2.7.3 Suites arithmétiques

Définition 2.10 *Une suite (U_n) est une suite arithmétique, s'il existe un nombre r tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = U_n + r.$$

Le nombre r est appelé raison de la suite (U_n).
(Dans la pratique on calcule $U_{n+1} - U_n$)

Exemple 2.18 *Soient*

$$U_n = 7n + 1,\ n \in \mathbb{N}. \qquad V_n = 5 - 2n,\ n \in \mathbb{N}.$$

$$W_n = n^2 + 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$U_{n+1} - U_n = (7(n+1)+1) - (7n+1) = 7,$$

donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 7$.
Et

$$V_{n+1} - V_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = -2,$$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.
Et

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \left((n+1)^2 + 3\right) - (n^2 + 3) \\ &= 2n + 1 \text{ (quantité variable),} \end{aligned}$$

donc la suite (W_n) n'est pas une suite arithmétique.

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, pour tout $n \geq p$ on a :

$$U_n = U_p + (n - p)\, r$$

donc,

si le premier terme est U_0, on aura : $U_n = U_0 + nr$,

si le premier terme est U_1, on aura : $U_n = U_1 + (n-1)\, r$.

Monotonie des suites arithmétiques

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, donc on a :

si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.

si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.

si $r = 0$, alors la suite (U_n) est stationnaire (constante).

Limites des suites arithmétiques

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p, donc on a :

Si $r > 0$ on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p + (n-p)\, r) = +\infty$, d'où la suite (U_n) est divergente.

Si $r < 0$ on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p + (n-p)\, r) = -\infty$, d'où la suite (U_n) est divergente.

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soient (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1 et

$$S = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n).$$

En général,

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2}.$$

Exemple 2.19

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.7.4 Suites géométriques

Définition 2.11 *Une suite (U_n) est une suite géométrique, s'il existe un nombre q tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = q.U_n.$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemple 2.20 *Soit*

$$U_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}U_n,$$

donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p, pour tout $n \geq p$ on a :

$$U_n = U_p q^{n-p}$$

donc,

si le premier terme est U_0, on aura : $U_n = U_0 q^n$,

si le premier terme est U_1, on aura : $U_n = U_1 q^{n-1}$.

Monotonie des suites géométriques

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 . Pour étudier la monotonie (U_n) il suffit d'étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$, on a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= U_0 q^{n+1} - U_0 q^n \\ &= U_0 q^n (q-1). \end{aligned}$$

Si $U_0 q^n (q-1) > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.

Si $U_0 q^n (q-1) < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.

Si $U_0 q^n (q-1) = 0$, alors la suite (U_n) est stationnaire (constante).

Limites des suites géométriques

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0, donc on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n)$.

Si $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$),
d'où la suite (U_n) est convergente.

Si $q = 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = U_0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$), d'où la suite (U_n) est constante.

Si $q > 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n) = \pm\infty$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$),
d'où la suite (U_n) est divergente.

Si $q \leq -1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 q^n)$ n'existe pas, d'où la suite (U_n) est divergente.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique

Soient (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1 et

$$S = U_1 + U_2 + ... + U_1 = U_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

En général,

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}.$$

Exemple 2.21

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. [redacted]

