Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2026–2027

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

✠– Série de TD numéro 1–✠

Exercice 1 : Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure, la borne supérieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

1. $[-5;8]$, 2. $]-2;7[$, 3. $[-3;3]\cap\mathbb{Z}$ 4. $\mathbb{Z}$, 5. $A=\{\frac{1}{2n};\ n\in\mathbb{N}^*\}$,
6. $B=\{(-1)^n+\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\}$, 7. $C=\{\frac{1}{3x+2};\ x\in\ [0;2]\}$, 8. $D=\{x\in\mathbb{R}\ /x^2-5x+4<0\}$.

Exercice 2 Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $A\subset B$ alors $\sup(A)\leq\sup(B)$, 2. $A\subset B$ alors $\inf(A)\geq\inf(B)$,
3. $A\cap B$ est borné, 4. $\sup(A\cap B)=\min(\sup(A),\sup(B))$,
5. $\inf(A\cap B)=\max(\inf(A),\inf(B))$, 6. $\inf(-A)=-\sup(A)$.

Exercice 3

a. Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :
1. $5+|x-3|$, 2. $|x+1|+|2x-4|$, 3. $|x-7|$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
1. $|x+2|\leq 6$, 2. $|2x-4|\leq|x+1|$, 3. $|x-3|\geq 5$, 4. $|x+1|=4$.

Exercice 4

a. Évaluer les expressions suivantes :
1. $[\frac{5}{3}]$, 2. $[\pi]$ 3. $[-\frac{7}{4}]$.

b. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$.
- Simplifier $[x-k]$.
- Résoudre $[x]=3$, $[2x+1]$-1 $=0$, $[x]=3x-2$, $[x]=-3$.

c. Tracer graphiquement la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2026–2027

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

✠– Corrigé de la Série de TD –✠

Exercice 1 : Majorants, Minorants, Sup, Inf, Max et Min :

1. L'ensemble $[-5;8]$ admet $[8;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-5]$ comme ensemble des minorants, $\sup([-5;8]) = 8$, $\inf([-5;8]) = -5$, $\max([-5;8]) = 8$ et $\min([-5;8]) = -5$.
2. L'ensemble $]-2;7[$ admet $[7;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-2]$ comme ensemble des minorants, $\sup(]-2;7[) = 7$, $\inf(]-2;7[) = -2$, $\max(]-2;7[)$ et $\min(]-2;7[)$ n'existent pas (bornes exclues).
3. Comme $[-3;3] \cap \mathbb{Z} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, alors il admet $[3;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-3]$ comme ensemble des minorants, $\sup([-3;3]\cap\mathbb{Z}) = 3$, $\inf([-3;3]\cap\mathbb{Z}) = -3$, $\max([-3;3]\cap\mathbb{Z}) = 3$ et $\min([-3;3]\cap\mathbb{Z}) = -3$.
4. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'admet pas de majorants ni de minorants, donc $\sup(\mathbb{Z})$, $\inf(\mathbb{Z})$, $\max(\mathbb{Z})$ et $\min(\mathbb{Z})$ n'existent pas.
5. Pour l'ensemble $A = \{\frac{1}{2n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n}$ est strictement décroissante, ayant $\frac{1}{2}$ comme valeur maximale et tend vers 0 quant n tend vers $+\infty$. Alors A admet $[\frac{1}{2};+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;0]$ comme ensemble des minorants, $\sup(A) = \frac{1}{2}$, $\inf(A) = 0$, $\max(A) = \frac{1}{2}$ et $\min(A)$ n'existe pas car $0 \notin A$.
6. Pour l'ensemble $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n \in \{-1,1\}$ et $\frac{1}{n}$ est strictement décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut calculer les premiers termes comme suit :
   - Pour $n=1$: $(-1)^1 + \frac{1}{1} = -1+1 = 0$.
   - Pour $n=2$: $(-1)^2 + \frac{1}{2} = 1 + 0.5 = 1.5$.
   - Pour $n=3$: $(-1)^3 + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3}$
   - Pour $n=4$: $(-1)^4 + \frac{1}{4} = 1 + 0.25 = 1.25$.

   Analyse par parité :
   - Si n est **pair** : $B = 1 + \frac{1}{n} \implies B \in]1, 1.5]$ avec 1.5 est obtenu pour $n=2$ et 1 est la limite de $1+\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.
   - Si n est **impair** : $B = -1 + \frac{1}{n} \implies B \in]-1, 0]$ avec 0 est obtenu pour $n=1$ et -1 est la limite de $-1+\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini. Dans le deux cas $B \subset]-1,0] \cup]1,1.5]$.

   Donc B admet $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-1]$ comme ensemble des minorants, $\sup(B) = \frac{3}{2}$, $\inf(B) = -1$, $\max(B) = \frac{3}{2}$ et $\min(B)$ n'existe pas car $-1 \notin B$.

7. Pour l'ensemble $C = \{\frac{1}{3x+2};\ x \in\ [0;2]\}$ on a $x \in\ [0;2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow 2 \leq 3x+2 \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{3x+2} \leq \frac{1}{2}$. Donc C admet $[\frac{1}{2}; +\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty; \frac{1}{8}]$ comme ensemble des minorants, $\sup(C) = \frac{1}{2}$, $\inf(C) = \frac{1}{8}$, $\max(C) = \frac{1}{2}$ et $\min(C) = \frac{1}{8}$.
8. $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 5x + 4 < 0\}$. $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) < 0$.
Pour l'expression $(x-1)(x-4) < 0$, on peut tracer le tableau pour voir facilement les signes.

x	$]-\infty, 1[$	$]1, 4[$	$]4, +\infty[$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Donc $x^2 - 5x + 4 < 0 \implies x \in]1, 4[\implies D =]1, 4[$.
L'ensemble D admet $[4; +\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty; 1]$ comme ensemble des minorants, $\sup(D) = 4$, $\inf(D) = 1$, $\max(D)$ n'existe pas car $4 \notin D$ et $\min(D)$ n'existe pas car $1 \notin D$.

Exercice 2 : Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors :
1. $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$ (**vraie**) *car tout majorant de B est un majorant de A.*
2. $A \subset B$ alors $\inf(A) \geq \inf(B)$ (**vraie**). *Tout minorant de B est un minorant de A.*
3. $A \cap B$ est borné (**vraie**) *car $A \cap B \subset A$ et A est borné.*
4. $\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B))$ (**fausse**). *Contre-exemple : $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$. Alors $A \cap B = \varnothing$, donc $\sup(A \cap B)$ n'existe pas, alors que $\min(\sup A, \sup B) = 1$.*
5. $\inf(A \cap B) = \max(\inf(A), \inf(B))$ (**fausse**). *Même contre-exemple : $A \cap B = \varnothing$.*
6. $\inf(-A) = -\sup(A)$ (**vraie**). *En effet le plus grand minorant de $-A$ est l'opposé du plus petit majorant de A.*

Exercice 3 :
a. Expressions sans valeur absolue :
1. Pour l'expression $5 + |x-3|$ on a :
$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \Rightarrow 5 + |x-3| = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -x+8 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$
2. Pour l'expression $|x+1| + |2x-4|$ on a : $|x+1|$ change le signe en -1 et $|2x-4|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty, -1]$	$[-1, 2]$	$[2, +\infty[$
x	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert 2x-4 \rvert$	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$
$\lvert x+1 \rvert + \lvert 2x-4 \rvert$	$-3x+3$	$-x+5$	$3x-3$

Donc $|x+1| + |2x-4| = \begin{cases} -3x+3 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ -x+5 & \text{si} \quad x \in [-1, 2] \\ 3x-3 & \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}$

3. Pour l'expression $|x-7|$ on a : $|x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x \geq 7 \\ -x+7 & \text{si} \quad x < 7 \end{cases}$

b. Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations et inéquations suivantes :

1. $|x+2| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x+2 \leq 6 \Rightarrow -8 \leq x \leq 4$.
   On peut utiliser le fait que $|x+2|$ change de signe en -2 comme suit :
   $|x+2| \leq 6 \Rightarrow \begin{cases} x+2 \leq 6 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -x-2 \leq 6 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ x \geq -8 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$ Solution :
   $S = [-8; 4]$.

2. $|2x-4| \leq |x+1|$. On a : $|x+1|$ change le signe en -1 et $|2x-4|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty, -1]$	$[-1, 2]$	$[2, +\infty[$
x	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$

   Donc $|2x-4| \leq |x+1| \Rightarrow \begin{cases} -2x+4 \leq -x-1 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ -2x+4 \leq x+1 & \text{si} \quad x \in [-1, 2] \\ 2x-4 \leq x+1 & \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}$
   $\Rightarrow \begin{cases} -x+5 \leq 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ -3x+3 \leq 0 & \text{si} \quad x \in [-1, 2] \\ x-5 \leq 0 & \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ x \geq 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 2] \\ x \leq 5 & \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{cases}$.
   • $x \geq 5$ et $x \leq -1$ sont incompatibles, donc aucune solution
   • $x \geq 1$ et $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ la solution est $[-1; 2] \cap [1; +\infty[= [1; 2]$.
   • $x \leq 5$ et $x \geq 2 \Rightarrow$ la solution est $]-\infty; 5] \cap [2; +\infty[= [2; 5]$. Donc la solution globale est $[1; 2] \cup [2; 5] = [1; 5]$.

3 $|x-3| \geq 5$.

$$|x-3| \geq 5 \Rightarrow x-3 \leq -5 \quad \text{ou} \quad x-3 \geq 5$$
$$\Rightarrow x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 8$$

   Avec la méthode par cas :

$$|x-3| \geq 5 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 5 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -x+3 \geq 5 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 8 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ x \leq -2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

   Solution : $]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$

4. $|x+1| = 4$

$$|x+1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 = 4 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ x = -5 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

   Solution : $S = \{-5; 3\}$.

Exercice 4 :

a. 1. $[\frac{5}{3}] = 1$ car $1 \leq \frac{5}{3} < (2 = 1+1)$, 2. $[\pi] = 3$, 3. $[-\frac{7}{4}]$ = -2, car -2$\leq -\frac{7}{4} < (-1 = -2+1)$.

b. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   • Simplification de $[x-k]$. Posons n= [x] $\Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow$
   $n-k \leq x-k < n+1-k$. Or $n-k \in \mathbb{Z}$, alors $[x-k] = n-k = [x]-k$.
   • Résolution de : $[x] = 3$, $[2x+1]$-1 $= 0$, $[x] = 3x-2$ et $[x] = -3$.
   ▷ $[x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$, donc la solution est $S = [3,\ 4[$.
   ▷ $[2x+1]$-1 $= 0 \Rightarrow [2x+1] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2x+1 < 2 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$, donc la solution est $S = [0,\ \frac{1}{2}[$.

▷ $[x] = 3x - 2$. Posons n = [x] $\Rightarrow n \leq x < n+1$, avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $[x] = 3x - 2 \Leftrightarrow$ n = $3x - 2$, donc $x = \frac{n+2}{3}$. Comme $n \leq x < n+1$, alors $n \leq \frac{n+2}{3} < n+1$. Alors

$$\begin{cases} n \leq \frac{n+2}{3} \implies 3n \leq n+2 \implies 2n \leq 2 \implies n \leq 1, \\ \frac{n+2}{3} < n+1 \implies n+2 < 3n+3 \implies -1 < 2n \implies n > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$ Donc $n \in \{0, 1\}$.

Comme $x = \frac{n+2}{3}$, alors la solution de l'équation $[x] = 3x - 2$ est $S = \{\frac{2}{3}, 1\}$.

▷ $[x]$ = -3. Par définition $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Donc $[x]$ = -3 $\Leftrightarrow$ $-3 \leq x < (-2 = -3 + 1) \Rightarrow S = [-3, -2[$.

c. La Figure ci-dessous montre la graphe de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

