

Université A.Mira Béjaia  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Physique

BELHADI Zahir

---

MECANIQUE DU POINT  
Rappels de Cours et Exercices Corrigés

---

Année Universitaire 2016/2017

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Outils Mathématiques et Calcul d’Incertitudes</b>	<b>3</b>
1.1 Analyse vectorielle . . . . .	3
1.2 Incertitudes dans la mesure physique . . . . .	9
1.3 Exercices du chapitre 1 . . . . .	12
<b>2 Cinématique d’un Point Matériel</b>	<b>21</b>
2.1 Mouvement en coordonnées cartésiennes . . . . .	21
2.2 Abscisse curviligne . . . . .	22
2.3 Mouvement en coordonnées polaires et cylindriques . . . . .	23
2.4 Composition des mouvements . . . . .	25
2.5 Exercices du chapitre 2 . . . . .	27
<b>3 Dynamique d’un Point Matériel</b>	<b>34</b>
3.1 Les lois de Newton . . . . .	34
3.2 Quelques forces de la nature . . . . .	35
3.3 La conservation de la quantité de mouvement . . . . .	38
3.4 Exercices du chapitre 3 . . . . .	40
<b>4 Travail et Energie d’un Point Matériel</b>	<b>50</b>
4.1 Travail d’une force . . . . .	50
4.2 Energies cinétique et potentielle . . . . .	52
4.3 Energie mécanique . . . . .	54
4.4 Exercices du chapitre 4 . . . . .	54
<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

---

# Introduction

Le module de la mécanique classique du point est le module fondamental enseigné en physique, cela revient au fait qu'il sert de base aux autres modules. Son champ d'intérêt est l'étude des mouvements des différents objets ainsi que les causes qui les provoquent.

Ce document est un rappel de cours de mécanique avec des exercices corrigés, structuré en quatre chapitres. Le premier est consacré à l'analyse vectorielle et au calcul d'incertitudes dues à la mesure des grandeurs physiques. L'objet du deuxième chapitre est la cinématique du point matériel en s'intéressant au mouvement par rapport à un référentiel sans se soucier des causes. Dans le troisième chapitre, nous présentons le principe fondamental de la dynamique qui renferme le lien étroit entre la force et le déplacement. Pour terminer, le quatrième chapitre introduit les notions du travail et d'énergie afin de montrer comment la conservation d'énergie permet de résoudre des problèmes de mécanique du point.

Tous les chapitres se terminent avec des exercices et des problèmes de mécanique bien choisis, suivis de corrigés détaillés afin de permettre aux utilisateurs de ce document de bien cerner les notions introduites dans la partie contenant les rappels de cours.

Ce document est un support pédagogique destiné aux étudiants de la première année de la licence en physique générale.

---

# Outils Mathématiques et Calcul d'Incertitudes

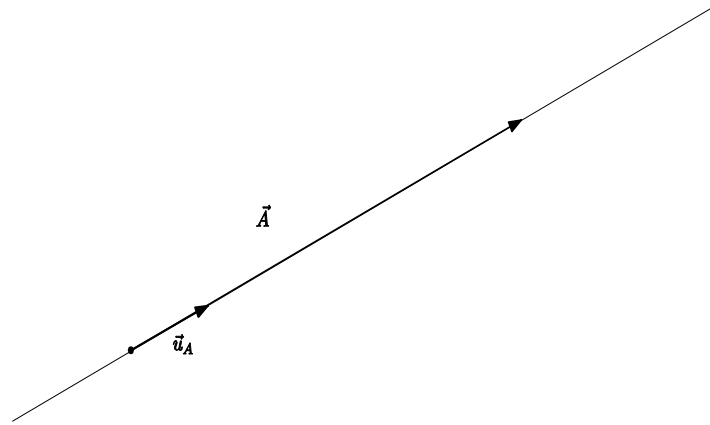
Dans ce chapitre introductif, nous allons d'abord rappeler brièvement les outils mathématiques indispensables pour aborder les problèmes de la mécanique classique. Par la suite, nous nous intéresserons à la méthode d'analyse des incertitudes liées aux erreurs de mesure des grandeurs physiques.

## 1.1 Analyse vectorielle

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions d'analyse vectorielle auxquelles on fait souvent appel en mécanique classique, en raison du fait que dans la version newtonienne de la mécanique, les grandeurs vectorielles jouent un rôle fondamental dans la formulation des lois de la physique.

### Scalars et vecteurs

En physique, certaines grandeurs sont des scalaires, tandis que certaines d'autres sont des vecteurs. Une grandeur scalaire est représentée par un nombre réel comme dans le cas de la température, la chaleur, l'énergie, la pression,... Une grandeur vectorielle est caractérisée par une direction, un sens, un point d'application et un module qui mesure son intensité. A titre d'exemple, la force, le moment cinétique et la quantité de mouvement sont des grandeurs vectorielles.



Le vecteur unitaire  $\vec{u}_A$  porté par le vecteur  $\vec{A}$ .

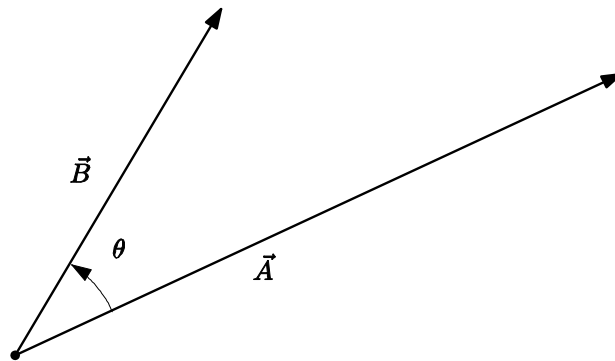
Le vecteur unitaire  $\vec{u}_A$  porté par un vecteur  $\vec{A}$  est le vecteur ayant les mêmes caractéristiques que  $\vec{A}$  mais avec un module égal à un ( $|\vec{u}_A| = 1$ ). Autrement dit,  $\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ , où  $A = |\vec{A}|$  est le module de  $\vec{A}$ .

### Produits scalaire et vectoriel

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un scalaire noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  qui se calcule à l'aide de la formule

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta) \quad \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \leq \pi(\text{rd}) \quad (1.1.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont respectivement les modules des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , et  $\theta$  est l'angle formé par ces derniers.



L'angle  $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$  formé par les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

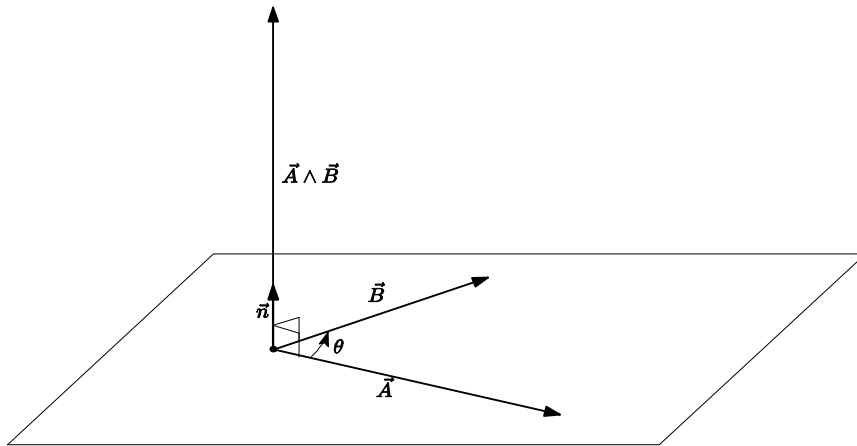
Ce produit vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  ;
2.  $\alpha (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\alpha \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\alpha \vec{B})$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  ;
3.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$  ;
4.  $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$  ;
5.  $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ .

Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur noté  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ , qui est donné par la relation

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \theta \vec{n} \quad \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \leq \pi(\text{rd}) \quad (1.1.2)$$

où  $A$  et  $B$  sont respectivement les modules des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ ,  $\theta$  est l'angle orienté  $(\vec{A}, \vec{B})$  et  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  dont le sens est tel que les trois vecteurs  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{n})$  forment un trièdre direct (voir la figure ci-dessous).



Le produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

Il est clair que

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta \quad \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \leq \pi(\text{rd}) \quad (1.1.3)$$

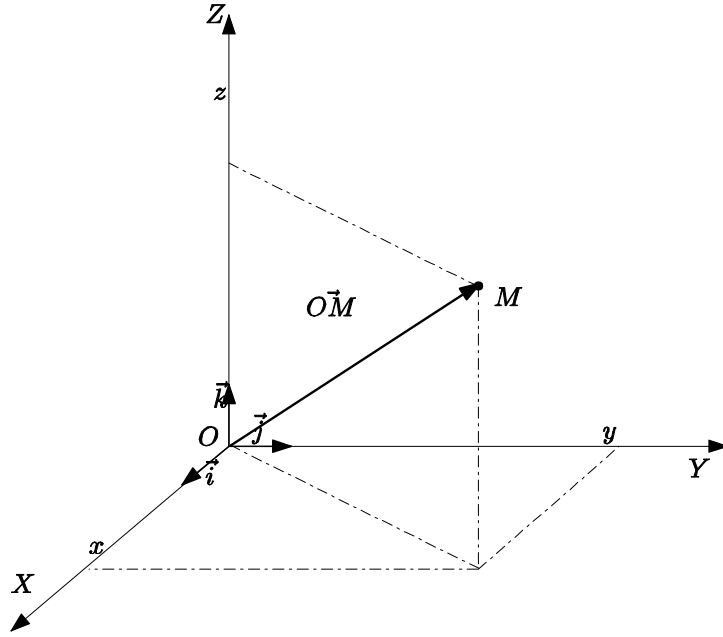
Le produit vectoriel vérifie ces propriétés :

1.  $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ ;
2.  $\alpha (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\alpha \vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (\alpha \vec{B})$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ ;
4.  $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ .

### Coordonnées cartésiennes

Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  trois vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux, centrés en  $O$  de telle sorte que  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ . On dit que  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  si

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.1.4)$$



Représentation des coordonnées cartésiennes du point  $M$ .

D'une façon plus générale, tous les vecteurs de l'espace peuvent être décomposés dans la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'une façon unique comme suit :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

Les  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  sont les trois composantes de  $\vec{A}$  sur les trois axes  $OX$ ,  $OY$  et  $OZ$  dans cet ordre.

En coordonnées cartésiennes, les produits scalaire et vectoriel des deux vecteurs  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  et  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$  ont les expressions suivantes :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1.5)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \quad (1.1.6)$$

Il est possible de se servir de ces relations pour vérifier que

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) \quad (1.1.7)$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (1.1.8)$$

## Champs scalaire et vectoriel

Lorsque dans une région de l'espace, on a attaché à chaque point de coordonnées  $(x, y, z)$  une grandeur scalaire  $f(x, y, z)$ , on dit qu'on a défini un champ scalaire. Si cette grandeur est vectorielle  $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$ , on parle d'un champ vectoriel. Par exemple, la température et la pression sont deux champs scalaires, tandis que le champ électromagnétique et le champ de la pesanteur sont des champs vectoriels.

Afin de faire des opérations sur les deux types de champs, définissons d'abord l'opérateur différentiel "Nabla" par son expression

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (1.1.9)$$

Le gradient d'un champ scalaire  $f$  est un champ vectoriel défini par la relation

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.1.10)$$

L'élément de longueur infinitésimal en coordonnées cartésiennes est

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (1.1.11)$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df \quad (1.1.12)$$

où on reconnaît bien la différentielle exacte de  $f$  notée  $df$ .

La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  est un champ scalaire donné par

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.1.13)$$

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  est un champ vectoriel qui se calcule comme suit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.1.14)$$

En utilisant ces définitions, on démontre facilement que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0. \quad (1.1.15)$$



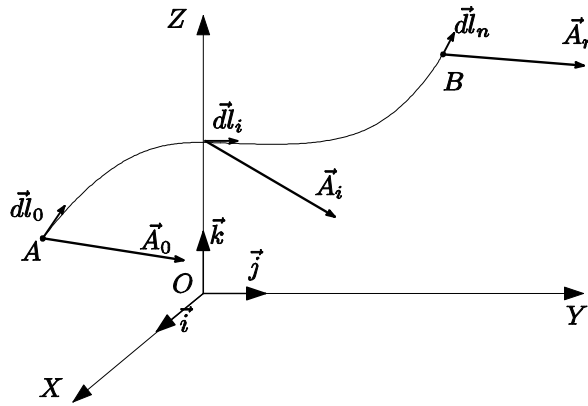
En particulier, pour démontrer qu'un champ est un champ gradient (obtenu en calculant le gradient d'un champ scalaire), il faut vérifier que son rotationnel est nul. On dit aussi qu'il s'agit d'un champ conservatif.

### Circulation d'un champ vectoriel sur un chemin

Soit  $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$  un champ vectoriel et soit  $(C)$  un chemin  $\widehat{AB}$  qui mène du point  $A$  vers le point  $B$ . Si on découpe ce chemin en éléments infinitésimaux  $\vec{dl}$ , on peut définir la circulation du champ  $\vec{A}$  entre les points  $A$  et  $B$  par l'intégrale curviligne

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \vec{dl}_i = \int_{\widehat{AB}} \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (1.1.16)$$

avec la condition  $\vec{A}_1 = \vec{A}(A)$  et  $\vec{A}_n = \vec{A}(B)$ .



Circulation du champ  $\vec{A}$  entre les points  $A$  et  $B$ .

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$  et  $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ , donc la circulation de  $\vec{A}$  aura la forme

$$C = \int_{\widehat{AB}} A_x dx + A_y dy + A_z dz. \quad (1.1.17)$$

Si le champ  $\vec{A}$  est un champ gradient ( $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}f}$ ), alors

$$C = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} df = \int_A^B df = f(B) - f(A). \quad (1.1.18)$$

ce qui montre que la circulation ne dépend pas du chemin choisi; elle dépend juste des points du départ et d'arrivée.

## 1.2 Incertitudes dans la mesure physique

La mesure est le moyen de quantifier les phénomènes physiques en leurs attribuant des valeurs numériques. Mesurer une grandeur physique revient à la comparer à une autre grandeur prise pour unité, afin de déterminer le rapport entre elles, ce qui constitue le résultat de la mesure. Ce résultat dépend étroitement de la précision des instruments de mesure employés, ce qui fait qu'une mesure parfaite ne peut qu'être impossible. En d'autres termes, il y a toujours une incertitude lors de la mesure d'une grandeur physique.

### Chiffres significatifs

Le nombre de chiffres significatifs indique la précision d'une mesure physique. Il s'agit des chiffres connus avec certitude plus le premier chiffre incertain. Donc, quand on fait une mesure, le nombre de chiffres employés pour écrire le résultat obtenu est extrêmement important.

D'une façon générale, il faut respecter les règles suivantes :

- \* Tout chiffre différent de zéro est significatif  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  ;
- \* Les zéros placés entre deux chiffres significatifs sont significatifs (5, 04) ;
- \* Les zéros placés à gauche du premier chiffre différent de zéro ne sont pas significatifs (0, 015) ;
- \* Les zéros placés à droite sont significatifs (2,0) (sauf s'ils sont obtenus suite à une conversion).

Quand on fait un calcul sur la calculatrice, on obtient un grand nombre de chiffres qui ne sont pas tous significatifs et il convient de l'arrondir avec le bon nombre de chiffres significatifs. La méthode la plus courante consiste à

- \* Choisir le dernier chiffre (à la droite) à conserver ;
- \* Augmenter ce chiffre d'une unité, si le chiffre qui vient après est supérieur ou égal à 5 ;
- \* Conserver ce chiffre si le suivant est strictement inférieur à 5.

Par exemple, le nombre 12,7285 arrondi à deux chiffres significatifs après la virgule vaut 12,73 (car  $8 > 5$ ). Par contre, si on veut écrire le nombre 189,6237 avec un seul chiffre significatif après la virgule, il devient 189,6 (car  $2 < 5$ ).

Après avoir compris comment arrondir les nombres, la question qui se pose est de savoir combien de chiffres significatifs faut-il garder après une opération de calcul mathématique.

En effet, Le résultat d'une multiplication ou d'une division à autant de chiffres significatifs qu'en a la mesure qui en comporte le moins. Par exemple,  $14,7 \times 0,15 = 2,205 \simeq 2,2$  et  $23,9/2,04 = 11,715686 \simeq 11,7$ .

Le résultat d'une addition ou d'une soustraction a autant de décimales (chiffres après la virgule) qu'en a la mesure la moins précise utilisée dans le calcul. Par exemple,  $14,7 + 0,15 = 14,85 \simeq 14,8$  et  $23,9 - 2,04 = 21,86 \simeq 21,9$ .

### Incertitudes absolue et relative

Les erreurs de mesure peuvent être classées en deux catégories : les erreurs systématiques causées par l'utilisation d'instruments imparfaits et les erreurs aléatoires dues à l'imperfection des sens de l'opérateur et aux fluctuations des paramètres physiques de l'environnement. Dans le premier cas, la vérification soigneuse des appareils et l'utilisation de méthodes différentes aident à réduire les erreurs commises. Dans le deuxième cas, on diminue les erreurs de mesure en utilisant des appareils perfectionnés afin de minimiser l'importance des sens de l'opérateur et en s'exerçant à la pratique de la mesure.

L'erreur absolue  $\delta A$  de la mesure de la grandeur  $A$  est inconnue car elle suppose la connaissance de la valeur exacte  $A_e$  de cette grandeur. Autrement dit,  $\delta A = |A_0 - A_e|$  où  $A_0$  est le résultat de la mesure (qui est une valeur approchée). Pour cette raison, on parle d'incertitude absolue  $\Delta A$ , qui est une valeur maximale que l'erreur  $\delta A$  peut atteindre dans le cas le plus défavorable. En effet,

$$0 < \delta A \leq \Delta A < A_0.$$

Si une grandeur  $A$  peut être mesurée plusieurs fois, ce qui va donner une suite de résultats  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , la valeur approchée  $A_0$  de la grandeur  $A$  peut être prise comme étant la moyenne de ces résultats

$$A_0 = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_N}{N} \quad (1.2.1)$$

Dans ce cas, l'incertitude absolue peut-être estimée par trois méthodes

$$\begin{aligned} \Delta A &= \max_{n=1, N} |A_n - A_0| && \text{(L'écart maximal)} \\ \Delta A &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |A_n - A_0| && \text{(L'écart absolu)} \\ \Delta A &= \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N (A_n - A_0)^2} && \text{(L'écart-type)} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Parfois, une étude critique de la mesure en tenant compte des différents facteurs qui y interviennent, comme la qualité des appareils utilisés et l'habileté de l'opérateur, permet d'estimer l'incertitude absolue. Par exemple, il est possible de prendre

$\Delta l = 1\text{mm}$  quand on mesure une longueur  $l_0 \simeq 20\text{cm}$  avec une règle graduée en millimètres.

La représentation du résultat de la mesure se fait comme suit :

$$A = A_0 \pm \Delta A (\text{unité de mesure}) \quad (1.2.3)$$

ce qui signifie que  $A \in [A_0 - \Delta A, A_0 + \Delta A]$ . Dans cette expression, il faut respecter ces deux règles :

\* limiter le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude à un seul chiffre significatif sauf si le premier chiffre significatif est 1 ou 2, dans ce cas, le résultat sera arrondi à la décimale suivante (incertitude à 2 chiffres significatifs) ;

\* le dernier chiffre significatif de tout résultat doit être de même ordre de grandeur (à la même position décimale) que l'incertitude (le premier chiffre significatif de l'incertitude).

Par exemple,  $L = 8,147956 \pm 0,03278\text{cm}$  doit être arrondi à  $L = 8,15 \pm 0.03\text{cm}$  et  $S = 425,185 \pm 0,162\text{m}^2$  à  $S = 425,2 \pm 0,16\text{m}^2$ .

La précision d'une mesure s'obtient suite à la comparaison de l'erreur exacte  $\delta A$  avec la valeur exacte  $A_e$ , ce qui est bien exprimé par le rapport  $\frac{\delta A}{|A_e|}$  appelé erreur relative. Pour des raisons pratiques, on se contente d'une limite supérieure  $\frac{\Delta A}{|A_0|}$  appelée incertitude relative qui est un nombre sans dimension qu'on exprime souvent en pourcentage (%) ou par mille ( $^0/_{00}$ ). Dans le cas de l'exemple précédent, l'incertitude absolue est  $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0.001\text{m}}{0.2\text{m}} = 0.005 = 5^0/_{00}$ .

Il est possible aussi d'écrire le résultat de la mesure sous la forme

$$A = A_0 (\text{unité de mesure}) \pm \frac{\delta A}{|A_e|} (\%).$$

### Calculs d'incertitudes

Souvent, on fait appel à des méthodes indirectes pour mesurer une grandeur physique  $A$  en utilisant les valeurs approchées d'autres grandeurs. La question qui se pose alors, est de déterminer les incertitudes  $\Delta A$  et  $\frac{\Delta A}{|A_0|}$ . En d'autres termes, si  $A$  s'obtient par la relation  $A = f(B, C)$ , où  $B = B_0 \pm \Delta B$  et  $C = C_0 \pm \Delta C$ , sa valeur approchée sera

$$A_0 = f(B_0, C_0). \quad (1.2.4)$$

La différentielle exacte de  $A$  est

$$dA = \frac{\partial f}{\partial B} dB + \frac{\partial f}{\partial C} dC$$

ce qui va nous permettre d'en déduire l'incertitude absolue sur  $A$

$$\Delta A = \left| \frac{\partial f}{\partial B} \right|_{B_0, C_0} \Delta B + \left| \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{B_0, C_0} \Delta C. \quad (1.2.5)$$

En particulier,

$$A = B \pm C \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0 = B_0 \pm C_0 \\ \Delta A = \Delta B + \Delta C \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Cela veut dire que l'incertitude absolue d'une somme ou d'une différence est égale à la somme des incertitudes absolues.

Pour obtenir l'incertitude relative, il suffit de diviser sur  $|A_0|$

$$\frac{\Delta A}{|A_0|} = \frac{1}{|f(B_0, C_0)|} \left( \left| \frac{\partial f}{\partial B} \right|_{B_0, C_0} \Delta B + \left| \frac{\partial f}{\partial C} \right|_{B_0, C_0} \Delta C \right). \quad (1.2.7)$$

Dans le cas d'un produit ou d'un quotient, nous avons

$$A = BC \quad \Rightarrow \quad A_0 = B_0 C_0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta A}{|A_0|} = \frac{\Delta B}{|B_0|} + \frac{\Delta C}{|C_0|} \quad (1.2.8)$$

$$A = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{B_0}{C_0} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta A}{|A_0|} = \frac{\Delta B}{|B_0|} + \frac{\Delta C}{|C_0|} \quad (1.2.9)$$

Cela traduit bien le fait que l'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives.

## 1.3 Exercices du chapitre 1

### Exercice 1

Soient les trois vecteurs

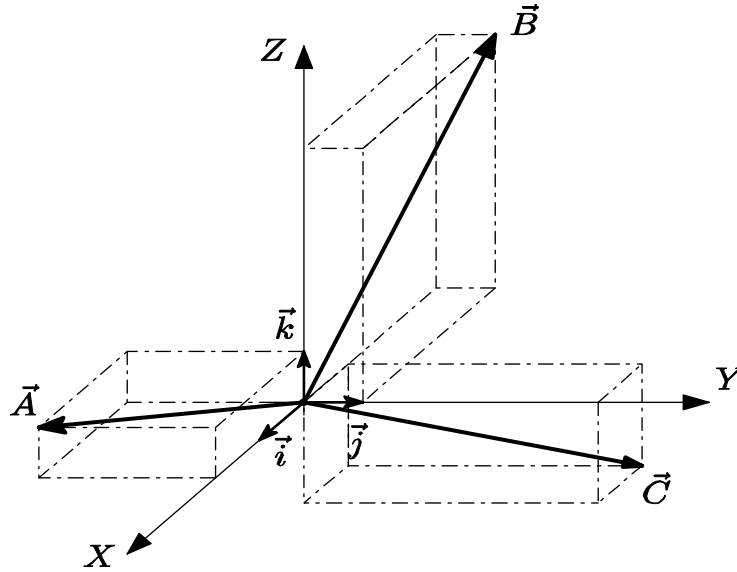
$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \vec{B} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \quad ; \quad \vec{C} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

où  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée directe.

1. Représenter les trois vecteurs, ensuite calculer  $\vec{A} + \vec{B}$ ,  $-3\vec{C}$  et  $2\vec{A} - \vec{C}$ .
2. Donner les vecteurs unitaires portés par  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ .
3. Calculer  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{B} \wedge \vec{C}$  et  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ .
4. En déduire les angles  $(\vec{A}, \vec{B})$  et  $(\vec{B}, \vec{C})$ .
5. Montrer que  $\vec{C}$  n'appartient pas au plan formé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

### Solution

1. Représentation des trois vecteurs :

Représentation graphique de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ .

Nous avons

$$\vec{A} + \vec{B} = (2 - 3)\vec{i} + (-3 + 1)\vec{j} + (1 + 4)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$-3\vec{C} = -3(-\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = 3\vec{i} - 15\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$2\vec{A} - \vec{C} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} - (-\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = 5\vec{i} - 11\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$2. \vec{u}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{9+1+16}}(-3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = -\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k}$$

$$\vec{u}_C = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{1}{\sqrt{1+25+4}}(-\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = -\frac{1}{\sqrt{30}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{k}.$$

$$3. \vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = 2 \times (-3) + (-3) \times 1 + 1 \times 4 = -5.$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 10\vec{j} - 14\vec{k}.$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -28.$$

4. Nous avons

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) \Rightarrow \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{-5}{\sqrt{14}\sqrt{26}} \simeq -0,26$$

$$\Rightarrow (\vec{A}, \vec{B}) \simeq \arccos(-0,26) = 1,83\text{rd} \simeq 104,8^\circ.$$

$$|\vec{B} \wedge \vec{C}| = BC \sin(\vec{B}, \vec{C}) \Rightarrow \sin(\vec{B}, \vec{C}) = \frac{|\vec{B} \wedge \vec{C}|}{BC} = \frac{2\sqrt{195}}{\sqrt{26}\sqrt{30}} = 1$$

$$\Rightarrow (\vec{B}, \vec{C}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}\text{rd} = 90^\circ (\vec{B} \perp \vec{C}).$$

5. Si  $\vec{C}$  appartient au plan formé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , il va vérifier la propriété

$\vec{C} \perp (\vec{A} \wedge \vec{B})$ , ce qui revient à s'assurer que  $\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$ , or

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Donc  $\vec{C}$  n'appartient pas au plan formé par  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

**Exercice 2**

Soient les trois vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$ . En décomposant ces vecteurs dans la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , vérifier les propriétés suivantes

1.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ .
2.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$ .
3.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ .
4. Dans le cas où  $\vec{A} = \vec{A}(t)$  et  $\vec{B} = \vec{B}(t)$ , alors  $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$ .

**Solution**

1. Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y + A_y C_z - A_z C_y) \vec{i} + (-A_x B_z + A_z B_x - A_x C_z + A_z C_x) \vec{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x + A_x C_y - A_y C_x) \vec{k} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (-A_x B_z + A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \\ &\quad + (A_y C_z - A_z C_y) \vec{i} + (-A_x C_z + A_z C_x) \vec{j} + (A_x C_y - A_y C_x) \vec{k} \\ &= \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot \\ &\quad \left( (B_y C_z - B_z C_y) \vec{i} + (-B_x C_z + B_z C_x) \vec{j} + (B_x C_y - B_y C_x) \vec{k} \right) \\ &= A_x B_y C_z - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_z B_y C_x \\ &= C_x (A_y B_z - A_z B_y) + C_y (-A_x B_z + A_z B_x) + C_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \vec{A} \wedge \left( (B_y C_z - B_z C_y) \vec{i} + (-B_x C_z + B_z C_x) \vec{j} + (B_x C_y - B_y C_x) \vec{k} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & -B_x C_z + B_z C_x & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix} \\
&= (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x + A_z B_x C_z - A_z B_z C_x) \vec{i} \\
&\quad + (-A_x B_x C_y + A_x B_y C_x + A_z B_y C_z - A_z B_z C_y) \vec{j} \\
&\quad + (-A_x B_x C_z + A_x B_z C_x - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y) \vec{k} \\
&= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_x \vec{i} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_x \vec{i} \\
&\quad + (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_y \vec{j} - (A_x B_x + A_y C_y + A_z B_z) C_y \vec{j} \\
&\quad + (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_z \vec{k} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z C_z) C_z \vec{k} \\
&= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \vec{B} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z C_z) \vec{C} \\
&= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t)) &= \frac{d}{dt} (A_x(t) B_x(t) + A_y(t) B_y(t) + A_z(t) B_z(t)) \\
&= \frac{dA_x(t)}{dt} B_x(t) + A_x(t) \frac{dB_x(t)}{dt} + \frac{dA_y(t)}{dt} B_y(t) + A_y(t) \frac{dB_y(t)}{dt} \\
&\quad + \frac{dA_z(t)}{dt} B_z(t) + A_z(t) \frac{dB_z(t)}{dt} \\
&= \frac{dA_x(t)}{dt} B_x(t) + \frac{dA_y(t)}{dt} B_y(t) + \frac{dA_z(t)}{dt} B_z(t) \\
&\quad + A_x(t) \frac{dB_x(t)}{dt} + A_y(t) \frac{dB_y(t)}{dt} + A_z(t) \frac{dB_z(t)}{dt} \\
&= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on démontre que  $\frac{d}{dt} (\vec{A}(t) \wedge \vec{B}(t)) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \wedge \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \wedge \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$ .

### Exercice 3

Soient le champ scalaire  $f(x, y, z)$  et le champ vectoriel  $\vec{R} = R_x(x, y, z) \vec{i} + R_y(x, y, z) \vec{j} + R_z(x, y, z) \vec{k}$ . Démontrer que  $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$  et  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{R}) = 0$ .

En coordonnées cartésiennes, un champ vectoriel  $\vec{A} = 2xy \vec{i} + (x^2 + 1) \vec{j}$ . On souhaite calculer la circulation de ce champ le long d'un chemin  $(C)$  décrit par l'équation  $y = \frac{x^3}{9}$  avec  $0 \leq x \leq 3$ .

1. Montrer que le champ  $\vec{A}$  est conservatif.
2. Trouver un champ scalaire  $U(x, y)$  tel que  $\overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{A}$ .



3. Calculer la circulation de  $\vec{A}$  sur  $(C)$  à l'aide de trois méthodes différentes.
4. Calculer la circulation de  $\vec{A}$  le long de segment de droite partant du point  $A(0,0)$  vers le point  $B(3,3)$ . Conclure.

**Solution**

Nous avons  $\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ , donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{R} = \left( \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \vec{k}$ , d'où

$$\begin{aligned} \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{R}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 R_x}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

1. Pour que le champ  $\vec{A}$  soit conservatif, il faut s'assurer que  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0}$ . En effet,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 1 & 0 \end{vmatrix} = (2x - 2x) \vec{k} = \vec{0}$$

ce qui montre que  $\vec{A}$  est un champ conservatif.

2. D'après le résultat précédent, le champ  $U$  existe et il vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{A} \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 1 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Nous avons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy \Rightarrow U = \int 2xy dx \Rightarrow U = x^2y + f(y, z)$$

où  $f(y, z)$  est une fonction qui ne dépend que de  $y$  et  $z$ . Remplaçons dans l'équation  $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 1$  pour avoir la relation

$$x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 1 \Rightarrow f = \int 1 dy \Rightarrow f(y, z) = y + g(z) \Rightarrow U = x^2y + y + g(z)$$

où  $g(z)$  est une fonction qui ne dépend que de  $z$ . Injectons dans l'équation  $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$

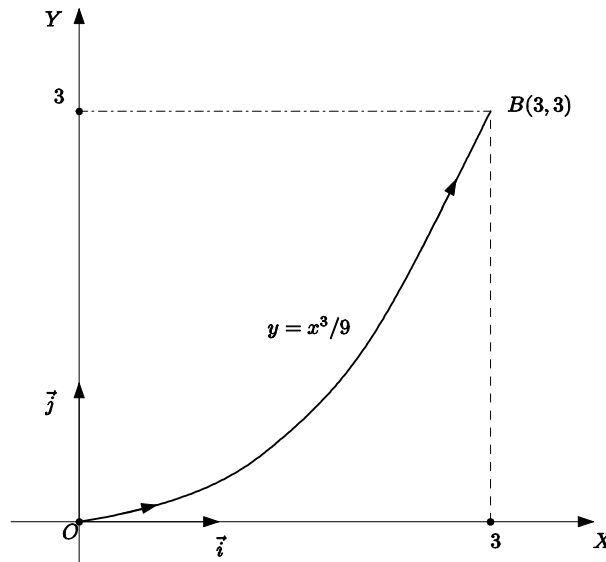
$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = C^{st}.$$

Finalement,

$$U(x, y) = x^2y + y + C^{st}.$$

### 3. Circulation de $\vec{A}$ sur $(C)$

1<sup>ère</sup> méthode : Le champ  $\vec{A}$  est conservatif, donc sa circulation dépend juste des points de départ et d'arrivée. Dans notre cas, l'équation du chemin est  $y = \frac{x^3}{9}$  avec  $0 \leq x \leq 3$ , ce qui fait que le point de départ est  $A(0, 0)$  et le point d'arrivée est  $B(3, 3)$ .



Représentation du chemin  $y = \frac{x^3}{9}$  avec  $0 \leq x \leq 3$ .

La circulation de  $\vec{A}$  est alors

$$C_{\vec{A}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}U} \cdot \vec{dl} = \int_{(0,0)}^{(3,3)} dU = U(3, 3) - U(0, 0) = 30.$$

2<sup>ème</sup> méthode : l'équation du chemin est  $y = \frac{x^3}{9}$  avec  $0 \leq x \leq 3$ , ce qui implique que  $dy = \frac{x^2}{3}dx$ . On en déduit que

$$\vec{A} \cdot \vec{dl} = A_x dx + A_y dy = 2xy dx + (x^2 + 1) dy = \left( \frac{5x^4}{9} + \frac{x^2}{3} \right) dx$$

Alors

$$C_{\vec{A}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_0^3 \left( \frac{5x^4}{9} + \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{1}{9} x^3 (x^2 + 1) \Big|_0^3 = 30.$$

3<sup>ème</sup> méthode : il est possible de paramétriser l'équation du chemin  $y = \frac{x^3}{9}$  avec  $0 \leq x \leq 3$ , comme suit :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{1}{9} (3t)^3 = 3t^3 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 3dt \\ dy = 9t^2 dt \end{cases}$$

Maintenant,

$$C_{\vec{A}} = \int_{\widehat{AB}} 2xydx + (x^2 + 1) dy = \int_0^1 (135t^4 + 9t^2) dt = 27t^5 + 3t^3 \Big|_0^1 = 30.$$

4. L'équation du segment de droite en question est

$$y = x \quad \text{avec} \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad dy = dx.$$

La circulation de  $\vec{A}$  sur ce chemin est

$$C_{\vec{A}} = \int_{\widehat{AB}} 2xydx + (x^2 + 1) dy = \int_0^3 (3x^2 + 1) dx = 30.$$

Nous avons obtenu le même résultat car la circulation d'un champ conservatif ne dépend pas du chemin suivi et les deux chemins ont les mêmes points de départ et d'arrivée.

#### Exercice 4

1. Afin de calculer le périmètre et l'aire d'un rectangle, nous avons répété les mesures de sa longueur  $L$  et de sa largeur  $l$  cinq fois. Nous avons obtenu les valeurs suivantes :

$L(cm)$	9	9,1	8,9	9	8,8
$l(cm)$	6,1	5,9	6	6,2	6,1

- Donner des valeurs approchées de  $L$  et  $l$ .
- Déterminer les incertitudes sur les mesures de  $L$  et  $l$  en prenant les écarts absolus.
- Donner les valeurs approchées du périmètre  $P$  et de l'aire  $A$  du rectangle en question.
- Calculer les incertitudes absolues et relatives sur les mesures de  $P$  et  $A$ .

2. Nous avons mesuré la longueur  $L$  et la période  $T$  d'un pendule et nous avons obtenu  $L = 0,997 \pm 0,005m$  et  $T = 2,03 \pm 0,01s$ . Afin de calculer l'accélération terrestre nous allons utiliser la relation  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ . Donner les incertitudes absolue et relative de la mesure de  $g$ .

3. La position d'un mobile est donnée par l'équation horaire  $x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Afin de déterminer la constante  $\tau$ , nous avons mesuré sa position initiale ce qui a donné la valeur  $x_0 = 5,1 \pm 0,2 \text{ cm}$ , ensuite nous avons mesuré sa position à l'instant  $t = 1,3 \pm 0,1 \text{ s}$  et nous avons trouvé  $x = 6,5 \pm 0,2 \text{ cm}$ .

a. Déterminer la valeur de  $\tau$  ainsi que les incertitudes absolue et relative.

### Solution

1.a. La valeur approchée de  $L$  est  $L_0 = \frac{9+9,1+8,9+9+8,8}{5} = 8,96 \text{ cm}$ .

La valeur approchée de  $l$  est  $l_0 = \frac{6,2+5,9+6+6,2+6,1}{5} = 6,08 \text{ cm}$ .

1.b. L'incertitude absolue sur  $L$  est

$$\Delta L = \frac{|9-8,96|+|9,1-8,96|+|8,9-8,96|+|9-8,96|+|8,8-8,96|}{5} = 0,088 \text{ cm}.$$

L'incertitude absolue sur  $l$  est

$$\Delta l = \frac{|6,1-6,08|+|5,9-6,08|+|6-6,08|+|6,2-6,08|+|6,1-6,08|}{5} = 0,104 \text{ cm}.$$

Maintenant, il faut arrondir ces résultats comme suit

$$L \simeq 8,96 \pm 0,088 \simeq 8,96 \pm 0,09 \text{ cm} \quad l \simeq 6,08 \pm 0,104 \simeq 6,1 \pm 0,10 \text{ cm}.$$

1.c. La valeur approchée de  $P$  est  $P_0 = 2(L_0 + l_0) = 2 \times (8,96 + 6,08) = 30,08 \text{ cm}$ .

La valeur approchée de  $A$  est  $A_0 = L_0 l_0 = 8,96 \times 6,08 = 54,477 \text{ cm}^2$ .

1.d. Nous avons  $P = 2(L + l)$ , donc

$$dP = 2dL + 2dl \Rightarrow \Delta P = 2\Delta L + 2\Delta l = 0,38 \text{ cm} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{0,38}{30,08} = 0,012633.$$

A ce stade, il faut arrondir les chiffres :

$$P \simeq 30,08 \pm 0,38 \simeq 30,1 \pm 0,4 \text{ cm} \simeq 30,1 \text{ cm} \pm 1,3\%.$$

De la même manière, nous avons  $A = Ll$ , d'où

$$dA = l dL + L dl \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dL}{L} + \frac{dl}{l} \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\Delta l}{l_0} = 0,026492.$$

On en déduit que  $\Delta A = 0,026492 \times A_0 = 1,4432$ . Finalement,

$$A \simeq 54,477 \pm 1,4432 \text{ cm}^2 \simeq 54 \pm 1,4 \text{ cm}^2 \simeq 54 \text{ cm}^2 \pm 2,6\%.$$

$$\begin{aligned} 2.a \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \Rightarrow g_0 = 4\pi^2 \frac{L_0}{T_0^2} \Rightarrow g_0 &= 4(3,1415)^2 \frac{2,0997}{2,03^2} \\ &\Rightarrow g_0 = 9,80996 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

La différentielle de  $g$  est

$$dg = \frac{\partial g}{\partial L} dL + \frac{\partial g}{\partial T} dT \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{4\pi^2}{T^2} dL - 8\pi^2 \frac{L}{T^3} dT$$

d'où l'incertitude absolue

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Delta L + 8\pi^2 \frac{L_0}{T_0^3} \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \Delta L + 8\pi^2 \frac{L_0}{T_0^3} \Delta T.$$

A.N.

$$\Delta g = \frac{4(3,1415)^2}{2,03^2} 0,005 + 8(3,1415)^2 \frac{0,997}{2,03^3} 0,01 = 0,141993 m/s^2.$$

Donc

$$g \simeq 9,80996 \pm 0,141993 m/s^2 \simeq 9,8 \pm 0,14 m/s^2 \simeq 9,8 m/s^2 \pm 1,5\%.$$

3.a. Nous avons

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \ln x_0 - \frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{t}{\ln x_0 - \ln x} \quad \Rightarrow \quad \tau = 10,386 s^{-1}.$$

La différentielle exacte de  $\tau$  est

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} dt + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau}{\partial x_0} dx_0 = \frac{dt}{\ln x_0 - \ln x} + \frac{tdx}{x(\ln x - \ln x_0)^2} - \frac{tdx_0}{x_0(\ln x - \ln x_0)^2}.$$

On en déduit que

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\ln x_0 - \ln x} + \frac{t \Delta x}{x(\ln x - \ln x_0)^2} + \frac{t \Delta x_0}{x_0(\ln x - \ln x_0)^2}.$$

A.N :

$$\Delta \tau = \frac{0,01}{\ln 5,14 - \ln 4,53} + \frac{1,38 \times 0,02}{4,53 \times (\ln 4,53 - \ln 5,14)^2} + \frac{1,38 \times 0,02}{5,14 \times (\ln 4,53 - \ln 5,14)^2} = 0,75573 s^{-1}.$$

Finalement,

$$\tau \simeq 10,386 \pm 0,75573 s^{-1} \simeq 10,4 \pm 0,8 s^{-1} \simeq 10,4 s^{-1} \pm 7,7\%.$$

---

# Cinématique d'un Point Matériel

L'objectif de la cinématique est bien l'étude des mouvements dans leur rapport avec le temps, sans se préoccuper des causes qui les produisent. Un mouvement se définit toujours par rapport à un repère auquel est associée une horloge pour indiquer le temps, ce qui va former un référentiel. Le point matériel, qui est par définition un corps de dimensions assez petites pour être négligeables, constitue une notion fondamentale en mécanique classique. C'est le cas par exemple d'une bille de rayon très faible.

## 2.1 Mouvement en coordonnées cartésiennes

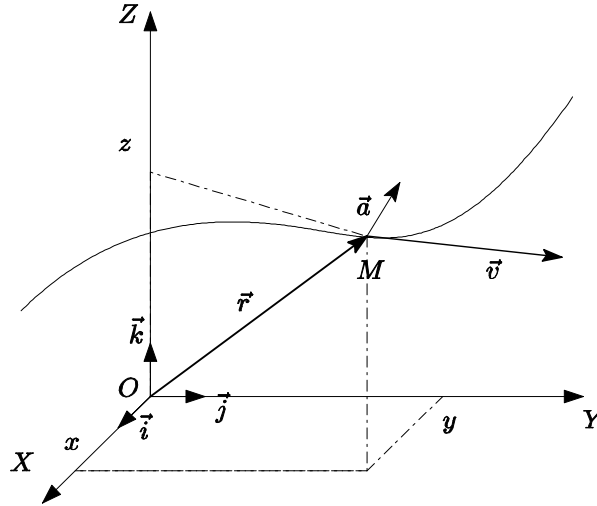
Soit un repère cartésien  $(OXYZ)$  dont la base est constituée par les trois vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Autrement dit, ils sont orthonormés et forment un trièdre direct, en plus du fait qu'ils restent fixes dans le temps. La position d'un point matériel  $M$  à un instant  $t$  est bien définie en connaissant ses coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ . Le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  est appelé le vecteur-position du point  $M$  :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (2.1.1)$$

Par définition, le vecteur-vitesse  $\vec{v}(t)$  mesure la variation du vecteur-position dans le temps, conformément à la relation

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}. \quad (2.1.2)$$

On en déduit facilement ses composantes :  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$  et  $v_z = \frac{dz}{dt}$ . C'est un vecteur tangent à la trajectoire.



Les vecteurs de position, de vitesse et d'accélération du point  $M$ .

Le vecteur-accélération  $\vec{a}(t)$  quant à lui, caractérise la variation du vecteur-vitesse à un instant  $t$ . Il est donné par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}. \quad (2.1.3)$$

Il est clair que les composantes de  $\vec{a}$  sont  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$  et  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ .

## 2.2 Abscisse curviligne

La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des lieux géométriques parcourus successivement tout au long de la durée du mouvement. Il est possible d'orienter cette trajectoire et d'en choisir une origine  $A$ , afin de définir l'abscisse curviligne par

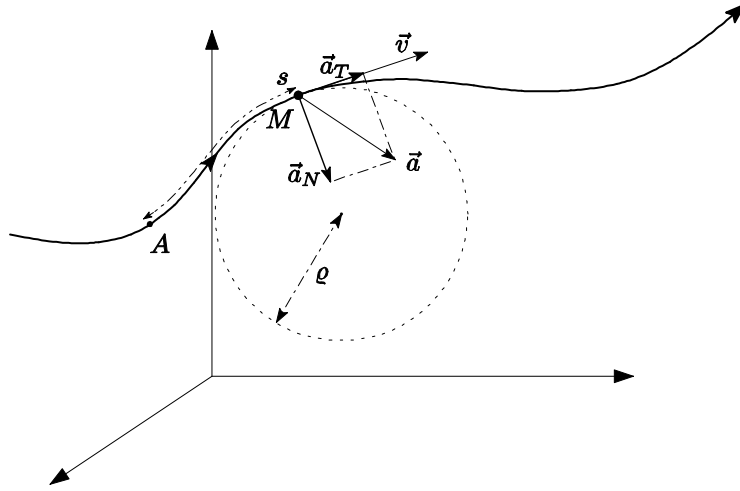
$$s = \widehat{AM}. \quad (2.2.1)$$

La relation  $s = s(t)$  est l'équation horaire de  $M$  sur sa trajectoire.

La variation dans le temps de l'abscisse curviligne est liée au module de vecteur-vitesse  $v = |\vec{v}(t)|$  par

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.2.2)$$

Dans le cas où le mouvement se fait dans le sens d'orientation de la trajectoire,  $\frac{ds}{dt} = v$ .



*Abscisse curviligne avec les accélérations tangentielle et normale.*

Le vecteur-accelération peut être écrit comme étant la somme d'une accélération tangentielle  $\vec{a}_T$  plus une accélération normale  $\vec{a}_N$ . On démontre que

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (2.2.3)$$

où  $\rho$  est le rayon de courbure de la trajectoire au point  $M$  occupé à l'instant  $t$ . Si  $\vec{a}_T$  et  $\vec{v}$  ont le même sens, le mouvement est accéléré; dans le cas contraire, le mouvement est dit retardé.

## 2.3 Mouvement en coordonnées polaires et cylindriques

Au lieu de repérer un point  $M$  par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , il est commode parfois de passer aux coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  pour des raisons pratiques. Ce changement de coordonnées est possible grâce à la transformation

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\rho}; \sin \theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.3.1)$$

tandis que la coordonnée  $z$  reste inchangée. Autrement dit,  $\rho = |\vec{\rho}|$  et  $\theta = (\vec{i}, \vec{\rho})$  avec  $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

En utilisant la relation  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , il est facile de constater que le vecteur-position va s'écrire

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} \quad (2.3.2)$$

où

$$\vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}. \quad (2.3.3)$$

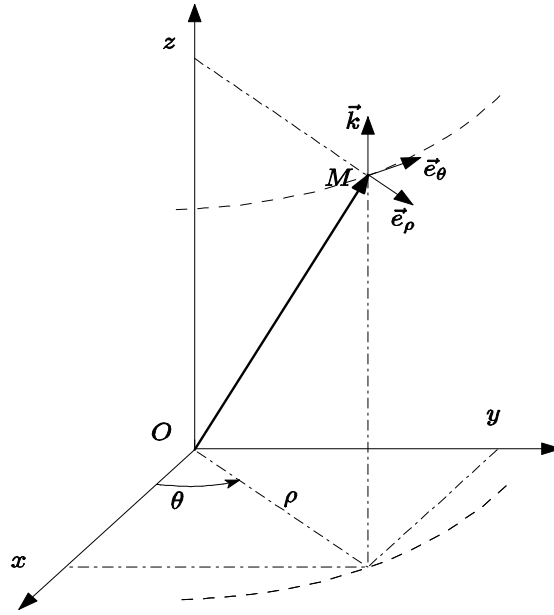


Le vecteur-vitesse s'obtient en dérivant le vecteur  $\vec{r}$ , ce qui va se traduire par l'expression

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{k} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k} \quad (2.3.4)$$

où le point sur les symboles indique la dérivée par rapport au temps et le vecteur  $\vec{e}_\theta$  est défini par

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}. \quad (2.3.5)$$



Coordonnées cylindriques.

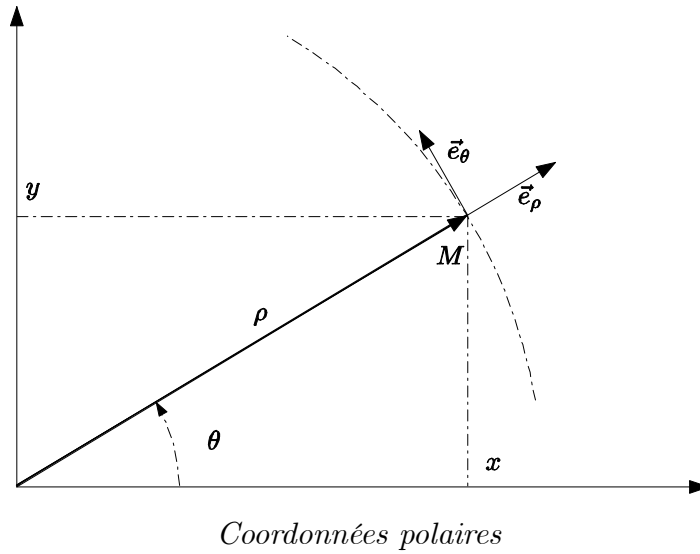
Le vecteur-accélération en coordonnées cylindriques aura l'expression suivante :

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{k} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k}. \quad (2.3.6)$$

Un calcul trivial montre que les vecteurs  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$  forment une base orthonormée directe. Cette base est dite locale, car elle dépend de l'angle  $\theta$ . Il est utile aussi de constater que

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}.$$

Dans le cas où le mouvement se fait dans le plan  $XY$  ( $z = 0$ ), il suffit d'utiliser seulement les coordonnées  $(\rho, \theta)$  qui seront appelées alors les coordonnées polaires.



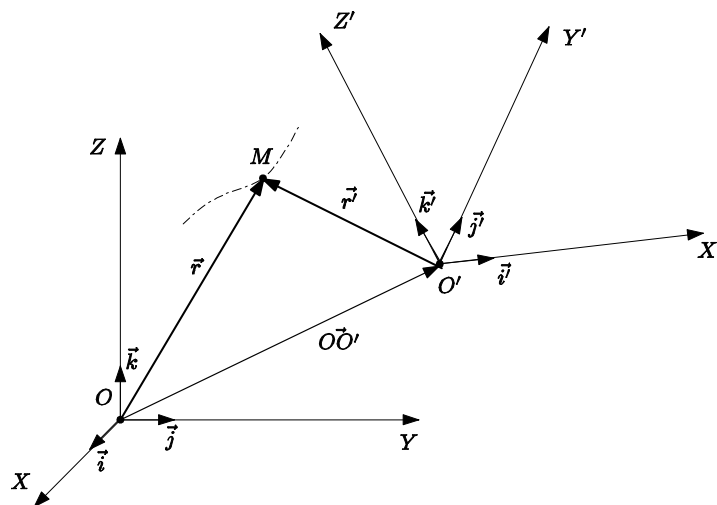
## 2.4 Composition des mouvements

Dans la pratique, on est souvent amené à travailler avec des référentiels différents, d'où la nécessité d'établir des lois cinématiques qui vont permettre de relier les accélérations, les vitesses et les positions observées dans ces référentiels distincts.

Considérons un repère  $R(OXYZ)$  dont la base est formée par les vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  qui constituent un trièdre direct. Ce repère sera appelé *le repère absolu*. Soit  $R'(O'X'Y'Z')$  un autre repère ayant la base  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  qu'on va désigner par *le repère relatif* car il est en mouvement par rapport à  $R(OXYZ)$ .

Si on désigne les vecteurs-positions d'un point matériel  $M$  par rapport aux deux repères par  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  respectivement ( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ ), nous aurons la relation vectorielle

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'}. \tag{2.4.1}$$



Les vecteurs-positions de  $M$  par rapport aux repères  $R$  et  $R'$ .

Après une dérivation directe par rapport au temps  $t$ , on obtient la loi de la composition des vitesses

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (2.4.2)$$

où  $\vec{v}_a = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$  est le vecteur-vitesse absolue vu dans le repère  $R$  et  $\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$  est le vecteur-vitesse relative par rapport à  $R'$ . La vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e$  du point  $M$  a l'expression

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}. \quad (2.4.3)$$

Maintenant, en dérivant la loi de composition des vitesses ci-dessus, nous allons avoir la règle de composition des accélérations suivantes

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (2.4.4)$$

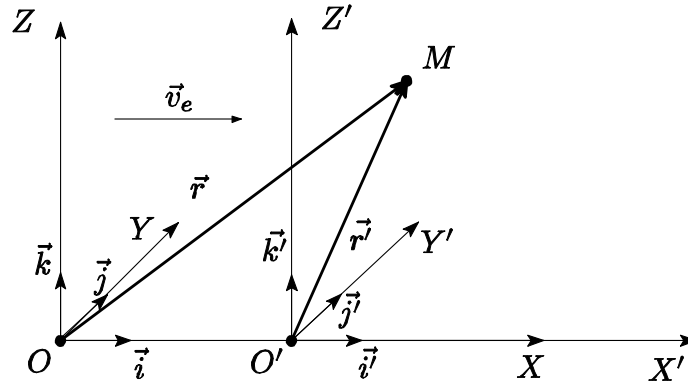
où  $\vec{a}_a = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$  est l'accélération absolue par rapport à  $R$  et  $\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$  est l'accélération relative par rapport à  $R'$ . L'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  du point  $M$  est donnée par

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}. \quad (2.4.5)$$

L'accélération  $\vec{a}_c$  est appelée l'accélération de Coriolis dont la définition est

$$\vec{a}_c = 2 \left( \dot{x}' \frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}' \frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right). \quad (2.4.6)$$

A présent, il est intéressant de considérer le cas où les repères  $R$  et  $R'$  sont choisis de telle sorte que leurs origines  $O$  et  $O'$  coïncident à l'instant  $t = 0$ , et que leurs trois axes soient colinéaires, sauf que  $R'$  se déplace le long de la direction  $OX$  à la vitesse d'entraînement constante  $v_e$ .



Transformation de Galilée.

La transformation de Galilée qui décrit bien cette situation est

$$\begin{cases} x = x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v'_x + v_e \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Il est clair que cette transformation n'affecte pas les accélérations. Maintenant, si la translation se fait avec la vitesse  $\vec{v}_e$  de direction arbitraire, la transformation de Galilée se généralise facilement à la forme

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e t. \quad (2.4.8)$$

## 2.5 Exercices du chapitre 2

### Exercice 1

La position d'un point matériel  $M$  est donnée par ses coordonnées cartésiennes

$$x(t) = R \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \quad \text{et} \quad y(t) = R \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \quad R, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

1. Déterminer le vecteur-vitesse  $\vec{v}$  et le vecteur-accélération  $\vec{a}$ .
2. Déterminer le module de l'accélération tangentielle  $a_T$ .
3. Déterminer l'équation de la trajectoire ainsi que sa nature.
4. En déduire le rayon de courbure et le module de l'accélération normale  $a_N$ .
5. Déterminer les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  du point  $M$ .
6. Déterminer les composantes des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  en coordonnées polaires. Conclure.
7. Sachant que la trajectoire est orientée dans le sens trigonométrique (anti-horaire) et que le point  $A(0, R)$  est choisi comme origine des abscisses curvilignes, déterminer l'équation horaire du point  $M$  sur sa trajectoire.

### Solution :

1. Nous avons  $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j}$  et  $\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}$ , donc

$$\begin{cases} v_x = -\alpha R t \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \\ v_y = \alpha R t \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_x = -\alpha R \left(\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \alpha t^2 \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) \\ a_y = \alpha R \left(\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) - \alpha t^2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right). \end{cases}$$

2. L'accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) = \frac{d}{dt} (\alpha R t) \quad \Rightarrow \quad a_T = \alpha R.$$

3. Nous avons

$$x^2 + y^2 = R^2 \left( \cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \right) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

La trajectoire est un cercle de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R$  qui est égal à son rayon de courbure ( $\rho = R = C^{st}$ ).

4. L'accélération normale :

$$\rho = R \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_N = R\alpha^2 t^2$$

5. En coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{R} = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \\ \sin \theta = \frac{y}{R} = \sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = R \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2. \end{array} \right.$$

6. Toujours en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \alpha R t \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

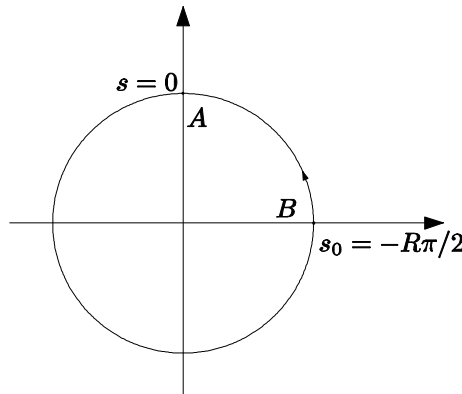
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} - 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta = -R\alpha^2 t^2 \vec{e}_\rho + \alpha R \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

On voit que  $a_N = |a_\rho|$  et  $a_T = a_\theta$ . Nous sommes en présence d'un mouvement circulaire uniformément accéléré.

7. Abscisse curviligne :

$$\frac{ds}{dt} = v = \alpha R t \Rightarrow s = \frac{1}{2}\alpha R t^2 + s_0.$$

A  $t = 0$ ,  $M$  se trouve au point  $B(x(0), y(0)) \equiv B(R, 0)$  et l'origine des abscisses curviligne est le point  $A(0, R)$ , donc  $s_0 = -\frac{R\pi}{2}$ .



Représentation graphique de  $s_0 = -\frac{R\pi}{2}$ .

Finalement,

$$s = \frac{R}{2} (\alpha t^2 - \pi) = R \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

### Exercice 2

Dans le plan  $(OXY)$  d'un repère  $(OXYZ)$ , le mouvement d'un point  $M$  est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps  $t$  :

$$x(t) = be^{-kt} \cos(kt) \quad ; \quad y(t) = be^{-kt} \sin(kt) \quad b, k \in \mathbb{R}^+$$

- 1- Déterminer en fonction de  $t$  les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  du point  $M$ .
- 2- En déduire l'équation polaire de la trajectoire de  $M$ .
- 3- Déterminer en fonction de  $t$  les composantes polaires du vecteur-vitesse  $\vec{v}$ .
- 4- En déduire l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \vec{v})$ .
- 5- Déterminer en fonction de  $t$  les composantes polaires de l'accélération  $\vec{a}$ .
- 6- Indiquer la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).
- 7- Déterminer en fonction de  $t$  les composantes tangentielle et normale de  $\vec{a}$ .
- 8- En déduire la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

### Solution

1. En coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = be^{-kt} \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{\rho} = \cos(kt) \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} = \sin(kt) \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = be^{-kt} \\ \theta = kt. \end{array} \right.$$

2. On en déduit facilement que  $\rho = be^{-\theta}$ .
3. La vitesse est  $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta = bke^{-kt}(-\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta)$ , où  $\theta = kt$ .
4.  $\cos(\overrightarrow{OM}, \vec{v}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{OM}|v} = \frac{(\rho\vec{e}_\rho) \cdot (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{\rho\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}} = \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , Alors  $(\overrightarrow{OM}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ .
5. L'accélération est  $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = -2bk^2e^{-kt}\vec{e}_\theta$ . où  $\theta = kt$ .
6. Nous avons  $\vec{v} \cdot \vec{a} = -2b^2k^3e^{-2kt} < 0$  ce qui fait que le mouvement est retardé.
7. La composante tangentielle  $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}bke^{-kt}) = -\sqrt{2}bk^2e^{-kt}$
8. La composante normale  $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2}bk^2e^{-kt}$ .
9. Le rayon de courbure  $\varrho = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{2}be^{-kt}$ .

**Exercices 3**

Un train démarre avec une accélération horizontale constante  $\vec{a}_e = a_0 \vec{i}$  à l'instant  $t = 0$ . A un moment  $t = t_0 > 0$ , un enfant debout sur le quai lance sa balle vers le bas avec une vitesse  $\vec{v}_0 = -u_0 \vec{k}$ , à partir d'une hauteur  $z_0$  par rapport au sol.

1. Sachant que la balle est soumise seulement à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g \vec{k}$ , déterminer sa vitesse  $\vec{v}_a$  et sa position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  par rapport au repère terrestre dont l'origine coïncide avec les pieds de l'enfant (repère absolu).

2. Caractériser le mouvement du repère lié au train (repère relatif), en prenant comme son origine un observateur assis dans ce train, qui se trouvait en face de l'enfant à l'instant  $t = 0$ .

3. Déterminer la position  $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$  et la vitesse  $\vec{v}_r$  relatives de la balle par rapport au train.

4. Déterminer la trajectoire de la balle par rapport à cet observateur.

**Solution**

1. Position de la balle : nous avons

$$\vec{a} = -g \vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -gt + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_z = -g(t - t_0) - u_0 \end{cases}$$

où nous avons utilisé les conditions  $v_x(t_0) = 0$  et  $v_z(t_0) = -u_0$  afin de fixer  $C_1$  et  $C_2$ . Après intégration, et en utilisant les conditions  $x(t_0) = 0$  et  $z(t_0) = z_0$ , on aboutit aux coordonnées de la balle

$$\begin{cases} x = C_3 \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + (gt_0 - u_0)t + C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 - u_0(t - t_0) + z_0. \end{cases}$$

2. Les vecteurs des bases des deux repères sont les mêmes ( $\vec{i} = \vec{i}'$  et  $\vec{k} = \vec{k}'$ ) car le train est en translation. Par contre l'origine  $O'$  du repère relatif (le train) démarre à partir de  $O$  avec une accélération  $a_0 \vec{i}$  par rapport au repère absolu (la terre), et cela depuis l'instant  $t = 0$ . En effet,

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} = a_0 \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e = a_0 t \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OO'} = \frac{a_0}{2} t^2 \vec{i}.$$

3. La position relative de la balle par rapport au repère relatif

$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{g}{2}(t - t_0)^2 - u_0(t - t_0) + z_0\right) \vec{k} - \frac{a_0}{2} t^2 \vec{i}.$$

La vitesse relative est  $\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = (-g(t - t_0) - u_0) \vec{k} - a_0 t \vec{i}$ .

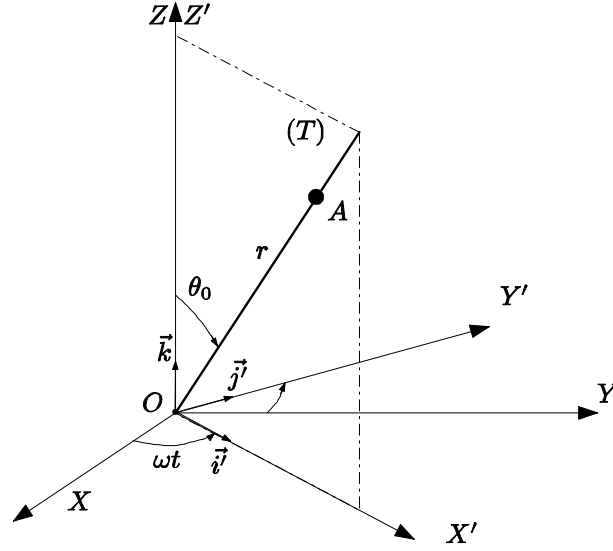
4. Nous avons  $z' = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 - u_0(t - t_0) + z_0$  et  $x' = -\frac{a_0}{2} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{-\frac{2x'}{a_0}}$ .

Finalement,

$$z' = -\frac{g}{2} \left( \sqrt{-\frac{2x'}{a_0}} - t_0 \right)^2 - u_0 \left( \sqrt{-\frac{2x'}{a_0}} - t_0 \right) + z_0.$$

## Exercices 4

On considère qu'une masselotte  $M$  de masse  $m$ , peut coulisser sans frottement le long d'une tige ( $T$ ). Désignons par  $r$  la distance  $OM$  entre l'extrémité de la tige et la masselotte  $M$  qui est supposée ponctuelle.  $\theta_0$  est l'angle d'inclinaison de la tige ( $T$ ) relativement à l'axe  $OZ$  du repère d'observation  $R(OXYZ)$  qu'on va appeler le repère absolu. Cette même tige tourne uniformément à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $OZ$ .



On suppose également que  $R'(OX'Y'Z')$  est le repère orthonormé direct qui est lié à la tige comme le montre la figure précédente (appelé aussi le repère relatif).

1. Donnez l'expression du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en fonction de  $r$  et  $\theta_0$ , et ce dans la base  $B'$  liée au repère  $R'$ . En déduire ensuite la vitesse  $\vec{v}_r$  de  $M$  par rapport au repère  $R'$ .

2. Caractérisiez le mouvement de  $R'$  par rapport à  $R$  (vitesse de l'origine, vecteur rotation).

3. Déterminez l'expression de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis de  $M$ , dans le mouvement de  $R'$ .

4. Retrouvez les expressions de la vitesse et de l'accélération de  $M$  dans  $R$ , en utilisant des lois de composition des mouvements.

## Solution

1. Nous avons

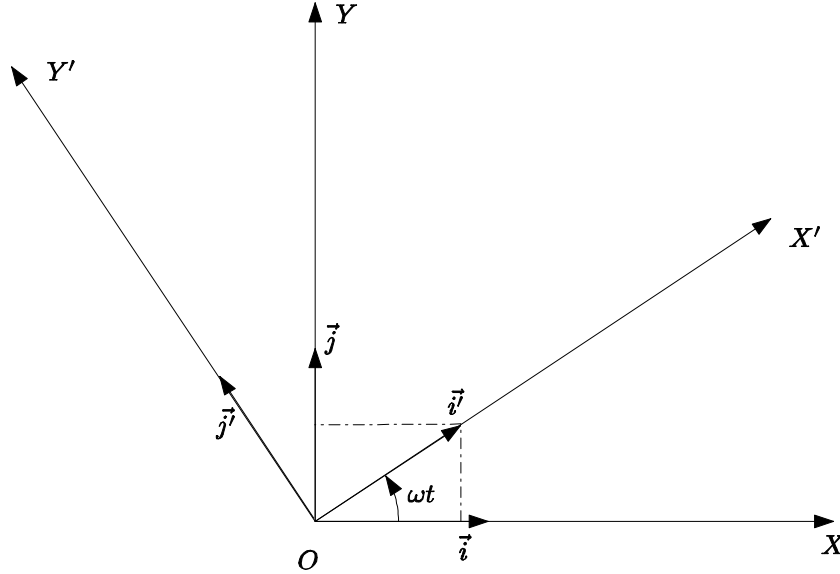
$$\overrightarrow{OM} = x' \vec{i}' + z' \vec{k}' = r(t) \left( \sin(\theta_0) \vec{i}' + \cos(\theta_0) \vec{k}' \right) \quad (y' = 0).$$

Donc

$$\vec{v}_r = \dot{x}' \vec{i}' + \dot{z}' \vec{k}' = \dot{r}(t) \left( \sin(\theta_0) \vec{i}' + \cos(\theta_0) \vec{k}' \right).$$



2. Le repère  $R'$  tourne autour de l'axe  $OZ$ , ce qui fait que  $\vec{k}' = \vec{k}$ . Regardons maintenant le plan  $XY$



Représentation des vecteurs unitaires du plan  $XY$ .

On en déduit facilement que

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}' \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \omega\vec{k}.$$

S'ajoute à cela le fait que les deux repères ont la même origine ( $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ ).

3. La vitesse d'entraînement est

$$\vec{v}_e = x' \frac{d\vec{i}'}{dt} = r(t) \sin(\theta_0) (\vec{\omega} \wedge \vec{i}') = r(t) \omega \sin(\theta_0) \vec{j}'.$$

L'accélération relative est

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i}' + \ddot{z}\vec{k}' = \ddot{r}(t) (\sin(\theta_0)\vec{i}' + \cos(\theta_0)\vec{k}').$$

L'accélération d'entraînement est

$$\vec{a}_e = x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = -\omega^2 r(t) \sin(\theta_0) \vec{i}'.$$

L'accélération de Coriolis est

$$\vec{a}_c = 2\dot{x}' \frac{d\vec{i}'}{dt} = 2\omega \dot{r}(t) \sin(\theta_0) \vec{j}'.$$

4. Nous avons

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases}$$

La vitesse absolue est

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = r(t)\omega \sin(\theta_0)\vec{j}' + \dot{r}(t) \left( \sin(\theta_0)\vec{i}' + \cos(\theta_0)\vec{k}' \right)$$

d'où

$$\vec{v}_a = \sin(\theta_0) [-r\omega \sin(\omega t) + \dot{r} \cos(\omega t)] \vec{i}' + \sin(\theta_0) [r\omega \cos(\omega t) + \dot{r} \sin(\omega t)] \vec{j}' + \dot{r} \cos(\theta_0) \vec{k}'.$$

L'accélération absolue est

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \ddot{r}(t) \left( \sin(\theta_0)\vec{i}' + \cos(\theta_0)\vec{k}' \right) + -\omega^2 r(t) \sin(\theta_0)\vec{i}' + 2\omega \dot{r}(t) \sin(\theta_0)\vec{j}'.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = & \sin(\theta_0) [(\ddot{r} - \omega^2 r) \cos(\omega t) - 2\omega \dot{r} \sin(\omega t)] \vec{i}' \\ & + \sin(\theta_0) [(\ddot{r} - \omega^2 r) \sin(\omega t) + 2\omega \dot{r} \cos(\omega t)] \vec{j}' \\ & + \ddot{r} \cos(\theta_0) \vec{k}'. \end{aligned}$$

---

# Dynamique d'un Point Matériel

Le souci principal de la dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement et les causes qui en sont responsables. La notion de la force y trouve sa raison d'être à travers la loi de Newton qui exprime son lien avec l'accélération.

## 3.1 Les lois de Newton

La dynamique classique repose sur les trois lois de Newton suivantes :

### Le principe d'inertie :

Le principe d'inertie déjà énoncé par Galilée se formule comme suit : un point matériel libre (mécaniquement isolé) est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Un référentiel est dit galiléen si le principe d'inertie s'y applique.

### Le principe fondamental de la dynamique (PFD)

La quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un point de masse  $m$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$  est

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.1.1)$$

Dans un référentiel d'inertie, la variation de la quantité de mouvement dans le temps est égale à la somme des forces  $\sum_i \vec{F}_i$  appliquées sur ce point

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.1.2)$$

Dans le cas où la masse reste invariante, cela revient à dire que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.1.3)$$

Il s'agit là du principe fondamental de la dynamique newtonienne (le PFD).

### Le principe de l'action et de la réaction

Lorsque deux points matériels sont en influence mutuelle, la force exercée par le premier sur le deuxième est l'opposée de la force appliquée par le deuxième sur le premier.

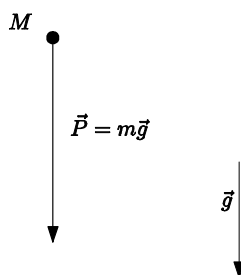
## 3.2 Quelques forces de la nature

Il est bien observé que plusieurs types de forces déterminent les mouvements des différents objets de la nature. Ci-dessous, une liste des forces qu'on rencontre, le plus, quand on a affaire à des problèmes de la mécanique newtonienne

### Le poids

La terre exerce une force d'attraction sur les corps massifs qui s'y trouvent, appelée le poids. Dans le cas d'un objet de masse  $m$  situé à une distance très proche de la surface de la terre, son poids est donné par

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$



*Le poids d'un point matériel  $M$ .*

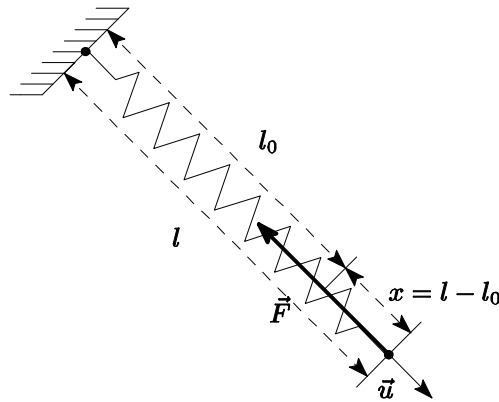
où  $\vec{g}$  représente l'accélération de la pesanteur agissant de haut en bas selon la verticale dont le module est constant avec une valeur  $g \simeq 9,81\text{m/s}^2$ .

### La force de rappel d'un ressort

Un ressort est un système à déformation élastique. En d'autres termes, si un ressort de longueur à vide  $l_0$  est comprimé ou allongé de telle sorte que sa longueur

devient  $l$ , il va exercer une force de rappel  $\vec{F}$  donnée par

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u} = -kx \vec{u}.$$



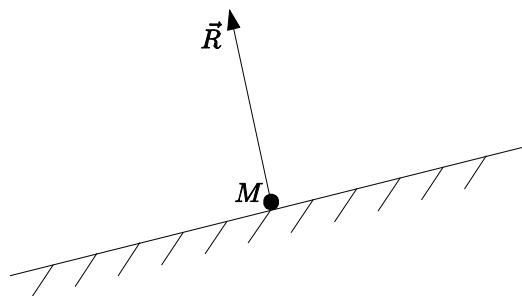
*La force de rappel d'un ressort.*

où  $k$  est la constante de raideur du ressort exprimée en Newton par mètre (N/m),  $x = (l - l_0)$  est l'allongement et  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire porté par l'axe de ce ressort orienté dans le sens de l'élongation.

### La réaction d'une surface

La réaction  $\vec{R}$  est une force normale exercée par une surface jouant le rôle de support ou d'appui sur un objet en contact avec elle pour l'empêcher de s'interpénétrer. C'est une force de contact qui ne peut pas être évaluée à l'aide d'une formule directe, car elle dépend de l'action de l'objet que la surface supporte.

Dans le cas d'un point matériel immobile sur le sol, la réaction peut-être représentée comme suit :



*Réaction d'une surface sur un point matériel M.*

### Le frottement

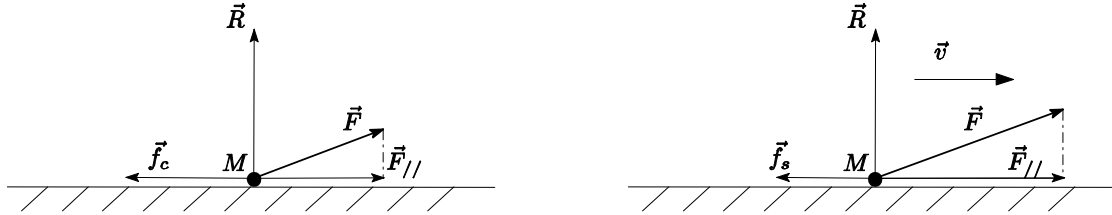
On parle de frottement solide (ou friction) quand une surface s'oppose au glissement d'un objet sur elle. Cette force est toujours parallèle à la surface dans le sens opposé au mouvement relatif de l'objet par rapport à cette dernière.

Soit un corps immobile sur une surface de telle sorte que la réaction de cette dernière soit égale à  $\vec{R}$ . Le fait juste d'essayer de le faire bouger sans quitter cette

surface à l'aide d'une force  $\vec{F}$ , crée une force de frottement  $\vec{f}_s$  opposée à la direction dont laquelle on souhaite le déplacer, et cela avant même qu'il quitte son état de repos. La valeur maximale de cette force de frottement statique est

$$\vec{f}_s^{\max} = -\mu_s R \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \left| \vec{f}_s \right| \leq \mu_s R.$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique et  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire porté par la projection de  $\vec{F}$  sur la surface en question ( $\vec{F}_{//}$ ).



*Frottements statique et cinétique.*

Maintenant, si  $\left| \vec{F}_{//} \right| < \mu_s R$ , il n'y aura pas de mouvement et  $\vec{f}_s = -\vec{F}_{//}$  (le frottement compense l'action de la force motrice), sinon ( $\left| \vec{F}_{//} \right| > \mu_s R$ ) le corps va se mettre à se mouvoir avec une vitesse  $\vec{v}$  sur la surface, en subissant un frottement cinétique  $\vec{f}_c$  qui va essayer de le ralentir. Cette fois-ci, nous avons

$$\vec{f}_c = -\mu_c R \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire porté par la vitesse ( $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v}$ ) et  $\mu_c$  est le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique). Il faut savoir qu'empiriquement  $\mu_c < \mu_s$ , ce qui fait que  $\left| \vec{f}_c \right| < \left| \vec{f}_s^{\max} \right|$ .

Quand un objet se déplace avec une vitesse  $\vec{v}$  dans un milieu fluide, il va subir une force de frottement visqueux de la part du fluide qui l'entoure. Pour de faibles vitesses, cette force est donnée par

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v} \quad (\text{Loi de Stokes})$$

où  $\lambda$  est un coefficient positif qui dépend de la viscosité du milieu  $\eta$  et de la forme de l'objet. Dans le cas d'une petite sphère de rayon  $r$ ,  $\lambda = 6\pi\eta r$ .

Pour des vitesses plus importantes, le frottement fluide devient proportionnel au carré de la vitesse

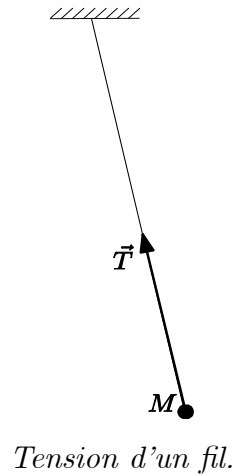
$$\vec{f} = -\alpha v \vec{v} \quad (\text{Loi de Newton})$$

où  $\alpha$  est un coefficient réel positif.

### La tension d'un fil

La tension  $\vec{T}$  est le nom de la force appliquée par une corde (ou un fil) sur un objet à condition qu'elle soit bien tendue. Cette force est portée par la corde dans le sens qui va vers l'extérieur de l'objet afin de tirer sur lui. Comme la réaction et le frottement, elle dépend de la situation qu'on étudie. Quand la corde est inextensible, la tension fait en sorte que le mouvement se fait à distance constante du point de suspension.

Dans le cas d'un point matériel attaché par un fil au plafond, la tension est représentée par la figure suivante :



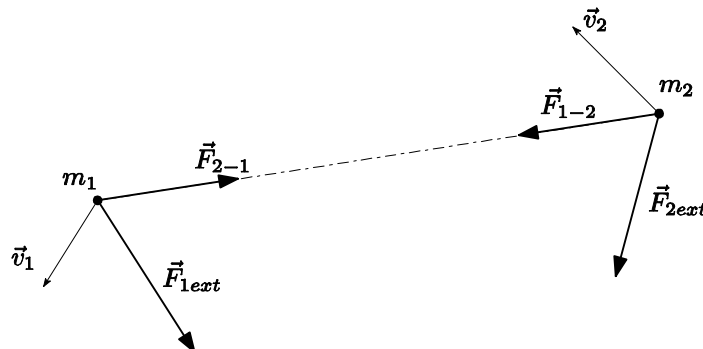
### 3.3 La conservation de la quantité de mouvement

Soit un système de 2 points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$  dont les vitesses sont respectivement  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . La quantité de mouvement totale est alors

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

En appliquant le PFD, on obtient

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \left( \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1ext} \right) + \left( \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2ext} \right)$$



Représentation des forces agissant sur les deux points  $m_1$  et  $m_2$ .

où  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est la force appliquée par  $m_2$  sur  $m_1$  et  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  est la force appliquée par  $m_1$  sur  $m_2$  dont la résultante est nulle selon la troisième loi de Newton (donc  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$ ).  $\vec{F}_{1ext}$  et  $\vec{F}_{2ext}$  représentent les forces extérieures agissant respectivement sur  $m_1$  et  $m_2$ . Ainsi,

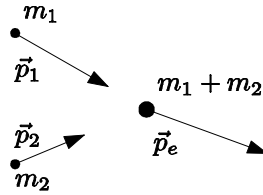
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext}.$$

Maintenant, si en plus, le système est isolé (ce qui veut dire que  $\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext} = \vec{0}$ ), la quantité de mouvement totale va se conserver  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ .

Cette propriété peut-être utilisée pour déterminer les quantités de mouvement après un choc des deux points matériels.

Un choc est élastique si l'énergie cinétique (voir le chapitre suivant) des deux particules se conserve.

Un choc est dit mou si les deux points s'unissent après le choc et se déplacent ensuite avec la même vitesse en formant un point matériel de masse  $m_1 + m_2$ .



Choc mou de  $m_1$  et  $m_2$ .

Autrement dit, à l'instant du choc  $t_c$ ,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{ens} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{ens}. \quad (3.3.1)$$

Revenons au cas général où la collision va se faire sans que le système soit vraiment isolé, ce qui veut dire que  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext}$  à l'instant de l'impact  $t_c$ , sans oublier que les deux points matériels vont occuper le même point de l'espace. Supposons que la durée du choc  $\Delta t$  est très très courte, dans cette situation

$$\Delta \vec{p} = \left( \vec{F}_{1ext}(t_c) + \vec{F}_{2ext}(t_c) \right) \Delta t \simeq 0$$

ce qui démontre que même si les forces extérieures ne s'annulent pas, l'utilisation de la conservation de la quantité de mouvement constitue une bonne approximation pour étudier ce choc.



### 3.4 Exercices du chapitre 3

#### Exercices 1

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  pouvant être repéré par sa coordonnée  $x$ . Le point est amené à se déplacer sur l'axe  $OX$  d'un référentiel galiléen  $R(OXYZ)$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $M$  se trouve en  $O$  avec un vecteur-vitesse initial  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$  avec  $v_0 > 0$ .

Déterminer l'équation horaire du mouvement  $x(t)$  dans les deux cas suivants :

1. La force à laquelle est soumis le point  $M$  est  $\vec{F} = -\lambda m \frac{dx}{dt} \vec{i}$  où  $\lambda$  est une constante positive (frottement visqueux) ;
2. La force  $\vec{F} = -\alpha m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \vec{i}$  où  $\alpha$  est une constante positive (résistance de l'air).

#### Solution :

1. L'application du PFD, nous donne l'équation différentielle suivante :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} = -\lambda m \frac{dx}{dt} \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\lambda \frac{dx}{dt}.$$

Il s'agit d'une équation linéaire de deuxième degré. Travaillons d'abord avec la vitesse :

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad v = Ae^{-\lambda t}$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{A}{\lambda} e^{-\lambda t} + B$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration. A l'instant  $t = 0$ , nous avons  $x = 0$  et  $v = v_0$ , donc

$$\begin{cases} -\frac{A}{\lambda} + B = 0 \\ A = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = \frac{v_0}{\lambda} \\ A = v_0. \end{cases}$$

Finalement, l'équation horaire de la coordonnée  $x$  est

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

On remarque que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{v_0}{\lambda}$  ; c'est l'abscisse où le point  $M$  va s'immobiliser.

2. Toujours en appliquant le PFD  $\left(m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i\right)$ , l'équation du mouvement sera

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} = \vec{F} = -\alpha m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\alpha v^2.$$

Il s'agit d'une équation non linéaire de deuxième degré qu'on peut intégrer par séparation des variables

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -\alpha dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -\alpha t + A \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\alpha t - A}$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha t - A} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha t - A) + B$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration. A l'instant  $t = 0$ , nous avons toujours  $x = 0$  et  $v = v_0$ , donc

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \ln(-A) + B = 0 \\ \frac{1}{-A} = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = \frac{1}{\alpha} \ln(v_0) \\ A = -\frac{1}{v_0}. \end{cases}$$

Cette fois-ci, l'équation horaire de la coordonnée  $x$  est

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha v_0 t + 1).$$

## Exercice 2

Un solide  $S$ , assimilé à un point matériel, de masse  $m = 0,1$  kg, glisse le long d'un plan incliné qui forme un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale.

1. Le solide est abandonné depuis le point  $A$  sans vitesse initiale. En considérant les frottements négligeables, déterminer la nature du mouvement de  $S$ . Justifier.

2- Calculer la durée du parcours  $AB$ , sachant que  $AB = 2$  m.

3- En fait, cette durée est de 1,3 s, en admettant l'existence des frottements caractérisés par un coefficient de frottements cinétique  $\mu_c$ . Représenter les forces agissant sur  $S$  dans ce cas, ensuite déterminer le coefficient  $\mu_c$ .

4- Le solide est maintenant lancé du point  $B$  vers le point  $A$ . Au point  $B$  sa vitesse est de  $3\text{m/s}$ . Déterminer la position du point  $C$  où la vitesse du solide s'arrête :

a- Si on néglige les frottements.

b- Si le coefficient de frottement est de  $\mu_c = 0.11$ .

On prendra dans le problème  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Solution

1. Nature du mouvement : nous avons

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} OX : & -mg \sin \alpha = ma \\ OY : & R - mg \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -g \sin \alpha = -5\text{m/s}^2.$$

$a = C^{ste}$  et  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$  car la vitesse et l'accélération sont orientées dans le même sens, donc le mouvement est uniformément accéléré.

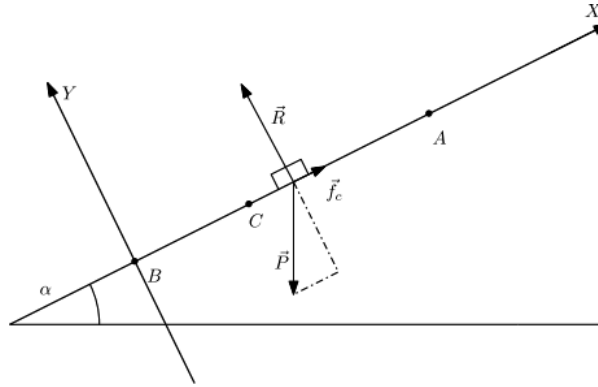
2. Nous allons prendre le point  $B$  comme origine, ce qui fait que l'équation horaire de notre solide est

$$x = -g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + x_A.$$

Le temps de parcours  $t_p$  s'obtient comme suit

$$x_B = -g \sin \alpha \frac{t_p^2}{2} + x_A \Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{2(x_A - x_B)}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 AB}{g \sin \alpha}} = 0,89s.$$

3.



Plan incliné

Maintenant,

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_c = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} OX : & f_c - mg \sin \alpha = ma \\ OY : & R = mg \cos \alpha = \frac{f_c}{\mu_c} \end{cases} \Rightarrow a = -g \sin \alpha + \mu_c g \cos \alpha.$$

L'équation horaire du solide devient  $x = (-g \sin \alpha + \mu_c g \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + x_A$ , d'où

$$x_B = (-g \sin \alpha + \mu_c g \cos \alpha) \frac{t_p^2}{2} + x_A \Rightarrow \mu_c = -\frac{1}{g \cos \alpha} \left( 2 \frac{AB}{t_p^2} - g \sin \alpha \right) = 0,30.$$

4. Calcul de la distance  $BC$  :

a. Sans frottement : l'équation horaire de notre solide à présent est

$$a = -g \sin \alpha \Rightarrow v_x = -g \sin \alpha t + v_0 \Rightarrow x = -g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t \quad (x_0 = x_B = 0).$$

Nous avons donc  $v_x = -g \sin \alpha t + v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0 - v_x}{g \sin \alpha}$ . Remplaçons dans l'équation horaire de  $x$

$$x = -\frac{1}{2} \frac{(v_0 - v_x)^2}{g \sin \alpha} + v_0 \frac{v_0 - v_x}{g \sin \alpha}.$$

Au point  $C$ , la vitesse  $v_x = 0$ , alors  $x_c = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin \alpha} = 0,9m$ , d'où  $BC = x_C - x_B = 0,9m$ .

b- Avec frottement : Il faut faire le même raisonnement à condition de prendre  $a = -g \sin \alpha - \mu_c g \cos \alpha$ , car le frottement cette fois-ci est orienté dans le sens négatif,

à l'opposé du sens de mouvement. Donc

$$x_C = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)} \quad \Rightarrow \quad x_C = BC = 0.59m.$$

### Exercices 3

Un chasseur à l'arc lance une flèche de masse  $m = 50g$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale sur un pigeon de masse  $M = 450g$  au moment où ce dernier passe au dessus de sa tête à une hauteur  $h = 10m$ .

1. Etudier le mouvement de la flèche sachant que  $|\vec{v}_0| = 15m/s$ .
2. Sachant que ce pigeon se déplace en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse  $\vec{u} = 3\vec{i}$  (m/s), déterminer l'angle  $\alpha$  pour que le chasseur atteigne sa cible en supposant que la seule force qui entre en jeu est la force du poids.
3. Déterminer l'instant  $t_c$  de l'impact ainsi que les positions et les vitesses de la flèche et du pauvre pigeon à ce moment.
4. Juste après l'impact, le pigeon et la flèche vont former un seul corps. Déterminer la vitesse  $\vec{v}_{ens}(t_c)$  de l'ensemble à cet instant.
5. Déterminer la variation de la vitesse  $\vec{v}_{ens}$  de l'ensemble sous l'effet de son poids.
6. Déterminer la trajectoire de l'ensemble pigeon-flèche.
7. En déduire les coordonnées du point où le pigeon va tomber sur le sol.

### Solution :

1. La flèche va se déplacer sous l'effet de son poids ( $g = 10m/s^2$ ). Donc

$$m\vec{a} = -mg\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_z = -gt + v_{z0} \end{cases}$$

Mais à  $t = 0$ ,  $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\vec{i} + v_0 \sin(\alpha)\vec{k}$ , d'où

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\alpha) \\ v_z = -gt + v_0 \sin(\alpha). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 15 \cos(\alpha) \\ v_z = -10t + 15 \sin(\alpha). \end{cases}$$

Après intégration et en utilisant le fait que  $x_0 = z_0 = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t \\ z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \cos(\alpha)t \\ z = -5t^2 + 15 \sin(\alpha)t. \end{cases}$$

2. Les équations horaires du mouvement de pigeon sont

$$\begin{cases} x_p = u t \\ z_p = h. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p = 3t \\ z_p = 10. \end{cases}$$

Au moment de l'impact, il faut que  $x = x_p$ , alors

$$15 \cos(\alpha)t = 3t \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{1^2}{5^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{alors } \alpha \simeq 1,37\text{rd} \simeq 78,46^\circ$$

où nous avons utilisé la relation  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  et le fait que  $\sin(\alpha) \geq 0$  si  $\alpha \in [0, \pi/2]$ .

3. Nous avons aussi  $z = z_p$  au moment de l'impact, d'où

$$-5t^2 + 6\sqrt{6}t = 10 \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{3}{5}\sqrt{6} - \frac{2}{5}\text{s} = 1,07\text{s}.$$

La deuxième solution de cette équation est  $t_1 = \frac{3}{5}\sqrt{6} + \frac{2}{5}\text{s} = 1,87\text{s}$  mais elle est rejetée car  $t_1 > t_c$  (le pigeon sera atteint une bonne fois pour toutes). A cet instant  $t_c$ ,

$$\vec{v}_p \begin{cases} v_{px} = 3 \\ v_{py} = 0 \end{cases} ; \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = 3 \\ v_z = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = x_p = \frac{9}{5}\sqrt{6} - \frac{6}{5} \simeq 3,2 \\ z = z_p = 10. \end{cases}$$

Ces relations sont obtenues en remplaçant  $t$  par  $t_c$  dans les équations de  $x, z, x_p, z_p, v_x, v_y, v_{px}$  et  $v_{pz}$  précédentes.

4. Appliquons le théorème de la conservation de la quantité de mouvement, et cela en supposant que les forces extérieures sont négligeables au moment du choc. Juste avant l'impact, les quantités de mouvement de la flèche et du pigeon sont respectivement  $\vec{p}(t_c) = m\vec{v}(t_c)$  et  $\vec{p}_p(t_c) = M\vec{v}_p(t_c)$ . Juste après le choc mou, l'ensemble va avoir une masse  $(M + m)$  avec une vitesse  $\vec{v}_{ens}(t_c)$ . En d'autres termes,

$$\vec{p}_p(t_c) + \vec{p}(t_c) = \vec{p}_{ens}(t_c) \quad \Leftrightarrow \quad M\vec{v}_p(t_c) + m\vec{v}(t_c) = (M + m)\vec{v}_{ens}(t_c).$$

On en déduit que

$$\vec{v}_{ens}(t_c) = \frac{M}{M + m}\vec{v}_p(t_c) + \frac{m}{M + m}\vec{v}(t_c).$$

Finalement,

$$\vec{v}_{ens}(t_c) = \frac{450}{500}(3\vec{i}) + \left(\frac{50}{500}\right)(3\vec{i} + 4\vec{j}) = 3\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}$$

5. A l'instant  $t_c = \frac{3}{5}\sqrt{6} - \frac{2}{5}\text{s}$ , l'ensemble flèche+pigeon occupe le point  $(x_{ens}(t_c), z_{ens}(t_c)) = (\frac{9}{5}\sqrt{6} - \frac{6}{5}, 10)$  avec la vitesse  $\vec{v}_{ens}(t_c) = 3\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}$ . A partir de maintenant, le PFD va

s'écrire comme suit

$$(m + M)\vec{a}_{ens} = -(m + M)g\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} a_{ens,x} = \frac{dv_{ens,x}}{dt} = 0 \\ a_{ens,z} = \frac{dv_{ens,z}}{dt} = -g. \end{cases}$$

L'intégration est directe

$$\begin{cases} v_{ens,x} = v_{ens,x}(t_c) \\ v_{ens,z} = -g(t - t_c) + v_{ens,z}(t_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{ens,x} = 3 \\ v_{ens,z} = -10(t - 1,07) + \frac{2}{5}. \end{cases}$$

6. Après une deuxième intégration

$$\begin{cases} x_{ens} = v_{ens,x}(t_c)(t - t_c) + x_{ens}(t_c) \\ z_{ens} = -\frac{g}{2}(t - t_c)^2 + v_{ens,z}(t_c)(t - t_c) + z_{ens}(t_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{ens} = 3(t - 1,07) + 3,2 \\ z_{ens} = -5(t - 1,07)^2 + \frac{2}{5}(t - 1,07) + 10. \end{cases}$$

D'après la première équation  $t - t_c = \frac{x_{ens} - x_{ens}(t_c)}{v_{ens,x}(t_c)}$ , alors l'équation de la trajectoire est

$$z_{ens} = -\frac{g}{2} \left( \frac{x_{ens} - x_{ens}(t_c)}{v_{ens,x}(t_c)} \right)^2 + v_{ens,z}(t_c) \left( \frac{x_{ens} - x_{ens}(t_c)}{v_{ens,x}(t_c)} \right) + z_e(t_c).$$

A.N :

$$z_{ens} = -\frac{5}{9}(x_{ens} - 3,2)^2 + \frac{2}{15}(x_{ens} - 3,2) + 10.$$

7. Sur le sol,  $z_{ens} = 0$ , donc

$$-\frac{5}{9}(x_{ens} - 3,2)^2 + \frac{2}{15}(x_{ens} - 3,2) + 10 = 0 \Rightarrow x_{ens} = 7,6\text{m}$$

où nous avons rejeté la solution négative car nous travaillons dans la région où les  $x$  sont positifs.

#### Exercices 4

Une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$  se déplaçant sous l'influence d'un champ électromagnétique constant ( $\vec{E} = E_0\vec{j}$  et  $\vec{B} = B_0\vec{k}$ ) va subir la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

1. Ecrire les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes. On pose  $\omega = \frac{q}{m}B_0$ .

2. Résoudre les équations obtenues, sachant qu'à l'instant initial  $t = 0$ , notre particule occupe l'origine avec une vitesse nulle.

#### Solution

1. Le PFD ( $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ ) va s'écrire ici

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

En effet,

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = B_0 (\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j})$$

D'où les équations du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m} B_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{q}{m} B_0 \dot{x} + \frac{q}{m} E_0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} + \frac{q}{m} E_0 \\ \ddot{z} = 0. \end{cases}$$

2. Commençons par  $\ddot{z} = 0$ . Après intégration, on obtient  $z = C_1 t + C_2$ , mais  $z(0) = 0$  et  $\dot{z}(0) = 0$ , donc

$$\begin{cases} z(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = 0.$$

Nous avons aussi  $\ddot{x} = \omega \dot{y} \Rightarrow \dot{x} = \omega y + C_3$ , mais comme  $\dot{x}(0) = 0$  et  $y(0) = 0$ , d'où

$$\dot{x}(0) = \omega y(0) + C_3 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow \dot{x} = \omega y.$$

La même chose avec l'équation  $\ddot{y} = -\omega \dot{x} + \frac{q}{m} E_0 \Rightarrow \dot{y} = -\omega x + \frac{q}{m} E_0 t + C_4$ , or  $\dot{y}(0) = 0$  et  $x(0) = 0$ , donc

$$\dot{y}(0) = -\omega x(0) + \frac{q}{m} E_0 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow \dot{y} = -\omega x + \frac{q}{m} E_0 t.$$

Nous avons donc obtenu les deux équations  $\dot{x} = \omega y$  et  $\dot{y} = -\omega x + \frac{q}{m} E_0 t$ . En dérivant la deuxième par rapport à  $t$ , on aboutit à  $\ddot{y} + \omega \dot{x} = \frac{q}{m} E_0$ , mais grâce à la première on aura

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{q}{m} E_0.$$

C'est une équation linéaire de deuxième degré dont la solution est de la forme

$$y = C_5 \cos(\omega t) + C_6 \sin(\omega t) + \frac{q}{m\omega^2} E_0.$$

En utilisant les conditions initiales  $y(0) = 0$  et  $\dot{y}(0)$ , nous obtenons l'expression finale

$$y(t) = \frac{qE_0}{m\omega^2} (1 - \cos(\omega t)).$$

Pour déterminer  $x(t)$ , utilisons l'équation précédente  $\dot{y} = -\omega x + \frac{q}{m} E_0 t$ . En effet,  $x = -\frac{1}{\omega} \dot{y} + \frac{q}{m\omega} E_0 t$ , d'où

$$x(t) = \frac{qE_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin(\omega t)).$$

La trajectoire décrite par notre particule est ce qu'on appelle une cycloïde dans le plan  $OXY$ .

### Exercices 5

Une fusée contient un mélange combustible qui produit en brûlant un gaz de très forte pression qui s'échappe par la tuyère avec une vitesse relative  $\vec{v}_e$  par rapport à cette fusée, ce qui fait que sa masse diminue dans le temps.

A un instant  $t$ , la masse de notre fusée est  $m$  et sa vitesse égale à  $\vec{v}$ . Après une durée infinitésimale  $\Delta t$ , elle aura une masse  $m'$  après avoir éjecté une masse  $(m - m')$  de gaz avec une vitesse  $\vec{v}_e$  par rapport à sa tuyère, ce qui va lui permettre d'avoir une vitesse  $\vec{v}'$ .

1. Déterminer la quantité de mouvement de la fusée à l'instant  $t$ .
2. Déterminer la quantité de mouvement de l'ensemble de la fusée et du gaz éjecté à l'instant  $t + \Delta t$ .
3. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation du mouvement de la fusée.

Supposons maintenant que le mouvement se fait selon l'axe vertical  $OZ$ .

4. Dans le cas où on néglige les forces extérieures et que le mouvement se fait verticalement selon  $(OZ, \vec{k})$  vers le haut, déterminer la relation entre la masse  $m_0$  et la vitesse  $v_0$  initiales de la fusée avec sa masse  $m_f$  et sa vitesse  $v_f$  finale quand le combustible sera complètement épuisé ( $\vec{v}_e$  est constant).

5. Dans le cas où la masse du gaz éjecté par unité de temps appelée le débit massif  $D$  est constant, la variation de la masse de la fusée sera  $\frac{dm}{dt} = -D$ . Déterminer la variation de vitesse de la fusée en présence d'un champ de gravité  $-mg\vec{k}$ .

6. A partir de maintenant, nous allons prendre en considération le poids de la fusée  $-mg\vec{k}$  ainsi que la résistance de l'air  $-\lambda m v^2 \vec{k}$  qu'elle subit ( $\lambda > 0$ ). En supposant que la variation de la masse suit la loi  $m = m_0 e^{-bt}$  ( $b > 0$ ) et que  $v_0 = 0$  à l'instant  $t_0 = 0$ , déterminer la variation de la vitesse de la fusée. Calculer la limite de cette vitesse quand  $t \rightarrow \infty$ .

7. En réalité, la fusée cesse d'éjecter du gaz à un certain temps  $t_f$  après le décollage. Calculer sa masse  $m_f$  à cet instant, ensuite trouver la relation avec la vitesse  $v_f$ .

### Solution

1. A l'instant  $t$ , la masse de la fusée est  $m$  et sa vitesse est  $\vec{v}$ ; donc

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}.$$



2. A l'instant  $t + \Delta t$ , d'un coté, la masse de la fusée est  $m'$  et sa vitesse est  $\vec{v}'$ , d'un autre coté, le gaz éjecté à une masse  $m - m'$  et une vitesse  $\vec{v}' + \vec{v}_e$  par rapport au repère terrestre. Il ne faut pas perdre de vue que ce gaz ( $m - m'$ ) est déjà pris en compte à l'instant  $t$  dans la formule  $\vec{p}(t) = m\vec{v}$  avant qu'il soit éjecté. C'est pour cela que nous allons prendre la quantité de mouvement de l'ensemble fusée+gaz

$$\vec{p}(t + \Delta t) = m'\vec{v}' + (m - m')(\vec{v}' + \vec{v}_e)$$

d'où

$$\vec{p}(t + \Delta t) = m\vec{v}' - (m' - m)\vec{v}_e.$$

3. Le PFD implique

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\Delta \vec{v} - \Delta m \vec{v}_e}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i$$

où  $\Delta m = m' - m$  et  $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ . Finalement,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \frac{dm}{dt} \vec{v}_e.$$

Le terme  $\frac{dm}{dt} \vec{v}_e$  est la force de propulsion de la fusée. Sachant que  $\frac{dm}{dt} < 0$  (car la masse de la fusée diminue suite à l'éjection du gaz), si  $\vec{v}_e$  est orientée vers le bas, la propulsion sera vers le haut.

4. La projection de la loi précédente sur l'axe vertical avec  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  nous donne la relation

$$m \frac{dv}{dt} \vec{k} = \left( \frac{dm}{dt} (-v_e \vec{k}) \right) \quad \Rightarrow \quad m dv = -v_e dm.$$

Après intégration

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = -v_e \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad v_f = v_e \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) + v_0.$$

Il s'agit de l'équation de Tsiolkovski. Il est clair que  $v_f > v_0$  car  $m_f < m_0$ .

5. Nous avons  $\frac{dm}{dt} = -D \Rightarrow m = -D(t - t_0) + m_0$ , où  $t_0$  est l'instant initial. En appliquant le PFD, nous allons avoir l'équation

$$\frac{dv}{dt} = -g + \underbrace{\frac{D}{-D(t - t_0) + m_0}}_{= -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}} v_e \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \left( -g + \frac{D}{-D(t - t_0) + m_0} v_e \right) dt.$$

Après intégration, nous obtenons la relation

$$v = -g(t - t_0) - v_e \ln \left( 1 - \frac{D}{m_0} (t - t_0) \right) + v_0.$$

6. Le PFD implique

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v_e - mg - \lambda m v^2.$$

Sachant que  $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -b$ , l'équation de la vitesse sera

$$\frac{dv}{dt} = b v_e - g - \lambda v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sigma^2 - \lambda v^2} = dt$$

où  $\sigma = \sqrt{b v_e - g}$ . Intégrons cette équation comme suit

$$\int_{v_0=0}^v \left( \frac{1}{(\sigma - \sqrt{\lambda}v)} + \frac{1}{(\sigma + \sqrt{\lambda}v)} \right) dv = \int_{t_0=0}^t 2\sigma dt.$$

Finalement,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \left( \frac{\sigma + \sqrt{\lambda}v}{\sigma - \sqrt{\lambda}v} \right) = 2\sigma t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \tanh(\sigma \sqrt{\lambda} t).$$

On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \tanh(\sigma \sqrt{\lambda} t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{b v_e - g}}{\sqrt{\lambda}}$ .

7. Nous avons  $m = m_0 e^{-bt}$ , donc  $m_f = m_0 e^{-bt_f}$ . La vitesse  $v_f = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \tanh(\sigma \sqrt{\lambda} t_f) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \frac{e^{\sigma \sqrt{\lambda} t_f} + e^{-\sigma \sqrt{\lambda} t_f}}{e^{\sigma \sqrt{\lambda} t_f} - e^{-\sigma \sqrt{\lambda} t_f}}$ . Finalement

$$v_f = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \frac{m_f^{-\frac{\sigma \sqrt{\lambda}}{b}} + m_f^{\frac{\sigma \sqrt{\lambda}}{b}}}{m_f^{-\frac{\sigma \sqrt{\lambda}}{b}} - m_f^{\frac{\sigma \sqrt{\lambda}}{b}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \frac{1 + m_f^{\frac{2\sigma \sqrt{\lambda}}{b}}}{1 - m_f^{\frac{2\sigma \sqrt{\lambda}}{b}}}.$$

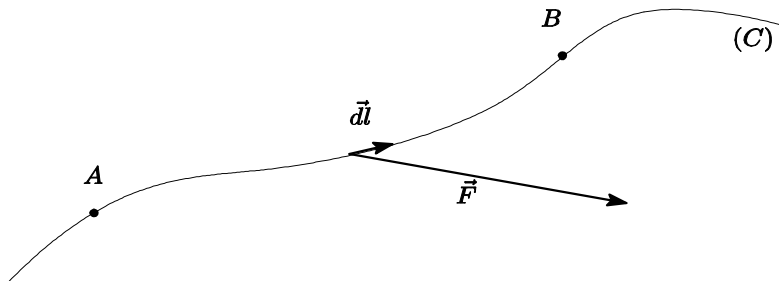
# Travail et Energie d'un Point Matériel

Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état. Autrement dit, toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangée. En mécanique, on s'intéresse à trois types d'énergies qui sont l'énergie cinétique liée au déplacement des objets, l'énergie potentielle emmagasinée dans un système et l'énergie mécanique qui est la somme des deux énergies précédentes.

## 4.1 Travail d'une force

Le travail mesure l'effort d'une force en déplacement. Autrement dit, si une force  $\vec{F}$  varie d'une façon continue pendant que son point d'application décrit une courbe orientée  $(C)$ , son travail le long d'un arc  $\widehat{AB}$  de cette courbe est égal à sa circulation sur ce trajet :

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (4.1.1)$$



*Travail de la force  $\vec{F}$  le long de arc  $\widehat{AB}$ .*

Il est clair que  $W_{AB} = 0$  si  $\vec{F} \perp d\vec{l}$  sur tout le trajet  $\widehat{AB}$ . En coordonnées cartésiennes,  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  et  $d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , d'où

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.1.2)$$

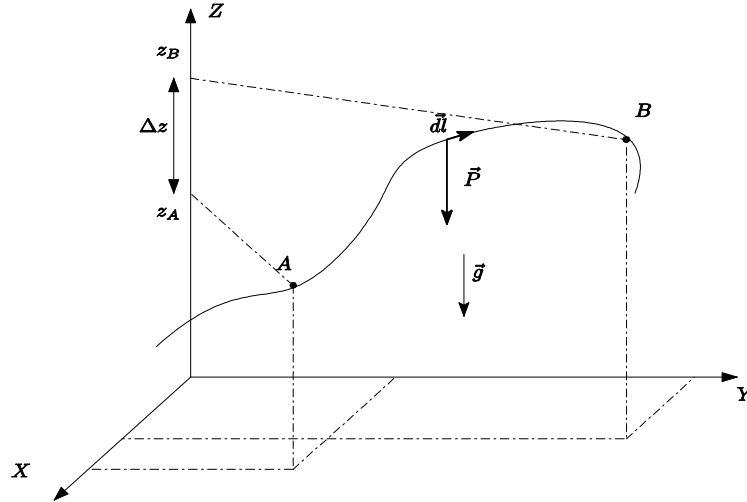
Si  $W_{AB} < 0$ , on parle d'un travail moteur, sinon ( $W_{AB} > 0$ ) le travail est résistant.

Il est clair que si la force  $\vec{F}$  est constante et que le trajet  $\widehat{AB} = \overrightarrow{AB}$  est un segment de droite, le travail sera donné par

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (4.1.3)$$

Un corps de masse  $m$  dans un champ de gravité constant  $\vec{g}$  subit la force de son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Si ce corps est un point matériel  $M$  qui se déplace le long d'une trajectoire reliant les point  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$ , le travail de son poids sera

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} -mgdz = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A) = -mg\Delta z. \quad (4.1.4)$$

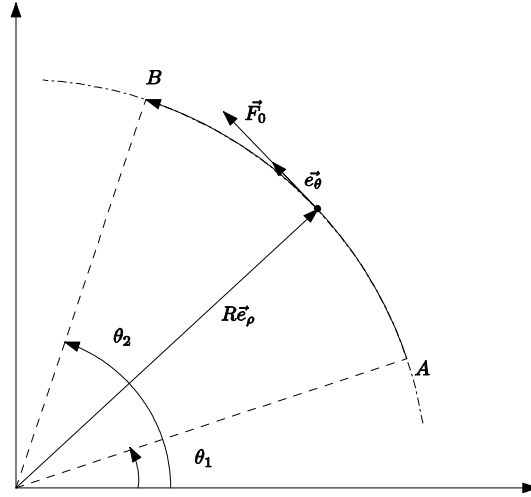


*Travail du poids dépendant uniquement de l'altitude.*

Cela montre que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la variation d'altitude entre les points de départ et d'arrivée. Le travail  $W_{AB} > 0$  si le point  $M$  descend ; sinon  $W_{AB} < 0$ .

Si un point matériel se déplaçant sur un arc de cercle de rayon  $R$ , subit une force tangentielle  $\vec{F}_T$  constante en module, le travail dans ce cas peut-être calculé en coordonnées polaires

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} F_0 \vec{e}_\theta \cdot R d\theta \vec{e}_\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_0 R d\theta = F_0 R \Delta\theta = F_0 \widehat{AB}. \quad (4.1.5)$$



Travail le long d'un arc de cercle.

Donc le travail est égal au module de la force multiplié par la longueur de l'arc avec un signe moins si ce travail est résistant.

## 4.2 Energies cinétique et potentielle

L'énergie cinétique est due au mouvement d'un corps par rapport à un référentiel donné. Dans le cas d'un point matériel  $M$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}$ , l'énergie cinétique est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Supposons maintenant que ce point  $M$  va se mouvoir du point  $A$  vers le point  $B$  sous l'effet des forces  $\vec{F}_i$ . D'après le PFD,

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i &\Rightarrow m d\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i dt &\Rightarrow m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} dt \\ &\Rightarrow \int_{v_A}^{v_B} \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \sum_i \int_{A \rightarrow B} \vec{F}_i \cdot \vec{dl} &\Rightarrow \int_{v_A}^{v_B} \frac{m}{2} d(v^2) = \sum_i W_i \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \sum_i W_i &\Rightarrow \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_i. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces extérieures et intérieures qui s'exercent sur ce point.

Pour parler de l'énergie potentielle, il faut d'abord savoir qu'une force  $\vec{F}$  qui dépend des coordonnées et du temps est dite conservative si elle vérifie la condition

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Dans ce cas, on démontre qu'il existe une fonction scalaire  $E_p$  telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\vec{\nabla}E_p.$$

Calculons le travail de cette force entre deux points  $A$  et  $B$

$$W_{\vec{F}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \vec{dl} = - \int_{\widehat{AB}} \vec{\nabla}E_p \cdot \vec{dl} = - \int_A^B dE_p = -(E_p(B) - E_p(A)) = -\Delta E_p.$$

En effet, la fonction  $E_p$  est appelée l'énergie potentielle, et on dit que la force  $\vec{F}$  dérive d'un potentiel. L'équation précédente montre que le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, il dépend juste des énergies potentielles aux points de départ et d'arrivée.

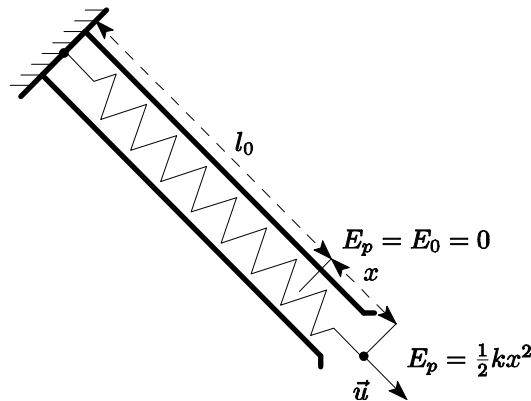
La force de la pesanteur  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$  est un exemple de force conservative qui dérive d'énergie potentielle de la pesanteur. En effet,

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = - \int -mg\vec{k} \cdot dz\vec{k} = \int mgdz = mgz + E_0$$

où  $E_0$  est une constante qu'on choisit en fonction de l'origine des énergies potentielles.

Un deuxième exemple est celui de la force de rappel d'un ressort. Nous avons  $\vec{F} = -kx\vec{u}$  et  $\vec{dl} = dx\vec{u}$ , d'où

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = - \int -kx\vec{u} \cdot dx\vec{u} = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + E_0.$$



*Energie potentielle élastique.*

Il s'agit de l'énergie potentielle élastique. Dans cette formule, le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire constant (cela revient à dire que l'axe du ressort est bien fixe).

Si plusieurs forces agissant sur un point matériel sont conservatives, l'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de ces forces, et sa variation sera égale de la somme des travaux de ces forces avec un signe moins (-).

### 4.3 Energie mécanique

L'énergie mécanique désigne l'énergie d'un système emmagasinée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle totale. Dans le cas d'un point matériel, nous avons

$$E_m = E_c + E_p.$$

Il s'en suit que

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p.$$

Mais  $\Delta E_c = \sum$  des travaux de toutes les forces et  $\Delta E_p = - \sum$  des travaux des forces conservative, donc

$$\Delta E_m = \sum \text{des travaux des forces non conservatives.}$$

Autrement dit, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservative (le frottement et les forces de choc par exemple).

### 4.4 Exercices du chapitre 4

#### Exercice 1

Un point matériel  $M$  de masse 1kg se déplace dans le plan  $XY$  de l'origine  $O$  au point  $A(2, -1)$  suivant les équations horaires

$$x = 2t \quad \text{et} \quad y = -t^2.$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire.

En effet, ce déplacement s'effectue sous l'effet de trois forces

$$\vec{F} = -y\vec{i} + xy\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{f} = tv_x\vec{i} + x\vec{j}$$

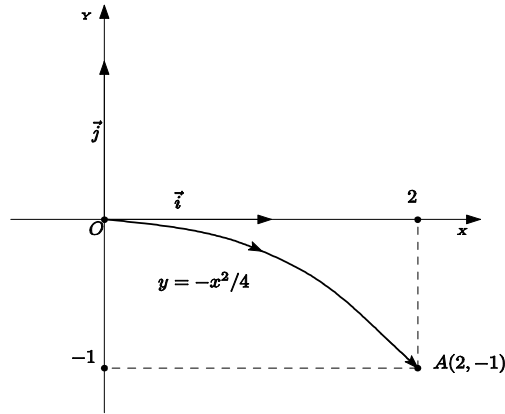
tandis que la troisième force  $\vec{F}$  est inconnue.

2. Calculer le travail de la force  $\vec{F}$  en utilisant les équations horaires.
3. Montrer que  $\vec{F}$  n'est pas conservative, ensuite calculer le travail de la force  $\vec{F}$  en utilisant l'équation de la trajectoire.
4. Calculer le travail de la force  $\vec{f}$ .
5. Déterminer le travail de  $\vec{F}$ .
6. Déterminer l'expression de  $\vec{F}$  sur la trajectoire.
7. Calculer le travail de  $\vec{F}$  à l'aide de la relation obtenue.

**Solution**

## 1. La trajectoire

$$x = 2t \text{ et } y = -t^2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^2}{4} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 2$$



Représentation graphique du chemin  $y = -\frac{x^2}{4}$ , où  $0 \leq x \leq 2$ .

2. Le travail de  $\vec{F}$ 

$$\delta W_F = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = -ydx + xydy.$$

Mais  $x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$  et  $y = -t^2 \Rightarrow dy = -2tdt$ . Il faut ajouter à cela le fait que  $O(x = 0, y = 0) \Rightarrow t = 0$  et  $A(x = 2, y = -1) \Rightarrow t = 1$ . Donc,

$$W_F = \int_0^1 -(-t^2) 2dt + 2t(-t^2)(-2tdt) = \int_0^1 (2t^2 + 4t^4) dt = \frac{22}{15} \text{ Joules.}$$

3. Pour que  $\vec{F}$  soit conservative, il faut que  $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$ , or

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & xy & 0 \end{vmatrix} = (y-1)\vec{k} \neq \vec{0}$$

donc la force  $\vec{F}$  n'est pas conservative et son travail peut dépendre du chemin suivi. Sur la trajectoire, nous avons  $y = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow dy = -\frac{1}{2}x dx$  et  $0 \leq x \leq 2$ , donc

$$W_F = \int_0^2 -\left(-\frac{x^2}{4}\right) dx + x \left(-\frac{x^2}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}x dx\right) = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\right) dx = \frac{22}{15} \text{ Joules.}$$

Nous avons abouti au même résultat.

4. La force  $\vec{f}$  dépend de la vitesse et du temps, donc pour calculer son travail, il faut utiliser les équations horaires du mouvement. Nous avons

$$x = 2t ; y = -t^2 ; dx = 2dt ; dy = -2tdt ; v_x = 2$$



Il faut ajouter à cela le fait que  $(x = 0, y = 0) \Rightarrow t = 0$  et  $(x = 2, y = -1) \Rightarrow t = 1$ .

On en déduit

$$\begin{aligned} W_f &= \int_O^A \vec{f} \cdot \vec{dl} = \int_O^A tv_x dx + x dy = \int_0^1 t(2)(2dt) + (2t)(-2tdt) \\ &= \int_0^1 (4t - 4t^2) dt = \frac{2}{3} \text{Joules.} \end{aligned}$$

5. Utilisons le théorème d'énergie cinétique  $E_c$  pour déterminer le travail  $W_{\mathbf{F}}$ . En effet, à l'instant  $t = 0$ , le point matériel  $M$  se trouve à l'origine, ensuite il va atteindre le point  $A(2, -1)$  à l'instant  $t = 1$ . Donc

$$\begin{cases} \text{A l'origine } \vec{v}_0 = 2\vec{i} \\ \text{Au point A } \vec{v}_A = 2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_c(O) = \frac{1}{2}m \vec{v}_0^2 = 2 \\ E_c(A) = \frac{1}{2}m \vec{v}_A^2 = 4. \end{cases}$$

A présent,

$$\Delta E_c = E_c(A) - E_c(O) = W_{\mathbf{F}} + W_F + W_f \Rightarrow W_{\mathbf{F}} = \Delta E_c - W_F - W_f = -\frac{2}{15} \text{Joules..}$$

6. Appliquons le PFD

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f} + \tilde{\mathbf{F}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{F}} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \vec{F} - \vec{f}.$$

Sur la trajectoire  $x = 2t$  et  $y = -t^2$ , donc  $\vec{F} = -y\vec{i} + xy\vec{j} = t^2\vec{i} - 2t^3\vec{j}$  et  $\vec{f} = tv_x\vec{i} + x\vec{j} = 2t\vec{i} + 2t\vec{j}$ . Sachant que  $m = 1\text{kg}$ , on en déduit que

$$\tilde{\mathbf{F}} = (-t^2 - 2t)\vec{i} + (-2 + 2t^3 - 2t)\vec{j} = (y - tv_x)\vec{i} + (-2 - xy - x)\vec{j}.$$

7. Le travail de  $\tilde{\mathbf{F}}$

$$\begin{aligned} W_{\tilde{\mathbf{F}}} &= \int_O^A \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 (-t^2 - 2t) 2dt + (-2 + 2t^3 - 2t)(-2tdt) \\ &= \int_0^1 2t^2(1 - 2t^2) dt = -\frac{2}{15} \text{Joules.} \end{aligned}$$

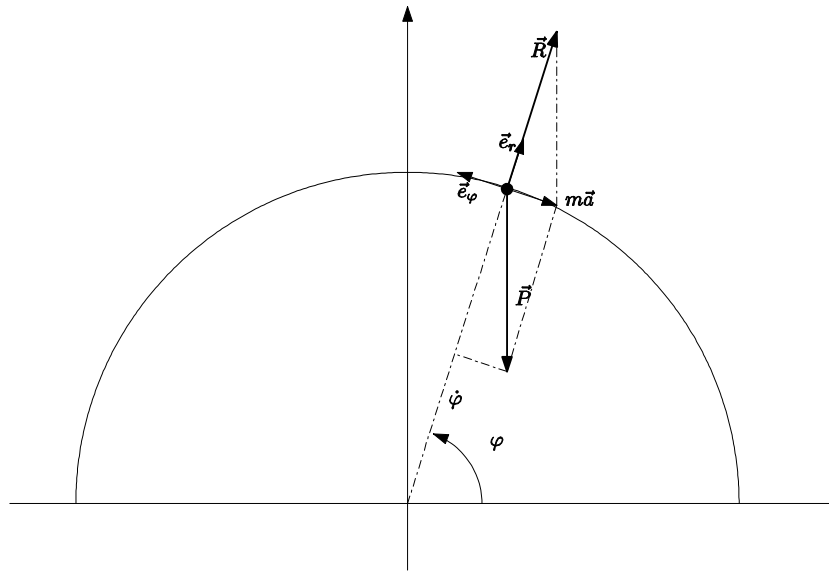
Ce résultat est identique au précédent.

## Exercice 2

On considère qu'un point  $M$  caractérisé par une masse  $m$ , est placé au sommet  $S$  d'une demi-sphère de rayon  $r$  sur un référentiel lié à la surface de la terre mais supposé galiléen. On associe à ce point une vitesse angulaire  $\dot{\varphi}_0$  et on suppose que le déplacement de  $M$  sur la demi-sphère est repéré par l'angle  $\varphi$  et reste exempt de tout frottement. Ici,  $\vec{g}$  représente l'accélération de la pesanteur.

- 1- Ecrire les équations du mouvement de  $M$  en coordonnées polaires ?
- 2- Que peut-on dire du travail de la réaction  $\vec{R}$  du support ?
- 3- a) Calculer l'énergie mécanique du point  $M$  si on suppose que l'origine des énergies potentielles est située au point  $O$ , centre de la sphère.  
b) En déduire l'expression générale de  $\dot{\varphi}$  en fonction de  $g, r, \dot{\varphi}_0$  et  $\varphi$ . Puis voir si à priori,  $M$  peut décrire la totalité de la demi sphère.
- 4- Déterminer l'expression de  $|\vec{R}|$  en appliquant la loi fondamentale de la dynamique.
- 5- Montrer qu'il existe une valeur de  $\varphi$  pour laquelle  $|\vec{R}|$  s'annule si  $\dot{\varphi}_0$  est négligeable. Quel est le mouvement de  $M$  ?

### Solution



Mouvement d'un point sur une surface sphérique.

1. D'après le PFD

$$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_\varphi) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ma_r = -mg \sin \varphi + R \\ ma_\varphi = -mg \cos \varphi. \end{cases}$$

Mais  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -r\dot{\varphi}^2$  et  $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = r\ddot{\varphi}$  (car  $r = C^{st}$ ), d'où

$$\begin{cases} -mr\dot{\varphi}^2 = -mg \sin \varphi + R \\ mr\ddot{\varphi} = -mg \cos \varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r\dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi - \frac{R}{m} \\ r\ddot{\varphi} = -g \cos \varphi. \end{cases}$$

2. La réaction est toujours perpendiculaire au déplacement du point  $M$ , donc son travail est nul ( $W_{\vec{R}} = 0$ ).

- 3.a. En un point  $M(r, \varphi)$ , l'énergie mécanique est

$$E_m(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr \sin \varphi.$$

car en coordonnées polaires  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = r^2\dot{\varphi}^2$  et  $y = r \sin \varphi$ .

3.b. On en déduit qu'au sommet  $S$ , l'énergie mécanique est

$$E_m(S) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}_0^2 + mgr.$$

La seule force qui travaille ici est le poids qui est une force conservative, donc l'énergie mécanique est conservée. Autrement dit,

$$E_m(S) = E_m(M) \Rightarrow \frac{r}{2}\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi = \frac{r}{2}\dot{\varphi}_0^2 + g$$

d'où

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + 2\frac{g}{r}(1 - \sin \varphi) \Rightarrow \dot{\varphi} = -\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + 2\frac{g}{r}(1 - \sin \varphi)}.$$

Nous avons pris la racine négative car le déplacement se fait dans le sens opposé à  $\vec{e}_\varphi$ .

4. D'après les équations du mouvement précédentes et la relation qu'on vient d'obtenir

$$R = m(g \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2) = m(g \sin \varphi - r\dot{\varphi}_0^2 - 2g(1 - \sin \varphi)) = mg \left( -2 + 3 \sin \varphi - \frac{r\dot{\varphi}_0^2}{g} \right).$$

5. Pour  $\dot{\varphi}_0 = 0$ , nous avons

$$R = 0 \Rightarrow -2 + 3 \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi \simeq 41, 81^\circ.$$

Quand le point matériel  $M$  arrive à ce point  $(r, \varphi \simeq 41, 81^\circ)$ , il va quitter la demi-sphère en se déplaçant sous son poids en projectile.

### Exercice 3

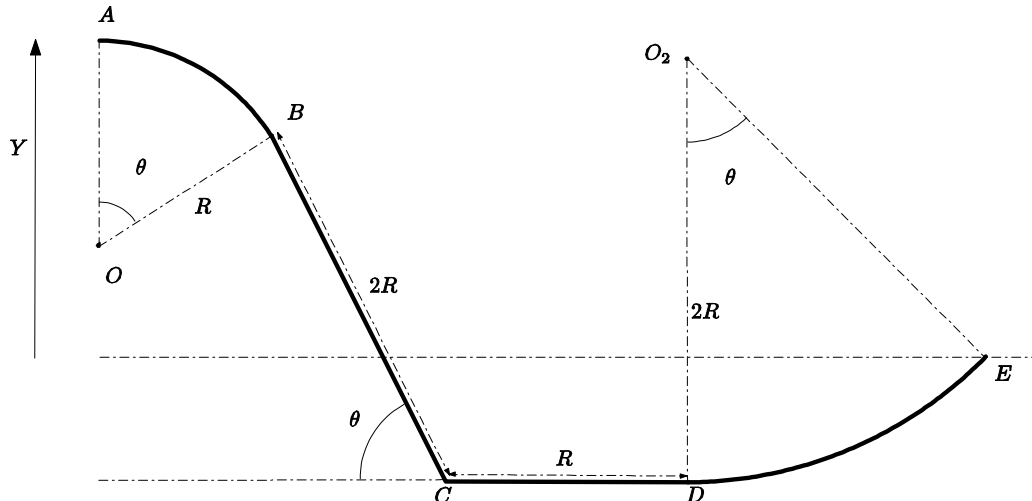
Un chariot de masse  $m = 1kg$  assimilé à un point matériel  $M$ , est mobile sur une piste située dans le plan vertical. La piste est formée de plusieurs parties :

$AB$  : partie circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$  constant et d'angle  $\theta = \widehat{AOB}$ .

$BC$  : partie rectiligne inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale et de longueur  $2R$ .

$CD$  : partie rectiligne horizontale de longueur  $R$ .

$DE$  : partie circulaire de centre  $O_2$ , de rayon  $2R$  constant et d'angle  $\theta = \widehat{DO_2E}$ , le rayon  $O_2D$  étant vertical.



Les parties circulaires sont lisses. Les frottements entre le sol et le chariot dans la partie  $BCD$  sont caractérisés par un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ . Le chariot est abandonné sans vitesse en  $A$ .

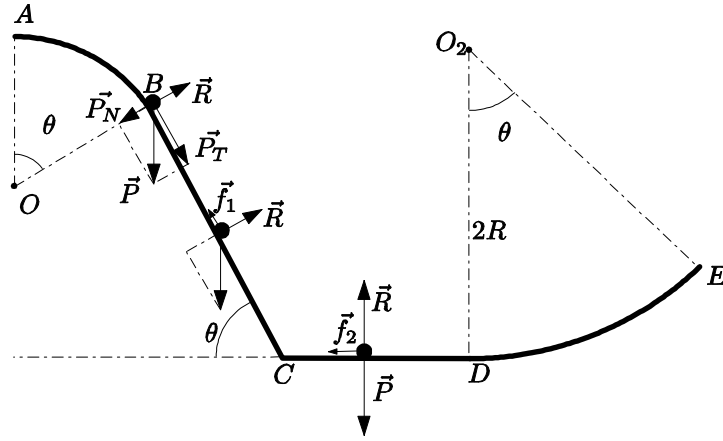
- 1- Déterminer l'expression de la vitesse du chariot au point  $B$ .
- 2- Quelle est la valeur de l'angle  $\theta$  pour laquelle le chariot quitte la piste au point  $B$
- 3- Calculer le coefficient de frottements dynamique  $\mu_d$  dans la partie  $BD$  pour que le chariot s'arrête au point  $D$ .
- 4- Application numérique : Calculer  $v_B$  et  $\mu_d$  si  $\theta = 30^\circ$ ,  $g = 10\text{m/s}^2$  et  $R = 1\text{m}$ .
- 5- Si le chariot arrive au point  $D$  avec une vitesse de  $v_D = 3\text{m/s}$ , pour quel angle  $\theta$ , va-t-il arriver au point  $E$  avec une vitesse nulle.

### Solution

1. L'énergie mécanique en  $A$  est  $E_m(A) = mgR$  où nous avons pris  $O$  comme origine des énergies potentielles. L'énergie mécanique en  $B$  est  $E_m(B) = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv_B^2$ . Comme la seule force qui travaille est le poids, l'énergie mécanique doit se conserver. En effet,

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \cos \theta \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}.$$

2. Au point  $B$ , nous avons



Représentation des forces agissant sur le point M.

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} P_T = ma_T \\ P_N - R = ma_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = m \frac{dv_B}{dt} \\ mg \cos \theta - R = m \frac{v_B^2}{R} \end{cases}$$

Le chariot quitte la piste si  $R = 0$ , d'où la relation

$$g \cos \theta = \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow \cos \theta = 2(1 - \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48,18^\circ.$$

3. Pour calculer le coefficient de frottement entre  $B$  et  $D$ , nous allons utiliser le fait que la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement. Si on choisit  $CD$  comme origine des énergies potentielles, on aura

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = mgR(1 - \cos \theta) + 2mgR \sin \theta \quad \text{et} \quad E_m(D) = 0.$$

On en déduit que le travail de la force de frottement entre  $B$  et  $D$  est

$$W_f = E_m(D) - E_m(B) = -mgR(1 - \cos \theta) - 2mgR \sin \theta.$$

D'un autre côté,  $W_f = -f_1 BC - f_2 CD = -R(2f_1 + f_2)$ , où  $f_1$  est le frottement sur  $BC$  et  $f_2$  est le frottement sur  $CD$ . Le module de la réaction sur  $BC$  est  $mg \cos \theta$  tandis que le module de la réaction sur  $CD$  est  $mg$ . Alors

$$\begin{cases} f_1 = \mu_d mg \cos \theta \\ f_2 = \mu_d mg \end{cases} \Rightarrow W_f = -R\mu_d mg (2 \cos \theta + 1).$$

En comparant avec l'expression précédente de  $W_f$ , on trouve

$$1 - \cos \theta + 2 \sin \theta = \mu_d (2 \cos \theta + 1) \Rightarrow \mu_d = \frac{1 - \cos \theta + 2 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}.$$

$$4. \text{ A.N : } v_B = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} = 1,63 \text{ m/s et } \mu_d = \frac{1 - \cos \theta + 2 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta} = 0,41.$$

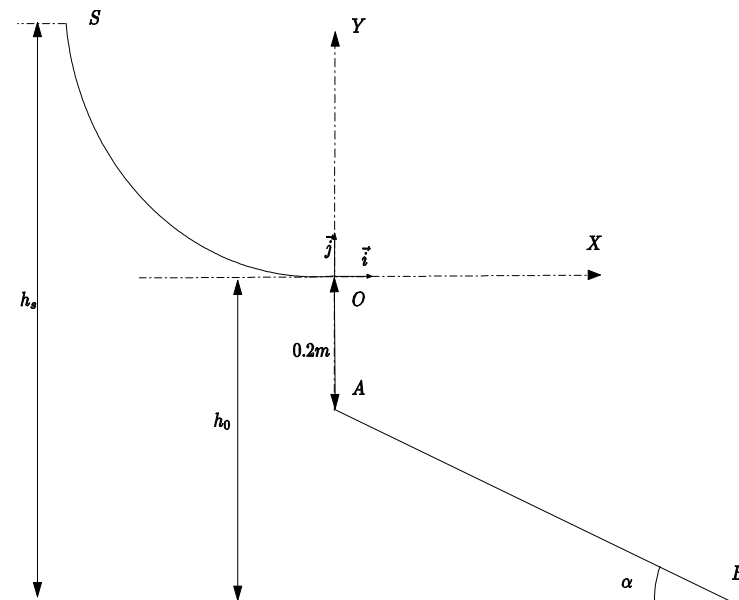
5. L'énergie mécanique en  $D$  est maintenant  $E_m(D) = \frac{1}{2}mv_D^2$  tandis que l'énergie mécanique en  $E$  sera  $E_m(E) = 2mgR(1 - \cos \theta)$ . Il n'y a pas de frottement, donc

$$E_m(D) = E_m(E) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_D^2 = 2mgR(1 - \cos \theta) \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = 1 - \frac{v_D^2}{4gR}.$$

Finalement,  $\cos \theta = 0,775 \Rightarrow \theta = 39,2^\circ$ .

#### Exercice 4

Une bille assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m = 0,1kg$ , démarre à une vitesse nulle du point  $S$ , sur une hauteur  $h_s = 1,5m$ , afin d'arriver au point  $O$ , situé à une hauteur  $h_o = 1,3m$ .



1 – Si vous savez que tout au long du trajet  $SO$ , dont la longueur est  $0,32m$ , les frottements entre la piste et la bille sont caractérisés par une force  $f = 0,4N$ , dans la direction de la vitesse :

- Déterminer l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  des deux points  $S$  et  $O$ .
- Déduire par la suite la vitesse  $\vec{v}_0$  de la bille au point  $O$ .

2 - Déterminer l'équation de la trajectoire suivie par la bille si elle quitte la piste avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_0$ , et ce au point  $O$ , tout en supposant des frottements dus à l'air négligeables.

3- A quelle distance de  $O$  la bille va-t-elle toucher le plan incliné  $AB$ , faisant un angle  $\alpha = 45^\circ$  avec l'horizontale ?

4- Calculer sa vitesse à cet endroit ?

#### Solution

1- a- Nous avons

Au point  $S$  :  $E_m(S) = E_c(S) + E_p(S) = mgh_S$  (car la vitesse initiale est nulle).

Au point  $O$  :  $E_m(O) = E_c(O) + E_p(O) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$ .

1- b- Le travail de la force de la réaction est nul car elle est orthogonale à la piste. Donc, la variation de l'énergie mécanique entre les points  $S$  et  $O$  sera égal au travail de la force de frottement car cette dernière est non conservative. En effet,

$$\begin{aligned} \Delta E_m = W_f &\implies \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(h_S - h_0) = W_f &\implies v_0 = \sqrt{2g(h_S - h_0) + \frac{2}{m}W_f}. \end{aligned}$$

Mais  $W_f = -f SO$  (travail résistant d'une force constante en module se déplaçant sur un arc de cercle), d'où

$$v_0 = \sqrt{2g(h_S - h_0) - \frac{2}{m}f SO} = 1,17m/s.$$

2- Au point  $O$ ,  $v_x = v_0$ ,  $v_y = 0$ ,  $x = y = 0$ , d'où

$$\text{Sur } OX : a_x = 0 \implies v_x = v_0 \implies x(t) = v_0 t$$

$$\text{Sur } OY : a_y = -g \implies v_y = -gt \implies y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Donc

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 = -3,6x^2.$$

3- La bille va toucher le sol lorsque l'équation du mouvement est égale à celle de la droite  $(AB)$  représentant le sol. La droite  $(AB)$  doit avoir une équation de la forme  $y = ax + b$  avec  $a = -\tan(\alpha)$ . La constante  $b$  peut-être déterminée en utilisant le fait que  $A(0, -0,2)$ , car  $OA = 0,2m$ . Alors  $y = -x - 0,2$ .

A présent, il faut résoudre l'équation

$$-3,6x^2 = -x - 0,2 \implies x = -0,134 \text{ ou } x = 0,412 \implies x_I = 0,412m$$

Nous avons pris la valeur  $0,412m$  car l'impact va se produire dans la région des  $x$  positifs (voir le schéma). Afin de déterminer  $y_I$ , utilisons l'équation  $y = -x - 0,2$ , d'où  $y_I = -x_I - 0,2 = -0,612m$ . Maintenant, la distance  $AI$

$$AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = 0,582m.$$

4- Les équations horaires de la bille sont

$$v_x = v_0 \implies x(t) = v_0 t$$

$$v_y = -gt \implies y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

A l'endroit de l'impact,  $x_I = 0,412m$ , donc l'instant de l'impact  $t_I = x_I/v_0 = 0,412/1,17 = 0,35$ . En remplaçant dans les équations de la vitesse on obtient

$$v_{Ix} = v_0 = 1,17\text{m/s}$$

$$v_{Iy} = -gt_I = -9,81 \times 0,35 = -3,43\text{m/s}.$$

Finalement,

$$\vec{v}_I = 1,17\vec{i} - 3,43\vec{j} \quad (\text{m/s}).$$

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*

\*



---

# Bibliographie

- [1] A. LE PADELLEC, M. MOURGUES , *Travaux dirigés de mécanique du point*, INP Toulouse (2011-2012).
- [2] A. CHAFA, A.DIB, F.CHAFA – MEKIDECHE, A. DERBOUZ, F. KAOUAH, M. HACHEMANE, Polycopie d'examens de mécanique du point (système LMD : ST 2007-2011).
- [3] A. FIZAZI, *Cahier de la mécanique du point matériel*, Université de Béchar.
- [4] J. Taylor, *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Dunod (2000).