Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2026–2027

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(2x+1) = E(x+4)$.
Rappel : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $E(t) = n \iff n \leq t < n+1$ et pour tout entier relatif $k \in \mathbb{Z}$: $\boxed{E(t+k) = E(t) + k}$.

Étape 1 : Poser $n = E(x)$ et $p = x - E(x)$.
On écrit $x = n + p, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq p < 1$.

Étape 2 : Calculer $E(2x+1)$.
On a $x = n + p, \quad 0 \leq p < 1 \implies 2x = 2n + 2p \implies 2x + 1 = 2n + 1 + 2p, \quad 0 \leq 2p < 2$.
Deux cas se présentent :
$E(2x+1) = E([2n+1] + 2p) = E(2n+1) + E(2p)$. Comme $2n + 1 \in \mathbb{Z}$, alors $E(2n+1) = 2n + 1$. Donc $E(2x+1) = \begin{cases} 2n + 1 + E(2p) & \text{avec } 0 \leq p < \frac{1}{2} \quad \text{(Cas A)}, \\ 2n + 1 + E(2p) & \text{avec } \frac{1}{2} \leq p < 1 \quad \text{(Cas B)} \end{cases} =$

$\begin{cases} 2n+1 & \text{avec } 0 \leq p < \frac{1}{2} \quad \text{(Cas A)}, \\ 2n+2 & \text{avec } \frac{1}{2} \leq p < 1 \quad \text{(Cas B)} \end{cases}$ car $\begin{cases} \text{si } 0 \leq 2p < 1 & E(2p) = 0 \quad \text{(Cas A)}, \\ \text{si } 1 \leq 2p < 2 & E(2p) = 1 \quad \text{(Cas B)}. \end{cases}$

Étape 3 : Calculer $E(x+4)$.
Comme $n + 4 \in \mathbb{Z}$, alors $E(x+4) = n + 4$.

Étape 4 : Résoudre dans chaque cas.

• **Cas A** $(0 \leq p < \frac{1}{2})$: $2n + 1 = n + 4 \iff n = 3$.
Comme $x = n + p$ et $0 \leq p < \frac{1}{2}$, alors $x = 3 + p \quad$ et $\quad 0 + 3 \leq 3 + p < \frac{1}{2} + 3 \implies x \in \left[3, \frac{7}{2}\right[$.

• **Cas B** $(\frac{1}{2} \leq p < 1)$: $2n + 2 = n + 4 \iff n = 2$.
Comme $x = n + p$ et $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors $x = 2 + p \quad$ et $\quad 2 + \frac{1}{2} \leq 2 + p < 1 + 2 \implies x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right[$. **Étape 5 : Réunion des solutions.**

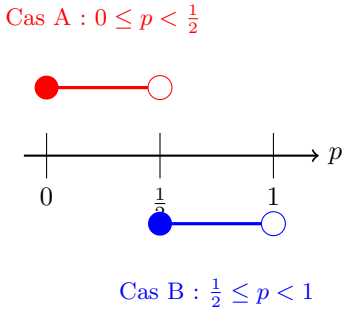
$S = \left[\frac{5}{2}, 3\right[\cup \left[3, \frac{7}{2}\right[= \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[$.

Vérification:

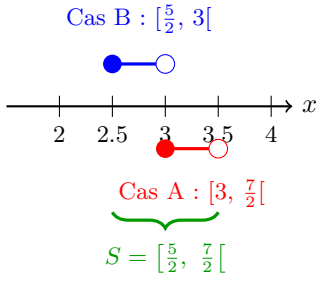
x	$E(2x+1)$	$E(x+4)$	Égalité ?
2,5	$E(6) = 6$	$E(6{,}5) = 6$	✓
2,8	$E(6{,}6) = 6$	$E(6{,}8) = 6$	✓
3	$E(7) = 7$	$E(7) = 7$	✓
3,4	$E(7{,}8) = 7$	$E(7{,}4) = 7$	✓
3,5	$E(8) = 8$	$E(7{,}5) = 7$	×
2,4	$E(5{,}8) = 5$	$E(6{,}4) = 6$	×

$\boxed{S = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[}$

Représentation graphique des deux cas.



(a) Découpage de p dans $[0, 1[$.



(b) Solutions sur la droite réelle.