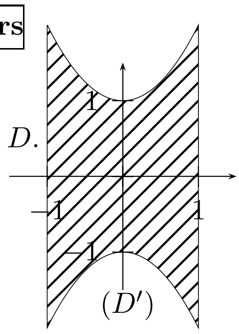
Université A/Mira de Béjaia 11/02/2017.

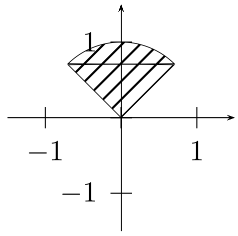
Faculté : ST Examen de Maths 3 .

Départements : ELM- ELT-GC-ATE.

Questions de cours



(D')



Domaine D

Répondre par Vrai au Faux (justifier votre réponse)

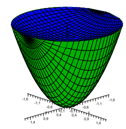
1) $\displaystyle\iint_D x|f(x,y)|dxdy = 0$ où f une fonction continue dans D.

2) $\displaystyle\iint_{D'} ydxdy = 0$

3) $\displaystyle\iiint_\Delta xdxdydz = 0.$

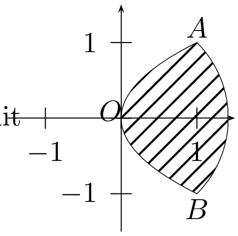
Où le domaine Δ désigne la boule sphérique de centre, l'origine des coordonnées, $O(0;0;0)$ et de rayon 1.

Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}x^n$.


Corps H

4) f est définie en 0.1   5) $f'(0) = 1$

Exercice№1 (9.5pts)



Domaine (T)

Le domaine T est limité par les courbes (OA), (OB) et (AB) définies comme suit

$$(OA) : y = \sqrt{x},\ \ (OB) : y = -\sqrt{x} \text{ et } \ (AB) : x^2 + y^2 = 2.$$

Le corps H est limité par les surfaces (S_1) et (S_2) définies comme suit :

$$(S_1) : x^2 + y^2 = z,\ \ (S_2) : (z-5)^2 + x^2 + y^2 = 9 \text{ (la partie vérifiant } z \leq 5).$$

1) Calculer l'aire des surfaces T et S_1.

2) Calculer le moment d'inertie de la figure homogène T par rapport à (Ox).

3) Calculer le volume de H.

4) Calculer les coordonnées du centre de gravité de H.

Exercice№2 (6pts)

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{t\sin t}dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}dt$

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{t^3-4}}dt$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{t}dt.$

L'eau tombant goutte à goutte, enfin creuse la pierre

proverbe grec

Bon courage

☞Corrigé

Exercice№1

1) Faux ☑. 0.25pt

En justifiant

On pose $A=\{M(x,y)\in(D) \text{ tel que } \ x\leq 0\}$ et $B=\{M(x,y)\in(D) \text{ tel que } \ x\geq 0\}$.

Partageons, d'une manière arbitraire, le domaine D en petits domaines $D_1,\ D_2, ...D_n$.

Sous la condition "$\forall i=1,2,..n\ :\ \text{Aire}(D_i)\to 0$" On a le résultat suivant :

$\displaystyle\iint_D x|f(x,y)|dxdy=\sum_{i=1}^{i=n} x_i|f(x_i,y_i)|\text{Aire}(D_i)$, où $(x_i;y_i)\in(D_i)$ (peut importe sa position dans D_i).

Comme $D=A\cup B$, cette dernière expression prend la forme suivante :

$\displaystyle\iint_D x|f(x,y)|dxdy=\sum_{(x_i;y_i)\in D_i\subset A} x_i|f(x_i,y_i)|\text{Aire}(D_i)+\sum_{(x_i;y_i)\in D_i\subset B} x_i|f(x_i,y_i)|\text{Aire}(D_i)\neq 0$ (car f est quelconque).

0.5pt

2) Vraie ☑. 0.25pt

D'une part,le centre de gravité G de D' se trouve en $(0,0)$ (trivial). D'autre part $y_G=\dfrac{\displaystyle\iint_{D'} ydxdy}{\displaystyle\iint_{D'} dxdy}$. 0.75pt

3) Vraie ☑. 0.25pt

D'une part,le centre de gravité G de Δ se trouve en $(0,0,0)$ (trivial). D'autre part $x_G=\dfrac{\displaystyle\iiint_{\Delta} xdxdydz}{\displaystyle\iint_{\Delta} dxdydz}$. 0.75pt

4) Vraie ☑. 0.25pt

La quantité $f(x)$ s'appelle la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n+1}x^n$. f est définie sur l'intervalle $]-R;R[$ où $R=\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$ avec $a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$. d'où f est définie sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$. 1.5pt

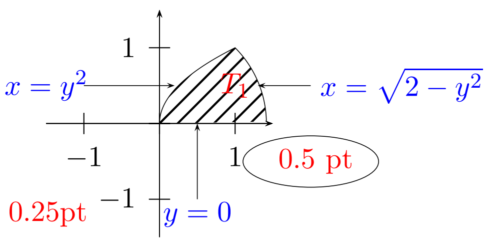
5) Vraie ☑. 0.25pt

$f(x)=1+x+\dfrac{4}{3}x^2+...\Longrightarrow f'(x)=1+\dfrac{8}{3}x+...$ d'où $f'(0)=1$. 0.75pt

Exercice№2

Méthode 1

Schéma sans équations sera noté ☞ 0 pt



1) Aire $(T)=2\displaystyle\iint_{T_1} dxdy$ 0.25pt

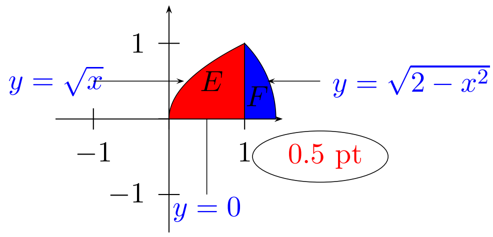
Aire (T)=$2\displaystyle\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} dx\right)dy$ 0.5pt

$=2\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right)dy$ 0.25pt

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2-y^2}dy$, on pose $y=\sqrt{2}\sin t$ où la variable t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$.

Enfin, Aire $(T)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}$.

Une autre Méthode



1) Aire $(T) = 2\left(\iint_E dxdy + \iint_F dxdy\right)$ 0.25pt

$$\text{Aire } (T) = 2\left(\underbrace{\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x}} dy\right)dx}_{0.25\text{pt}} + \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy\right)dx}_{0.25\text{pt}}\right)$$

$$\text{Aire } (T) = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$$

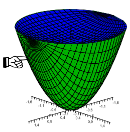
0.25pt

$\boxed{\text{Calculons l'aire de } S_1}$

$$\text{Aire } (S_1)=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

Où (D) le domaine de projection de S_1 sur le plan (Oxy).

Cherchons la courbe d'intersection des deux surfaces S_1 et S_2. 0.25pt

$S_1 : z = x^2+y^2$ 

$(S_1 \cap S_2) \Leftrightarrow (z-5)^2 + z = 9 \Leftrightarrow z^2 - 9z + 16 = 0$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}$ ou $z = \dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$. D'autre part tous les points de (S_1) vérifiant $z \leq 5$. Par conséquent

On accepte uniquement $z = \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}$. 0.5pt

$(S_1 \cap S_2)$ désigne le cercle de centre $\left(0; 0; \dfrac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$ de rayon $\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}}$. 0.25pt

Par conséquent, le domaine (D) désigne le disque de centre $(0;0)$ de rayon $\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}}$. 0.5pt

$$\text{Aire } (S_1) = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

0.5pt

Dans le but de calculer cette intégrale, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ ce qui donne

$$\text{Aire } (S_1) = \iint_D r\sqrt{1+4r^2}drd\theta.$$

0.5pt

$$\text{Aire } (S_1) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\sqrt{1+4r^2}dr\right)d\theta \text{ où } R = \sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$$

0.5pt

L'ntégrale entre parenthèses

$$\int_0^R r\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{1}{8}\int_0^R (1+4r^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4r^2) = \frac{1}{12}(1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}.$$

$$\text{Aire}(S_1) = \frac{\pi}{6}\left((1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)(u.s)$$

.

$\boxed{\text{2) Moment d'inertie de } (T) \text{ par rapport à } (Ox)}$.

$$I_{xx} = \iint_T y^2dxdy.$$

0.25pt

D'après la méthode 1, $I_{xx} = 2\iint_{T_1} y^2dxdy$ 0.5pt

$$I_{xx} = 2\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y^2 dx \right) dy$$ 0.75pt

$$= 2\int_0^1 \left(y^2\sqrt{2-y^2} - y^4 \right) dy$$ 0.5pt

On pose $y = \sqrt{2}\sin t$, comme y varie de 0 à 1, t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 y^2\sqrt{2-y^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t\cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt.$$

3) Calculons le volume de H

$$\text{Volume}(H) = \iiint_H dxdydz.$$ 0.25pt

$$\text{Volume}(H) = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{5-\sqrt{9-x^2-y^2}} dz \right) dxdy$$ 0.5pt

Où $\underbrace{(D)\text{la projection de H sur la plan}(Oxy)}_{0.25pt}$.

$$\text{Volume}(H) = \iint_D \left(5 - \sqrt{9-x^2-y^2} - (x^2+y^2) \right) dxdy$$ 0.25pt

En utilisant les coordonnées polaires

$$\text{Volume}(H) = \iint_D r\left(5 - \sqrt{9-r^2} - r^2 \right) drd\theta.$$ 0.25pt

Le domaine (D) désigne le disque de centre $(0;0)$ de rayon $\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}}$. 0.25pt

$$\text{Volume}(H) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R (5r - r\sqrt{9-r^2} - r^3)dr \right) d\theta.$$ 0.5pt

Il suffit de remarquer :

$$\int_0^R r\sqrt{9-r^2}dr = \frac{-1}{2}\int_0^R (9-r^2)^{\frac{1}{2}} d(9-r^2) \text{ sous la forme } \int X^\alpha dX.$$

$$\text{Volume}(H) = 2\pi \left(-9 + \frac{1}{3}(9-R^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}R^2 - \frac{R^4}{4} \right) (u.v).$$

4) Coordonnées du centre de gravité de H

Soit $G(x_G; y_G; z_G)$ le centre de gravité de H, avec :

$$x_G = \frac{\iiint_H xdxdydz}{\iiint_H dxdydz} \quad y_G = \frac{\iiint_H ydxdydz}{\iiint_H dxdydz} \quad z_G = \frac{\iiint_H zdxdydz}{\iiint_H dxdydz}$$ 0.25pt

$$\iiint_H dxdydz = \text{Volume}(H)$$ 0.25pt

$$\iiint_H xdxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{5-\sqrt{9-x^2-y^2}} xdz \right) dxdy$$

Où (D) la projection de H sur la plan (Oxy)

$$\iiint_H xdxdydz = \iint_D x\left(5 - \sqrt{9-x^2-y^2} - (x^2+y^2) \right) dxdy$$ 0.25pt

En coordonnées polaires :

$$\iiint_H xdxdydz = \iint_D r\cos\theta \left(5 - \sqrt{9-r^2} - r^2 \right) drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\cos\theta \left(5 - \sqrt{9-r^2} - r^2 \right) dr \right) d\theta$$ 0.25pt

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^R r\left(5-\sqrt{9-r^2}-r^2\right)dr\right) = 0, \text{ donc } \boxed{x_G = 0}.$$ 0.25pt

$$\iiint_H ydxdydz = \iint_D y\left(5-\sqrt{9-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\right)dxdy$$ 0.25pt

En coordonnées polaires :

$$\iiint_H ydxdydz = \iint_D r\sin\theta\left(5-\sqrt{9-r^2}-r^2\right)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\sin\theta\left(5-\sqrt{9-r^2}-r^2\right)dr\right)d\theta$$ 0.25pt

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^R r\left(5-\sqrt{9-r^2}-r^2\right)dr\right) = 0, \text{ donc } \boxed{y_G = 0}.$$ 0.25pt

$$\iiint_H zdxdydz = \iint_D \frac{1}{2}\left(\left(5-\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2-(x^2+y^2)^2\right)dxdy$$ 0.25pt

En coordonnées polaires :

$$\iiint_H zdxdydz = \int_0^R 2\pi\left(-r^5-r^3+34r-10r\sqrt{9-r^2}\right)dr$$ 0.25pt

$$\boxed{z_G = \frac{17R^2+\frac{10}{3}(9-R^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{R^6}{6}-\frac{R^4}{4}}{-9+\frac{1}{3}(9-R^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}R^2-\frac{R^4}{4}} \text{ où } R=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}}.$$

Exercice№3

1) Nature de l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{1}{t\sin t}dt$.

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{t\sin t}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{t\sin t}dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{t\sin t}dt$$ 0.25pt

Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{\pi}\frac{1}{t\sin t}dt$ revient à étudier la nature des intégrales $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t\sin t}dt$ et $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{t\sin t}dt$ au voisinage de 0 et π, respectivement.

au voisinage de 0, $\sin t \sim t$ car $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Par conséquent, $\frac{1}{t\sin t} \sim \frac{1}{t^2}$ 0.25pt

Comme l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t^2}dt = +\infty$ est divergente, par équivalence $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t\sin t}dt$ est divergente. 0.25pt

De même, au voisinage de π,

$\sin t \sim \pi - t$ car $\lim_{t\to\pi}\frac{\sin t}{\pi - t} = 1$. Par conséquent, $\frac{1}{t\sin t} \sim \frac{1}{t(\pi-t)}$ 0.25pt

Comme l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{t(\pi-t)}dt = +\infty$ est divergente .

par équivalence $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t\sin t}dt$ est divergente. 0.25pt

en résumé, $\int_0^{\pi}\frac{1}{t\sin t}dt$ diverge (la forme $+\infty+\infty$). 0.25pt

2) Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}=\int_0^1\frac{e^{-t}}{t^3}dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$$ 0.25pt

Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ revient à étudier la nature des intégrales $\int_0^1\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ et $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ au voisinage de 0 et $+\infty$, respectivement.

au voisinage de 0, $e^{-t}\sim e^{-1}$. Par conséquent, $\frac{e^{-t}}{t^3}\sim\frac{e^{-1}}{t^3}$. 0.25pt

Comme l'intégrale $\int_0^1\frac{e^{-1}}{t^3}dt$ est divergente .

par équivalence $\int_0^1\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ est divergente. 0.25pt

D'autre part, $\forall t\in[1,+\infty[$: $e^{-t}\le e^{-1}$. Par conséquent

$\frac{e^{-t}}{t^3}\le\frac{e^{-1}}{t^3}$ 0.25pt

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-1}}{t^3}dt$ est convergente, par comparaison :

L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ est convergente. 0.25pt

En résumé, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^3}dt$ est divergente . 0.25pt

3) Nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{t^3-4}}dt$.

Au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{t^3-4}\sim t^{\frac{3}{2}}$. 0.25pt

Donc :

$\frac{t^2}{\sqrt{t^3-4}}\sim t^{\frac{1}{3}}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}dt$ est divergente. 0.5pt

Par équivalence :

L'intégrale $\int_2^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{t^3-4}}dt$ est divergente. 0.75pt

4) Nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^3 t}{t}dt$.

Calcul direct (intégration par partie) :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^3 t}{t}dt=\int_1^{+\infty}\ln^3 t\,d\ln t=\frac{\ln^4 t}{4}\Big|_1^{+\infty}=+\infty.$$ 1pt

En résumé, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^3 t}{t}dt$ diverge. 0.5pt