3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les fonctions réelles d'une variable réelle, c'est-à-dire les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou sous-ensemble de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions modélisent souvent des phénomènes physiques, chimiques, mécaniques,..

3.2 Fonction réelle à une variable réelle

Définition 3.1 *On appelle fonction réelle à une variable, toute relation f qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f forment l'ensemble de définition (domaine de définition) de f, noté D_f . On écrit :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = y. \end{array} \quad ou \quad f: \begin{array}{ccc} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = y. \end{array}$$

L'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f est :

$$f(D_f) = \operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f : f(x) = y\}$$

Définition 3.2 *On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points $M(x, y)$ où $x \in D_f$ et $y = f(x)$ et on écrit*

$$G_f = \{(x, y) / x \in D_f \ \ et \ \ y = f(x)\}.$$

3.2.1 Opérations sur les fonctions réelles

Définition 3.3 *Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1) On dit que f est égale à g et on écrit : $f = g$ si et seulement si :

$$\forall x \in D : f(x) = g(x).$$

2) On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit : $f \leq g$ si et seulement si :

$$\forall x \in D : f(x) \leq g(x).$$

3) On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit : $f \geq g$ si et seulement si : $\forall x \in D : f(x) \geq g(x)$.

Définition 3.4 *4) La somme :* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$.

5) Le produit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in D$.

6) Le rapport $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D$ *avec* $g(x) \neq 0$.

3.2.2 Composition de fonctions

Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(D) \subset F$.

On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur D par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in D.$$

Exemple 3.1 *Soient*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x. \end{array} \qquad \textit{ou} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{1+x^2}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(e^x) \\ &= \frac{(e^x)+3}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x+3}{1+e^{2x}}, \end{aligned}$$

donc

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+3}{1+e^{2x}}. \end{array}$$

Remarque. Il est clair que $f \circ g \neq g \circ f$.

3.2.3 Parité d'une fonction

Fonction paire

Définition 3.5 *Soit la fonction* f

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f *est paire sur* D *si et seulement si :*

$$\forall x \in D, (-x) \in D : f(-x) = f(x).$$

Remarque *Si $x \in D \Longrightarrow -x \in D$, $\forall x \in D$, l'ensemble D est dit symétrique par rapport à l'origine.*

Exemple 3.2 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^4-3}{x^2+1}. \end{array}$$

Cette fonction est paire car :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) &= \frac{(-x)^4-3}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{x^4-3}{x^2+1} = f(x). \end{aligned}$$

Fonction impaire

Définition 3.6 *Soit la fonction f*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f est impaire sur D si et seulement si :

$$\forall x \in D, (-x) \in D : f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3.3 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Cette fonction est impaire car :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) &= \frac{e^{-x}-e^x}{2} \\ &= -\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

3.2.4 Fonctions périodiques

Définition 3.7 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que f est une fonction période si et seulement si

$$\exists T > 0,\ \forall x \in D:\ f(x+T) = f(x),$$

le plus petit nombre positif T s'appelle la période de la fonction f.

Exemple 3.4 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont $2\pi-$périodique en effet :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x+2\pi) = \sin x, \\ et \\ \forall x \in \mathbb{R}:\ \cos(x+2\pi) = \cos x. \end{array}$$

3.2.5 Monotonie d'une fonction

Définition 3.8 *Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1) On dit que f est croissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

2) On dit que f est strictement croissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3) On dit que f est décroissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

4) On dit que f est strictement décroissante si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3.2.6 Fonctions bornées

Définition 3.9 *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1) On dit que f est majorée sur D si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in D.$$

2) On dit que f est minorée sur D si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in D.$$

3) On dit que f est bornée sur D si f à la fois majorée et minorée, c'est à dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in D.$$

Ou encore

$$\exists k > 0 : |f(x)| \leq k, \ \forall x \in D.$$

Exemple 3.5 *Soient*

$$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad \textit{et} \quad \cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont des fonctions bornées, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin x \leq 1,$$
$$\textit{et}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]