$ (**fausse**). *En réalité* $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
6. $\sup(-A) = -\inf(A)$ (**vraie**). *En effet le plus petit majorant de $-A$ est l'opposé du plus grand minorant de A.*

Exercice 3 :
a. Expressions sans valeur absolue :

1. Pour l'expression $3 + |x-2|$ on a :
$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} \Rightarrow 3 + |x-2| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -x+5 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$
2. Pour l'expression $|x+2| + |3x-6|$ on a : $|x+2|$ change le signe en -2 et $|3x-6|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty, -2]$	$[-2, 2]$	$[2, +\infty[$
x	$x \leq -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert 3x-6 \rvert$	$-3x+6$	$-3x+6$	$3x-6$
$\lvert x+2 \rvert + \lvert 3x-6 \rvert$	$-4x+4$	$-2x+8$	$4x-4$

Donc $|x+2| + |3x-6| = \begin{cases} -4x+4 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -2] \\ -2x+8 & \text{si} \quad x \in [-2, 2] \\ 4x-4 & \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}$

3. Pour l'expression $|x+10|$ on a : $|x+10| = \begin{cases} x+10 & \text{si} \quad x \geq -10 \\ -x-10 & \text{si} \quad x < -10 \end{cases}$

b. Résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

1. $|x+3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x+3 \leq 5 \Rightarrow -8 \leq x \leq 2$.
   On peut utiliser le fait que $|x+3|$ change de signe en -3 comme suit :
   $$|x+3| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \leq 5 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ -x-3 \leq 5 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ x \geq -8 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

2. $|3x-6| \leq |x+2|$. on a : $|x+2|$ change le signe en -2 et $|3x-6|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty,-2]$	$[-2,2]$	$[2,+\infty[$
x	$x \leq -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\|3x-6\|$	$-3x+6$	$-3x+6$	$3x-6$

   Donc $|3x-6| \leq |x+2| \Rightarrow \begin{cases} -3x+6 \leq -x-2 & \text{si} \quad x \in]-\infty,-2] \\ -3x+6 \leq x+2 & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 3x-6 \leq x+2 & \text{si} \quad x \in [2,+\infty[\end{cases}$
   $\Rightarrow \begin{cases} -2x+8 \leq 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty,-2] \\ -4x+4 \leq 0 & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 2x-8 \leq 0 & \text{si} \quad x \in [2,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 & \text{si} \quad x \in]-\infty,-2] \\ x \geq 1 & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ x \leq 4 & \text{si} \quad x \in [2,+\infty[\end{cases}$.
   • $x \geq 4$ et $x \leq -2$ sont incompatibles, donc aucune solution
   • $x \geq 1$ et $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ la solution est $[-2;2] \cap [1;+\infty[= [1;2]$.
   • $x \leq 4$ et $x \geq 2 \Rightarrow$ la solution est $]-\infty;4] \cap [2;+\infty[= [2;4]$. Donc la solution globale est $[1;2] \cup [2;4] = [1;4]$.

3 $|x+3| \geq 7$.
$$|x+3| \geq 7 \Rightarrow x+3 \leq -7 \quad \text{ou} \quad x+3 \geq 7$$
$$\Rightarrow x \leq -10 \quad \text{ou} \quad x \geq 4$$
   Avec la méthode par cas :
$$|x+3| \geq 7 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 7 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ -x-3 \geq 7 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ x \leq -10 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$
   Solution : $]-\infty,-10] \cup [4,+\infty[$

4. $|x+4| = 5$
$$|x+4| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x+4 = 5 & \text{si} \quad x \geq -4 \\ -x-4 = 5 & \text{si} \quad x < -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{si} \quad x \geq -4 \\ x = -9 & \text{si} \quad x < -4 \end{cases}$$

Exercice 4 :

a. 1. $[\frac{2}{3}] = 0$ car $0 \leq \frac{2}{3} < (1 = 0+1)$, 2. $[\pi] = 3$, 3. $[-\frac{3}{4}]$ = -1, car -1$\leq -\frac{3}{4} < (0 = -1+1)$.

b. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   • Simplification de $[x+k]$. Posons n= [x] $\Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow$
   $n+k \leq x+k < n+1+k$. Or $n+k \in \mathbb{Z}$, alors $[x+k] = n+k = [x]+k$.
   • Résolution de : $[x] = 4$, $[2x-1]+1 = 0$, $[x] = 2x-1$ et $[x] = -2$.
   ▷ $[x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$, donc la solution est $S = [4,\ 5[$.

▷ $[2x-1]+1=0 \Rightarrow [2x-1]=$ -1 $\Rightarrow -1 \leq 2x-1<0 \Rightarrow 0 \leq 2x<1 \Rightarrow 0 \leq x<\frac{1}{2}$, donc la solution est $S=[0,\ \frac{1}{2}[$.
▷ $[x]=2x-1$. Posons n = [x] $\Rightarrow n \leq x<n+1$, avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $[x]=2x-1 \Leftrightarrow$ n = 2x-1, donc $x=\frac{n+1}{2}$. Comme $n \leq x<n+1$, alors $n \leq \frac{n+1}{2}<n+1$. Alors

$$\begin{cases} n \leq \frac{n+1}{2} \implies 2n \leq n+1 \implies n \leq 1, \\ \frac{n+1}{2}<n+1 \implies n+1<2n+2 \implies -1<n. \end{cases}$$ Donc $n \in \{0,1\}$.

Comme $x=\frac{n+1}{2}$, alors la solution de l'équation $[x]=2x-1$ est $S=\{\frac{1}{2},1\}$.
▷ $[x]=$ -2. Par définition $[x]=n \Leftrightarrow n \leq x<n+1$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Donc $[x]=$ -2 $\Leftrightarrow$ $-2 \leq x<(-1=-2+1) \Rightarrow S=[-2,-1[$.

c. La Figure ci-dessous montre la graphe de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

