République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Cours sur la Gestion des Stocks

Pour la troisième année Licence LMD en Mathématiques Appliquées

Réalisé par :

Dr. Belkacem BRAHMI

Maître de conférences B, Université de Béjaia

Chargé de recherche, Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaia

Emails : brahmi.belkacem@gmail.com ; bra_belka@yahoo.fr

Année universitaire 2015 – 2016

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Avant propos

Description du cours

Le cours de gestion des stocks fait partie de l'unité d'enseignement fondamentale UEF 5.2*(Coef=5, Crédit=5)* du semestre cinq. Ce cours est une partie du module "Gestion des stocks et de production", enseigné aux étudiants préparant une Licence en Mathématiques Appliquées à recrutement nationale et aux étudiants préparant une Licence en Recherche Opérationnelle.

Objectifs de l'enseignement

Ce cours, introductif à la gestion des stocks, permet à l'étudiant d'acquérir les notions de base sur la gestion des stocks et de maîtriser les modèles classiques de stocks. Il lui permet aussi d'avoir une méthodologie scientifique pour aborder les problèmes réels de gestion des stocks et des approvisionnements, ainsi que l'application des méthodes de la recherche opérationnelle pour les résoudre.

Ce document est constitué de trois chapitres et d'une bibliographie des références utilisées. Dans le chapitre 1, on présente la terminologie et les notions de base sur la gestion des stocks et des approvisionnements. Le deuxième chapitre traite les modèles déterministes de stock et en particulier le modèle de Wilson et ses variantes pour un stock constitué d'un seul article. De plus, il aborde le modèle de Wilson pour plusieurs objets en présence de contraintes(groupage des commandes, contraintes sur : le capital investi, le nombre maximal de commandes et la capacité de stockage). Dans le dernier chapitre, on présente les modèles stochastiques de stocks : modèle de point de commande (Q, r) et le modèle de réapprovisionnement périodique (R, T), ainsi que la méthodologie de la classification ABC. Chaque chapitre se termine par une série d'exercices d'application.

Prérequis : analyse mathématique, probabilités et statistiques.

Mode d'évaluation : Contrôle continu + Examen.

1
Généralités sur la gestion de stocks

1.1 Introduction

La gestion des stocks est une fonction importante tant pour une entreprise de production ou une entreprise commerciale. En effet, une mauvaise gestion des stocks peut compromettre sérieusement les activités d'une entreprise à court-terme et pour cela il faut trouver le point d'équilibre afin de maximiser l'efficacité de l'entreprise. La création d'un stock se produit lorsque l'arrivée des marchandises est plus élevée que la sortie des marchandises. La rupture de stock, elle, se produit lorsque les sorties de marchandises excèdent les entrées.

Le stock et les approvisionnement pèse trop sur les finances des entreprises, surtout celles du secteur industrielle, ce qui les obligent à réduire le niveau de leur stock totu en satisfaisant la demande des clients.

Il y environ 200 ans, les stocks sont considérés par les marchands comme une mesure de richesse. De nos jours, il sont considérés comme un large potentiel de risque. Pour cela les gestionnaires tentent de maintenir au niveau minimum leur stock tout en gardant une certaine indépendance vis à vis de leurs fournisseurs.

Pour gérer rationnellement les stocks, nous devons trouver un équilibre entre les avantages et les inconvénients de garder un certain niveau de stock. Il est possibles de concevoir différents modèles correspondants à différentes situations et d'utiliser une variété de techniques pour leurs solutions.

1.2 Définitions et concepts de base

1.2.1 Notion de stock

Définition 1.1 (Stock). C'est une quantité d'articles (produits finis, composants, matières premières, pièces) gardée en réserve pour être vendu ou utilisé en production.

Un stock peut être assimilé à un réservoir de régulation situé entre deux flux qui présentent des irrégularités de débit. Généralement, le flux d'entrée représente les approvisionnements et le flux de sortie représente la demande des articles par des clients.

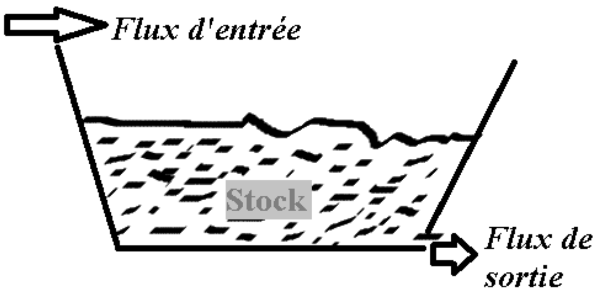

FIG. 1.1 – Assimilation du stock à un réservoir de régulation

La gestion des stocks est l'activité destinée à maintenir le stock d'articles à un niveau souhaité.

1.2.2 Utilités et inconvénients d'un stock

Utilités

Un stock permet de :
- Gagner de l'argent, et cela en achetant à bas prix pour ensuite revendre plus cher ;
- Assurer la consommation régulière d'un produit bien que sa production ne l'est pas ;
- Bénéficier d'une réduction sur le prix unitaire en achetant de grandes quantités ;
- Se prémunir contre les aléas de livraison et permet aussi de parer rapidement aux conséquences fâcheuses d'accidents possibles qui peuvent se produire à n'importe quel moment.

Inconvénients

Après avoir constaté en quoi un stock est utile, il est nécessaire de connaître ses inconvénients :
- Immobilisation des moyens financiers importants ;
- Immobilisation de surface de stockage ;
- Potentiel de risque (perte, détérioration, incendie, vol . . .) ;

- Les coûts engendrés par l'entretien et la protection des stocks;
- Coûts de maintien. Les stocks sont encombrants et nécessitent des espaces de stockage, du personnel pour la gestion, des frais de maintien (assurance, location des espaces de stockage, personnel, électricité . . . etc.).

1.3 Coûts de stock

Les stocks représentent des coûts très élevés pour les entreprises, qu'on peut les classer en quatre catégories.

– **Coût d'achat :** C'est le prix qu'on paye pour acheter les produits mis en stock.
– **Coût de possession du stock :** Le fait de garder des produits en stock nous conduits à assumer des coûts :
  - Coûts de construction ou de location des entrepôts de stockage;
  - Salaire des gardiens et du personnel chargé de gérer les magasins;
  - Assurance des produits stockés;
  - Dégradation des produits ou leur obsolescence.
– **Coût de lancement d'une commande :** Pour stocker des produits, il faut d'abord les commander. La commande engendre des coûts : préparation de la commande, frais de communication, réception et transport des marchandises, ...
– **Coût de pénurie :** Les coûts de pénurie représentent les coûts susceptibles de survenir lorsqú'un article n'est pas disponible. Les coûts de pénurie comprennent :
  - la main d'oeuvre inoccupée;
  - l'équipement arrêté;
  - les coûts occasionnés par les changements dans le programme de fabrication;
  - la perte de réputation;
  - la perte de commandes;
  - les coûts des procédures d'urgence pour accélérer les livraisons;
  - les coûts supplémentaires de sous-traitance pour respecter les délais.

1.4 La fonction des stocks

On constitue les stocks pour différentes raisons :

– **Raisons économiques :** Plaçons-nous dans la situation d'une unité de production : le lancement de la production entraîne des coûts appelés coûts de lancement : réglages

des machines, organisation des équipes...Etc. Pour minimiser ces coûts, on sera amené à produire la plus grande quantité possible pour éviter de supporter ces coûts à chaque fois en produisant de petites quantités. Par contre, cette quantité qu'on produira ne se vendra pas très vite, donc on est obligés de stocker.
En général, on a toujours intérêt à produire en grande quantité, car ceci permet de répartir les coûts fixes de la production sur un nombre important de produits, d'où la diminution du coût de revient par unité : c'est le phénomène d'économies d'échelle.

- **Raisons de sécurité :** lorsque les marchés sur lesquels on s'approvisionne sont caractérisés par une certaine instabilité (Conflits armés, conditions climatiques variables) il est de l'intérêt de l'entreprise de constituer des réserves (stocks) pour faire face aux imprévus. D'autre part, la demande des clients de l'entreprise est en général variable, un stock de sécurité est constitué pour faire face à cette variabilité.
- **Raisons financières :** le prix des matières premières est sujet à des fluctuations souvent importantes dues aux variations de l'offre et de la demande. Lorsque les prix sont bas on achète des quantités qui dépassent notre besoin et on les stocke, pour ne pas être obligés d'acheter lorsque les prix augmenteront de nouveau.

1.5 La fonction stock dans l'entreprise

La fonction stock se compose de deux sous-fonctions :

- le suivi des stocks ;
- la gestion des stocks.

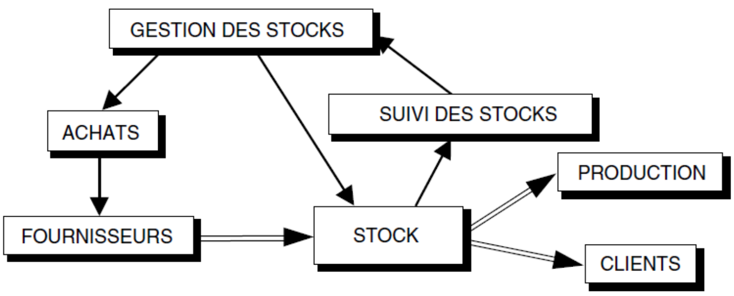

FIG. 1.2 – Environnement de la fonction stock [5]

a) Le suivi des stocks :

Cette fonction a pour objectif de connaître à tout moment les articles disponibles dans l'entreprise. Pour cela, elle doit assurer une comptabilité physique et financière des articles.

▶ ***Comptabilité physique :***

Elle doit prendre en compte les réceptions et les **délivrance** des articles (en nombre) pour pouvoir fournir, à tout moment, un état des stocks à jour.

▶ ***Comptabilité financière :***

Elle doit prendre en compte les entrées et les sorties du stock (en valeur) pour pouvoir fournir, à tout moment, la valeur de l'immobilisation financière.

b) La gestion des stocks : Cette fonction a pour rôle de définir

▶ l'optimum d'articles différents à posséder dans l'entreprise en effectuant le plus souvent possible une épuration du stock (élimination des stocks morts ou inutiles) ;

▶ la politique de réapprovisionnement la mieux adaptée pour chaque article ;

▶ la politique de distribution (ou de consommation) la mieux adaptée pour chaque article.

1.6 Politiques d'approvisionnement

Approvisionner, c'est assurer la programmation des besoins de livraison et des stocks dans le cadre de la planification générale de l'entreprise.
Définir une politique d'approvisionnement consiste essentiellement à répondre aux trois questions suivantes :

- QUOI (quel produit) faut-il approvisionner ?
- COMBIEN faut-il en approvisionner ?
- QUAND faut-il l'approvisionner ?

Après avoir répondu au "quoi ?", nous pouvons avoir la réponse aux deux autres questions. Pour déterminer les instants de lancement des commandes (réponse à QUAND ?), il suffit tout simplement de connaître la *période d'approvisionnement* qui représente la durée écoulée entre les instants de lancement de deux commandes successives.

L'établissement d'une politique d'approvisionnement du stock dépend des paramètres suivants :

- La demande : c'est la quantité de marchandise consommé par le client (ou utilisé par l'entreprise dans le cas d'une production) par unité de temps.
- Le délai de livraison : est le temps qui s'écoule entre l'instant de lancement d'une commande et la date de disponibilité physique des produits sur le lieu de stockage. Il dépend du fournisseur et du transporteur.

$$\text{Délai de livraison} = \text{Date de réception - Date de commande}$$

Ces paramètres peuvent être constants (fixes) ou variables (soumis à l'aléatoire). On peut alors distinguer les quatre politiques d'approvisionnement (modèles) suivantes :

Chaque politique est adaptée à un produit ou à une catégorie de produits. Cela conduit souvent les entreprises à utiliser ces politiques simultanément. La difficulté consiste donc à

Quantité/période	Fixe	Variable
Fixe	Modèle de Wilson et ses variantes	Modèle de réapprovisionnement périodique
Variable	Modèle de point de commande	Modèle de point de commande

TAB. 1.1 – Tableau des différentes politiques d'approvisionnement d'un stock

choisir la meilleure politique adaptée à chaque produit qui permet d'éviter les ruptures de stock sans immobilisation financière importante.

Le modèle de Wilson et ses extensions sont dits déterministes et consistent à commander une quantité fixe et à des périodes fixes. Ces modèles seront détaillés dans le chapitre suivant.

Les modèles stochastiques (modèle de point de commande et modèle de recomplètement périodique) seront détaillés dans le chapitre 3 de ce cours.

2

Modèles déterministes de gestion des stocks

On parle de modèle déterministe de gestion des stocks, lorsque la demande et le délai d'approvisionnement sont connus à l'avance. Ces modèles sont dits à quantité fixe et à période fixe.

2.1 Modèles de stock pour un seul article

2.1.1 Modèle de Wilson

Ce modèle a été introduit par F. W. Harris en 1913, puis popularisé par Wilson en 1930. C'est un modèle simple de gestion des stocks, où on s'intéresse à un seul article et il se base sur les hypothèse suivantes :

- La demande est connue et se fait à un rythme constant de λ articles par année.
- Les ruptures de stock ne sont pas permises.
- Les objets sont livrées instantanément après leur commande.

Pour ce système qui gère uniquement un seul article, l'évolution du stock dans le temps est montrée dans la figure suivante :

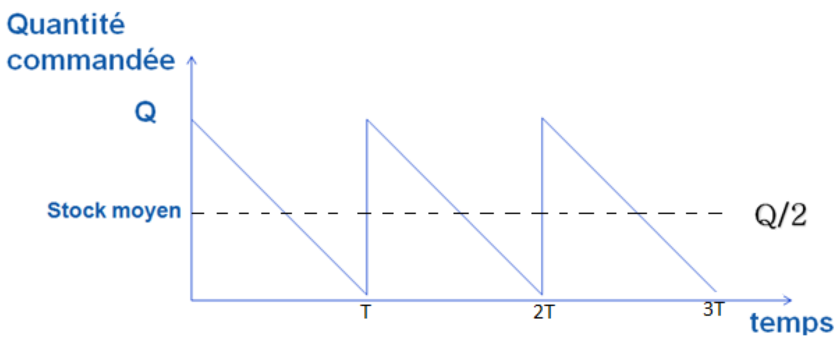

FIG. 2.1 – Evolution du niveau de stock dans le temps

Le but du gestionnaire du stock est de déterminer la quantité à commander Q qui minimise le coût total annuel de gestion :

$$C_T = C_A + C_L + C_P.$$

- Le coût d'achat annuel (C_A)= La demande (λ) $\times$ le prix unitaire de l'article (p).
- Le coût de réapprovisionnement (C_L)=nombre de commandes ($\frac{\lambda}{Q}$) $\times$ coût de lancement d'une commande (h).
- Le coût de possession du stock(C_P)=stock moyen ($\frac{Q}{2}$) $\times$ coût de stockage d'une unité en stock (c_s).

  Ce coût est généralement exprimé en pourcentage du coût unitaire de l'article :

  $c_s = t \times p$, $\quad t$: taux de possession d'un article en stock qui est exprimé en pourcentage.

Le modèle mathématique à résoudre est de minimiser la fonction suivante par rapport à Q :

$$\min C_T(Q) = \lambda p + \frac{\lambda}{Q}h + \frac{Q}{2}c_s.$$

Comme la fonction C_T est convexe pour $Q > 0$, alors l'optimum (point minimum) est unique et vérifie la relation suivante :

$$C'_T(Q) = -h\frac{\lambda}{Q^2} + \frac{1}{2}c_s = 0.$$

Donc la quantité optimale à commander Q^*, appelée aussi *quantité de Wilson (ou quantité économique de commande)* est solution de l'équation précédente :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2h\lambda}{c_s}} \quad \text{(formule de Wilson).}$$

On peut maintenant calculer d'autres paramètres de gestion, à savoir :
Le nombre de commandes par an : $N^* = \frac{\lambda}{Q^*}$.
La période d'approvisionnement : $T^* = \frac{Q^*}{\lambda} \times 365$ jours $= \frac{Q^*}{\lambda} \times 52$ semaines.

L'évolution des différents coûts en fonction du volume de commande est illustrée par la figure 2.3. On remarque que la quantité de Wilson Q^* est celle qui minimise le coût total de gestion de stock.

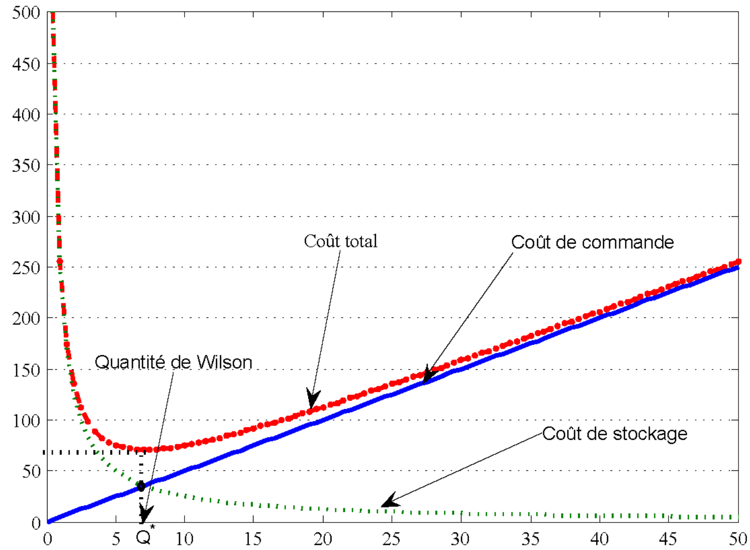

FIG. 2.2 – Variation des coûts du stock en fonction de la quantité commandée

Remarque 2.1. Pour la quantité optimale de Wilson Q^*, on a : $C_L(Q^*) = C_P(Q^*)$. **(Exercice)**
La relation précédente montre bien que la quantité optimale de commande assure un compromis (équilibre) entre le coût de stockage et celui de commande.

Exemple 2.1. Un fabriquant de pièces de rechange pour voiture reçoit une demande de 1200 tableaux de bord à satisfaire chaque année. Quand doit-il s'approvisionner et quelle est la quantité optimale de commande, sachant que le coût des approvisionnements est de 3000 DA et l'entretien d'une pièce en stock coûte 1.2 DA/jour ?

Solution : $\lambda = 1200, \quad h = 3000 DA/commande, \quad c_s = 1.2 \times 365 = 438$ DA.

La quantité optimale de commande :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000 \times 1200}{438}} \simeq 128.$$

Le nombre de commandes : $N^* = \frac{\lambda}{Q^*} = \frac{1200}{128} = 9.375 \simeq 9$ comandes/an.

La période de commande : $T^* = 365\frac{Q^*}{\lambda} \simeq 39 jours.$

Donc, la politique optimale pour ce fabriquant de pièces de rechange consiste à faire de 9 à 10 commandes par an et à chaque 39 jours, il faut commander un lot de 128 tableaux de bord.

2.1.2 Problème de ristourne

Dans la pratique, généralement les fournisseurs offrent des remises (ristournes) pour l'achat de grandes quantités. Si p est le prix unitaire d'achat et Q la quantité commandée, alors on aura :

$$\begin{array}{ll} Q \leq q_1, & \Longrightarrow p = p_1 \\ q_1 < Q \leq q_2, & \Longrightarrow p = p_2 \\ \cdots & \cdots \\ q_{j-1} < Q \leq q_j, & \Longrightarrow p = p_j \\ \cdots & \cdots \\ Q \geq q_m, & \Longrightarrow p = p_m, \end{array}$$

avec $q_j \leq q_{j+1}$ et $p_j \geq p_{j+1}$, pour $j = 1, \cdots, m-1$.

Le coût global de gestion de stock si on commande une quantité Q pour un prix p_j est :

$$CT_j(Q) = \lambda p_j + \frac{\lambda}{Q}h + \frac{Q}{2}tp_j, \tag{2.1}$$

où t est le taux de possession d'un article en stock, h est le coût de lancement d'une commande et λ est la demande annuelle de l'article.

Pour ce modèle de gestion de stock, on garde les mêmes hypothèses du modèle de Wilson, sauf que le prix unitaire dépend de la quantité achetée. En effet, lorsque on achète de grandes quantités alors on réduit le coût d'achat. Par contre, si on commande plus, les coûts de stockage sont plus grands aussi.

Pour le calcul de la quantité optimale de commande, on utilise la procédure séquentielle suivante :

Algorithme :

(1) Utiliser le prix le plus bas p_m, puis calculer par Wilson la quantité optimale :

$$Q^m = \sqrt{\frac{2h\lambda}{tp_m}}.$$

1. Si $Q^m \geq q_m$, la solution est optimale : car la quantité optimale de commande au prix p_m est largement supérieur pour obtenir cette ristourne.
2. Sinon, on calcule $CT_m(q_m)$ en utilisant la relation (2.1).

(2) On calcule la quantité optimale de commande pour le second plus bas prix p_{m-1} :

$$Q^{m-1} = \sqrt{\frac{2h\lambda}{tp_{m-1}}}.$$

- Si $Q^{m-1} \geq q_{m-1}$, alors on calcule $CT_{m-1}(Q^{m-1})$ et on le compare à $CT_m(q_m)$.
  - Si $CT_{m-1}(Q^{m-1}) < CT_m(q_m)$, alors Q^{m-1} est optimale
  - Sinon, q_m est la quantité optimale de commande.
- Sinon $Q^{m-1} < q_{m-1}$. On calcule la quantité $\hat{CT}_{m-1} = \min\{CT_{m-1}(q_{m-1}), CT_m(q_m)\}$

(3) On répète (2) et on pose $CT_m(q_m) = \hat{CT}_{m-1}$

Exemple 2.2. Un hôpital utilise 100 unités par jour d'une seringue d'un certain type et ce durant 365 jours/année. Le distributeur de ce type de seringue offre les prix suivants :

$$p = \begin{cases} 1\$, & \text{si } 0 \leq Q < 1000, \\ 0.8\$, & \text{si } 1000 \leq Q < 2500, \\ 0.7\$, & \text{si } Q \geq 2500. \end{cases}$$

Le coût de stockage est de 30% par année du coût de l'article et cela coûte 15$ pour passer une commande.
Quelle est la quantité économique à commander ?

Solution : $\lambda = 100 \times 365 = 36500$ seringues ; $h = 15\$$; $t = 30\%$.

On considère le plus bas prix $p_3 = 0.7$ et on calcule la quantité de Wilson pour ce prix :

$$Q^3 = \sqrt{\frac{2h\lambda}{tp_3}} = \sqrt{\frac{2 \times 36500 \times 15}{0.3 \times 0.7}} = 2283 < q_3 = 2500.$$

On ne peut pas bénéficier d'une remise. On calcule $CT_3(q_3) = \lambda p_3 + \frac{\lambda}{q_3}h + \frac{q_3}{2}tp_3 = 26032$.
Calculons la quantité de Wilson pour le second plus bas prix $c_2 = 0.8$:

$$Q^2 = \sqrt{\frac{2h\lambda}{tp_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 36500 \times 15}{0.3 \times 0.8}} = 2136 > q_2 = 1000.$$

Calculons $CT_2(Q^2) = \lambda p_2 + \frac{\lambda}{Q^2}h + \frac{Q^2}{2}tp_2 = 77964547 > CT_3(q_3)$.
Donc l'hôpital doit commander 2500 seringues avec un prix unitaire de 0.7$.

2.1.3 Modèle du lot économique avec livraison

Ce modèle déterministe de gestion de stocks modélise des situations où l'article est fabriqué localement au lieu qu'il soit acheté chez un fournisseur externe.

Supposons qu'une entreprise fabrique cet article à un taux constant de μ unités par unités de temps (par exemple, un jour, une année, ..) et la demande des clients est constante, qui est de d unités par unités de temps. Par conséquent, les stocks de l'article s'accumulent à un taux de $(\mu - d)$ unités en période de fabrication t_p. Après cette période, on arrête la production de cet article pour en fabriquer d'autres **(production échelonnée)**. La quantité fabriquée Q durant la période de production t_p est consommée pendant un certain temps t_c. Ce processus se répète tout au long des périodes.

L'évolution du niveau du stock est présentée dans la figure suivante :

L'objectif est de déterminer la quantité produite Q qui minimise le coût global de gestion de stock. Nous avons alors :

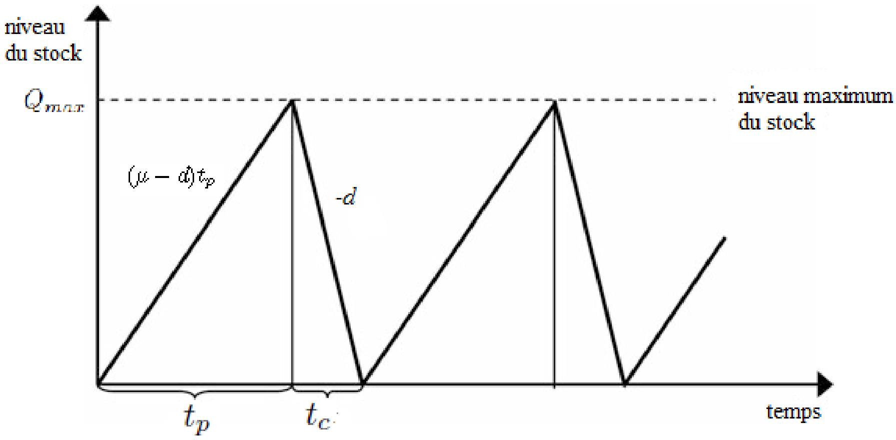

FIG. 2.3 – Modèle de la quantité économique produite

– La quantité produite pendant la période de production t_p est :

$$Q = \mu t_p \quad \Longrightarrow \quad t_p = \frac{Q}{\mu}.$$

– A l'arrêt de la production, le niveau maximum du stock accumulé est

$$Q_{max} = (\mu - d)t_p = \frac{\mu - d}{\mu}Q.$$

– Le niveau du stock moyen= $\frac{Q_{max}}{2} = \frac{\mu-d}{2\mu}Q$.

Pour ce modèle, le coût total de gestion de stock est composé uniquement du coût de lancement de la production et celui de stockage :

$$C_T(Q) = \frac{\lambda}{Q}h + \frac{Q_{max}}{2}c_s = \frac{\lambda}{Q}h + \frac{\mu - d}{2\mu}Qc_s,$$

où h représente le coût de lancement de la production, λ et c_s ont la même signification que les modèles précédents. Puisque la fonction coût est convexe, alors la quantité optimale de production Q^* vérifie la relation suivante :

$$C_T(Q)' = -\frac{\lambda}{Q^2}h + \frac{\mu - d}{2\mu}c_s = 0 \Longrightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}\left(\frac{\mu}{\mu-d}\right)}.$$

Exemple 2.3. Une entreprise fabrique des chaises qu'elle vend ensuite à des détaillants. La demande pour un certain modèle est relativement uniforme et égale à 15000 unités par an. Chaque mise en marche de la production coûte à l'entreprise 200\$. Le taux de production est de 150 chaises par jour. Ceci coûte 48, 62\$ par unité produite et le taux de stockage est d'environ 24% par unité produite pendant une année. Le nombre de jours ouvrables durant une semaine est de 05 jours.

1. Calculer la quantité optimale de production.
2. Quel est le nombre maximal de chaises qu'on peut avoir en stock ?
3. Déduire le coût annuel de cette politique.
4. Déterminer les durées des cycles de production et de consommation de l'article.

Solution : $t = 24\%$ /an ; $p = 48,62\$$; $c_s = t \times p = 11,67\$$;

Le coût de lancement de la production : $h = 200\$$ / commande ;

La demande des chaises : $\lambda = 15000$unités/an ;

Le taux de production : $\mu = 150$ chaises/jour $= 150 \times 52 \times 5 = 39000$ chaises /an.

1. Calcul de la quantité optimale de production :

$$Q = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}\left(\frac{\mu}{\mu-d}\right)} = \sqrt{\frac{2 \times 15000 \times 200}{11,67}\left(\frac{39000}{39000-15000}\right)} = 914,04 \approx 914 \text{ chaises.}$$

2. Le nombre maximal de chaises qu'on peut avoir en stock :

$$Q_{\max} = \frac{\mu - d}{\mu} Q = \frac{39000 - 15000}{39000} 914 \approx 562 \text{ chaises.}$$

3. Le coût annuel de cette politique de gestion :

$$C_T(Q) = \frac{\lambda}{Q} h + \frac{Q_{max}}{2} c_s = \frac{15000}{914} 200 + \frac{562}{2} 11,67 = 6567,04\$$$

4. Les durées de production et de consommation de l'article :

   Le temps de production : $t_p = \frac{Q}{\mu} \times 52 \times 5 = \frac{914}{39000} \times 260 = 6$ jours.

   Le temps de consommation : $t_c = \frac{Q_{max}}{\lambda} \times 52 \times 5 = \frac{562}{15000} \times 260 = 9,75 \approx 10$ jours.

   La période de commande : $T = t_p + t_c = 16$ jours.

Remarque 2.2. Ce modèle est aussi utilisé pour décrire des situations où la quantité achetée Q est reçue continuellement à un rythme constant de μ articles par unité de temps.

2.1.4 Modèle de stock avec pénurie

Dans beaucoup de situations réelles la demande du client n'est pas satisfaite à temps, ce qui engendre une pénurie. Dans ce cas des coûts sont encourus (perte de vente, coût de lancement d'une commande d'urgence, perte de clients, etc..).
Soit π le coût de pénurie d'une unité de l'article par an. Notons que dans la majorité des situations, π est difficile à mesurer. Les constantes λ, h et c_s gardent leurs significations habituelles. On suppose que toutes les demandes des clients sont différées et aucune vente n'est perdue, i.e., que la demande des clients non encore servis sera satisfaite à la prochaine livraison. De plus, on suppose que le délai de livraison est nul.

Pour déterminer la politique de commande qui minimise le coût total, définissons alors les paramètres de gestion suivants :

- Q : la quantité commandée ;
- M : le niveau maximum du stock ;
- $S = Q - M$: le nombre maximum d'unités en pénurie pendant la période de commande T ;
- T_1 : la durée où le stock permet de satisfaire la demande ;
- T_2 : la durée où il y a une rupture de stock (pénurie).

Si la première commande est lancée à l'instant zéro, alors l'évolution du niveau de stock durant le temps est donnée par la figure 2.4. A chaque réapprovisionnement du stock, on lance une commande de volume Q et à son arrivée S unités seront livrées pour les clients en attente et M unités vont être stockées. Ce processus se répète tout au long des périodes de réapprovisionnement.

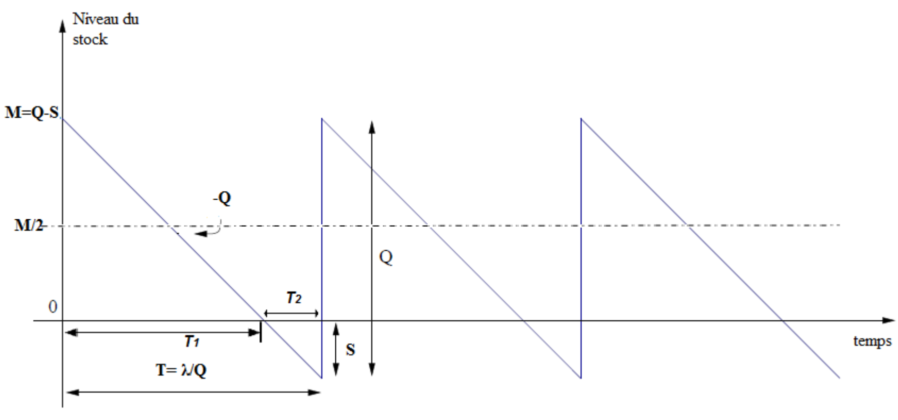

FIG. 2.4 – Modèle de stock avec pénurie

Pour ce cas, le coût total annuel de gestion du stock est composé des coûts de lancement de commandes, stockage et de pénurie C_r :

$$C_T(Q) = C_L + C_P + C_r = \frac{\lambda}{Q}h + \frac{M}{2}\frac{T_1}{T}c_s + \frac{S}{2}\frac{T_2}{T}\pi.$$

A partir du schéma précèdent, nous avons les relations suivantes :

$$T = \frac{Q}{\lambda}, \quad T_1 = \frac{M}{\lambda} \quad T_2 = \frac{S}{\lambda} = \frac{Q-M}{Q}.$$

Par conséquent, le coût total annuel de gestion de stock aura l'expression finale suivante :

$$C_T(Q, M) = \frac{\lambda}{Q}h + \frac{M^2}{2Q}c_s + \frac{(Q-M)^2}{2Q}\pi.$$

La fonction coût dépend de deux paramètres et comme elle est convexe, alors le point (Q, M) assurant le minimum de cette fonction doit vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_T(Q,M)}{\partial Q} = 0, \\ \frac{\partial C_T(Q,M)}{\partial M} = 0. \end{cases}$$

En résolvant simultanément ces deux équations, on aura :

$$\begin{cases} Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}\left(\frac{\pi + c_s}{\pi}\right)}, \\ M^* = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}\left(\frac{\pi}{\pi + c_s}\right)}, \end{cases}$$

où Q^* et M^* sont respectivement la quantité optimale de commande et le niveau maximal du stock. A partir des deux relations précédentes, on aura l'expression suivante reliant ces deux quantités :

$$M^* = \left(\tfrac{\pi}{\pi + c_s}\right) Q^*.$$

Le nombre maximal d'articles en pénurie de stock pendant une période T, est alors $S^* = Q^* - M^*$.

Remarque 2.3. Lorsque π tends vers l'infini, alors Q^* et M^* approche la quantité de Wilson $Q_{Wilson} = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}}$. Par conséquent, le niveau maximum d'articles en rupture de stock approche le zéro.

Exemple 2.4. La demande d'un article est constante et égale à 100 unités par mois. Le prix d'achat unitaire est de 50$, le coût de réapprovisionnement est de 50$, le taux de possession d'un article est de 25% de son prix d'achat et le coût de pénurie d'une unité est de 40% de sa valeur.

1. Déterminer la quantité optimale de commande pour cet article.
2. Calculer le niveau maximum du stock et déduire le nombre maximal d'articles en pénurie pendant une période.
3. Calculer le coût minimum de cette politique.
4. Déterminer la période de consommation normale de l'article et celle de rupture du stock.

Solution : on a : $p = 50\$$; $t = 25\% \Longrightarrow c_s = t \times p = 0,25 \times 50 = 12,5\$/\text{an}$;
$h = 50\$$; $\pi = 50\$/$ unité.
La demande de l'article : $\lambda = 100$ unités/ mois $= 1200$ unités/ an.
Comme les pénuries de stock sont permises, alors le modèle de stock approprié pour ce problème est celui de Wilson avec pénurie.

1. La quantité optimale de commande est :
$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda h}{c_s}\left(\frac{\pi}{\pi+c_s}\right)} = \sqrt{\frac{2 \times 1200 \times 50}{12,5}\left(\frac{50}{50+12,5}\right)} = 124,90 \approx 125 \text{ unités.}$$
2. Le niveau du stock maximum est
$$M^* = \left(\frac{\pi}{\pi+c_s}\right) Q^* = \left(\frac{50}{50+12,5}\right) 125 = 76,86 \approx 77 \text{ unités.}$$
- Le nombre d'articles en pénurie durant une période est :
$$S^* = Q^* - M^* = 125 - 77 = 48 \text{ unités.}$$
3. Le coût minimum pour cette politique :
$$C_T(Q,M) = \frac{\lambda}{Q}h + \frac{M^2}{2Q}c_s + \frac{(Q-M)^2}{2Q}\pi = 961,25\$.$$
4. - La période de consommation de l'article :
$T_1 = \frac{M^*}{\lambda} \times 365 = \frac{77}{1200} \times 365 = 23,42 \approx 23$ jours.
- La période de pénurie de l'article : $T_2 = \frac{S^*}{\lambda} \times 365 = \frac{48}{1200} \times 365 = 14,60 \approx$ 15 jours.
- La période de commande : $T = T_1 + T_2 = 38$ jours.

2.2 Modèles de stock pour plusieurs objets

Supposons que le stock en question est constitué de plusieurs articles. Il existe dans ce cas plusieurs type de contraintes qui peuvent les reliés. Parmi ces dernières, on cite celles liées à :

- La capacité de stockage ;
- Le maximum sur le capital à investir ;
- Le nombre maximal de commandes susceptibles d'être supportées par l'entreprise.

S'il n'existe aucune contrainte reliant les différents objets, alors la quantité optimale à commander Q_j^* du $j^{\text{ème}}$ article est la suivante :

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2h_j\lambda_j}{t_jp_j}},$$

où

- λ_j : demande annuelle du $j^{\text{ème}}$ article,
- h_j : coût unitaire de réapprovisionnement du $j^{\text{ème}}$ article,
- t_jp_j : coût unitaire de possession en stock du $j^{\text{ème}}$ article, où t_j est le taux de possession de cet article durant la période de planification.

2.2.1 Modèles de stock pour plusieurs objets avec contraintes :

a) **L'investissement total en stock :** Supposons qu'on gère en stock n produits et soit b le capital investi en stock.

$$\sum_{j=1}^{n} p_jQ_j \leq b, \tag{2.2}$$

où p_j et Q_j sont respectivement le prix d'achat et la quantité à commander du $j^{\text{ème}}$ produit. Le coût annuel de gestion du stock est alors :

$$C_T(Q) = \sum_{j=1}^{n} C_T(Q_j) = \sum_{j=1}^{n}(p_j\lambda_j + \frac{\lambda_j}{Q_j}h_j + \frac{Q_j}{2}t_jp_j), \tag{2.3}$$

Pour déterminer les quantités optimales à commander de chaque article, on doit résoudre le problème mathématique suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{Q_j} C_T(Q) = \sum\limits_{j=1}^{n}(p_j\lambda_j + \frac{\lambda_j}{Q_j}h_j + \frac{Q_j}{2}t_jp_j) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_jQ_j \leq b. \end{cases} \tag{2.4}$$

La fonction de Lagrange associée au problème (2.11) est :

$$\mathcal{L}(Q,\theta) = C_T(Q) + \theta(\sum_{j=1}^{n} p_jQ_j - b),$$

où θ est un réel positif ou nul, appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'inégalité du problème (2.11). La fonction $C_T(Q) = \sum_{j=1}^{n} C_T(Q_j)$ est convexe, car chaque fonction $C_T(Q_j)$ est convexe et par conséquent, les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour l'optimalité d'un point $Q^* = (Q_1^*, \cdots, Q_n^*)$.

Conditions d'optimalité de KKT :

$$Q^* \text{ est une solution optimale du problème (2.11)} \Longleftrightarrow \exists \theta^* \geq 0 : \begin{cases} \nabla \mathcal{L}(Q^*, \theta^*) = 0 \\ \theta^*(\sum_{j=1}^{n} p_j Q_j^* - b) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

La première relation de (2.5) est appelée condition de stationnarité, tandis que la deuxième est la condition de complémentarité. Pour calculer les quantités optimales de Wilson de tous les articles, on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial C_T(Q)}{\partial Q_j} = -h_j \frac{\lambda_j}{Q_j^2} + \frac{1}{2} t_j p_j + \theta p_j = 0 \Longrightarrow Q_j = \sqrt{\frac{2\lambda_j h_j}{t_j p_j + 2\theta p_j}}, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{2.6}$$

La quantité $2\theta p_j$ est appelée extra-coût d'entretien du $j^{\text{ème}}$ article. La détermination des quantités optimales de commande de tous les articles se fait itérativement et ce en résolvant les équations (2.6) et (2.2). Pour ce faire, on fait varier θ et on calcule les quantités de commande $Q_j (j = 1, \cdots, n)$ jusqu'à ce que la contrainte (2.2) devient active, c'est-à-dire que : $\sum_{j=1}^{n} p_j Q_j = b$.

Remarque 2.4. Lorsque les commandes des différents articles n'arrivent pas au même temps, alors dans ce cas les entreprises considèrent le stock moyen et la contrainte sur l'investissement total devient :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{2} p_j \leq b.$$

Exemple 2.5. On gère en stock 3 articles et l'investissement total est de 14000 DA. Déterminer la quantité optimale de commande de chaque article sachant que les informations sur chaque article sont données dans le tableau suivant :

	1	2	3
λ_i	1000	500	2000
h_i	50	75	100
t_i	40	20	10
p_i	20	100	50

Solution :

$\underline{\theta = 0}$: les quantités optimales Q_j de chaque article sont les suivantes :

$Q_1 = 112, \quad Q_2 = 61, \quad Q_3 = 283\,; \quad \sum_{j=1}^{3} Q_j p_j = 22502 > 14000.$

$\underline{\theta = 0.1}$: les quantités optimales Q_j de chaque article sont les suivantes :

$Q_1 = 91, \quad Q_2 = 43, \quad Q_3 = 163\,; \quad \sum_{j=1}^{3} Q_j p_j = 14321 > 14000.$

$\underline{\theta = 0.2}$: les quantités optimales Q_j de chaque article sont les suivantes :

$Q_1 = 79, \quad Q_2 = 35, \quad Q_3 = 126\,; \quad \sum_{j=1}^{3} Q_j p_j = 11441 < 14000.$

La valeur optimale de $\theta^* \in [0.1; 0.2]$, on trouve $\theta^* = 0.12$ et donc les quantités de Wilson des articles :

$Q_1^* = 98, \quad Q_2^* = 41, \quad Q_3^* = 153. \quad \sum_{j=1}^{3} Q_j p_j = 13759 < 14000.$

b) La capacité de Stockage : Supposons qu'on gère en stock n produits et chaque objet j ne dispose que de S_j d'espace de stockage par unité. Si S est l'espace de stockage maximal, alors on aura :

$$\sum_{j=1}^{n} S_j Q_j \leq S, \tag{2.7}$$

Pour calculer les quantités optimales à commander de chaque article, on doit résoudre le problème mathématique suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{Q_j} C_T(Q) = \sum\limits_{j=1}^{n} (p_j \lambda_j + \dfrac{\lambda_j}{Q_j} h_j + \dfrac{Q_j}{2} t_j p_j) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} S_j Q_j \leq S. \end{cases} \tag{2.8}$$

En utilisant la même démarche que précédemment, on trouve :

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2\lambda_j h_j}{t_j p_j + 2\theta^* S_j}}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{2.9}$$

où θ^* est choisi de sorte que : $\sum_{j=1}^{n} S_j Q_j^* = S$ et $2\theta^* S_j$ est appelé extra-coût de stockage du $j^{\text{ème}}$ article.

c) **Le nombre de commandes :** Pour des raisons financières, supposons que l'entreprise ne peut pas passer plus de L commandes durant une année. Alors on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{Q_j} \leq L, \tag{2.10}$$

Pour le calcul des quantités optimales de commande Q_j, on doit résoudre le problème mathématique suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{Q_j} C_T(Q) = \sum\limits_{j=1}^{n} (p_j \lambda_j + \frac{\lambda_j}{Q_j} h_j + \frac{Q_j}{2} t_j p_j) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{Q_j} \leq L. \end{cases} \tag{2.11}$$

En utilisant la même démarche que précédemment, on trouve :

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2\lambda_j (h_j + \theta^*)}{t_j p_j}}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{2.12}$$

où θ^*, appelé extra-coût de réapprovisionnement, est choisi de sorte que :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{Q_j} = L.$$

2.2.2 Groupage des Commandes

Pour certaines entreprises, le groupement de commande de plusieurs produits permet de réduire sensiblement les coûts de lancement des approvisionnements (délai administratif et de transport) et peuvent même bénéficier des remises. Dans ce cas, les articles n sont commandés simultanément chez un même fournisseur. Soit h le coût de lancement d'une commande groupée et supposons que tous les articles ont le même taux de possession t.

Le problème posé ici est de déterminer les quantités commandées des articles qui minimise le coût global de gestion des stocks :
Le coût total de gestion de stock de l'article j :

$$C_T(Q_j) = p_j \lambda_j + \frac{\lambda_j}{Q_j} h_j + \frac{Q_j}{2} t_j p_j.$$

Le coût global de gestion de stock des n articles est

$$C_T(Q) = \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \lambda_j + \tfrac{\lambda_j}{Q_j} h_j + \tfrac{Q_j}{2} t p_j . \right) \tag{2.13}$$

Soit N le nombre de commandes lancées par année pour chaque article et T la période de réapprovisionnement de chaque article. Nous avons :

$$N = \frac{\lambda_j}{Q_j} \Longrightarrow Q_j = \frac{\lambda_j}{N}, \quad \forall j = 1, \cdots, n.$$

En remplaçant les quantités Q_j dans l'expression précédente, on aura :

$$\begin{aligned} C_T(Q) &= \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{Q_j} h_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{2} t p_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j + Nh + \frac{t}{2N} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j \\ \Longrightarrow C_T(N) &= \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j + Nh + \frac{t}{2N} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j. \end{aligned}$$

Donc le calcul des quantités optimales d'approvisionnement revient aussi à déterminer le nombre optimal de commandes groupées qui minimise le coût total de gestion et qui vérifie

$$C'_T(N) = h - \frac{t}{2N^2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad N^* = \sqrt{\frac{t \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j}{2h}}.$$

Notons par
$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$: la demande globale des produits;
$V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j$: le coût total des achats.
Par conséquent, N^* sera calculé par la formule simplifiée suivante :

$$N^* = \sqrt{\frac{t \times V}{2h}}. \tag{2.14}$$

La quantité d'achat groupée des articles :

$$Q_{gr} = \frac{\lambda}{N^*}.$$

La période d'approvisionnement de chaque article est

$$T^* = \frac{\lambda}{N^*}.$$

La quantité approvisionnée de chaque article est

$$Q_j = \frac{\lambda_j}{N}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Exemple 2.6. Considérons les trois articles suivants dont on veut grouper les commandes :

Articles	Consommation annuelle	Prix unitaire
A	960	125
B	2 000	100
C	800	200

Le coût de passation d'une commande groupée est de 750 DA et le taux de possession d'un article en stock est de 20%. Déterminer :

1. Le nombre optimal de commandes groupées.
2. La quantité de commande groupée.
3. La quantité à engager pour chaque article.
4. La période de réapprovisionnement.

Solution : on a : $h = 750$ DA/ commande ; $t = 20\%$.

La demande globale des produits : $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 3760$ unités / an.

Le coût total annuel des achats :$V = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j = 480000$ DA.

1. Calcul du nombre optimal de commandes groupées N^* :

$$N^* = \sqrt{\frac{t \times V}{2h}} = \sqrt{\frac{0.2 \times 480000}{2 \times 750}} = 8 \text{ commandes/ an.}$$

2. La quantité de commande groupée :

$$Q_{gr} = \frac{\lambda}{N^*} = \frac{3760}{8} = 470 \text{ unités.}$$

3. La quantité approvisionnée de chaque article :

   Puisque le nombre de commandes par année à effectuer pour tous les articles est le même, alors on aura :

   $N^* = \frac{\lambda_1}{Q_1} = \frac{\lambda_2}{Q_2} = \frac{\lambda_3}{Q_3}$, d'où

   $Q_1 = \frac{1}{N^*}\lambda_1 = 0.125 \times 960 = 120$ unités,

   $Q_2 = 0.125\lambda_2 = 0.125 \times 2000 = 240$ unités,

   $Q_3 = 0.125 \times 800 = 100$ unités.

4. La période de réapprovisionnement des trois articles est

$$T^* = \frac{Q_{gr}}{\lambda} \times 365 = \frac{470}{3760} \times 365 = 45,62 \simeq 46 \text{ jours.}$$

2.3 Exercices d'application

Exercice 2.1. Un secrétariat utilise 16 000 feuilles de papier par an. Le prix d'achat d'une feuille est de 2 centimes et à chaque commande un coût fixe de 5 Francs doit être payé. Le coût annuel de stockage d'une feuille s'élève lui à 1 centime.
Si la consommation de feuilles de papier est constante au cours de l'année, calculer :

1. La quantité optimale de commande.
2. La période de réapprovisionnement.
3. Le coût optimal global de gestion.

Exercice 2.2. Deux entreprises commercialisent un même produit pour une valeur de 1000€ (soit un article à 1€). L'une s'approvisionne une seule fois en début d'année et la seconde passe 4 commandes identiques durant la même période. On suppose que la consommation du produit est régulière sur l'année, ainsi que le taux de possession du stock est de 10%.

1. Représenter l'évolution des stocks dans le temps pour chacune des entreprises.
2. Quelle entreprise adoptant la meilleure politique de stockage ?
3. Si le coût de lancement d'une commande pour la première entreprise est de 30€ et celui de la seconde entreprise est de 15€.
   a. Quelle entreprise adoptant une meilleure politique de gestion dans ce cas ?
   b. Est ce que les deux politiques de réapprovisionnement adoptées par ces entreprises sont optimales ?

Exercice 2.3. Un produit de consommation courante et dont la demande demeure constante et régulière présente les caractéristiques suivantes :

- Coût de stockage d'une unité durant un an= 10 DA
- Consommation annuelle du produit = 12500 unités
- Coût de lancement d'une commande de réapprovisionnement = 100 DA

1. Quelle est le volume de commande optimal ?
2. Calculer la durée optimale séparant deux réapprovisionnements successifs (période économique), ainsi que le coût annuel minimal.
3. Calculer le point de commande pour un délai de livraison d'une semaine, puis pour un mois.

Exercice 2.4. Une entreprise gère un article à demande déterministe et régulière tout au long de l'année. Son fournisseur lui propose la grille de prix suivante :

Quantité	Prix (€)
0-999	40
1000-4999	39.75
5000-14999	39.5
15000 et plus	39.25

Déterminer la quantité optimale de commande, sachant que la demande annuelle est $\lambda = 100000$ unités, le coût de lancement d'une commande est $h = 10$ € et le taux de possession du stock est $t = 15\%$.

Exercice 2.5. Une entreprise utilise 3000 pounds d'un produit chimique par an. Elle achète 400 pounds par commande à un prix de 5$ par pound. Le coût de lancement d'une commande est de 100$ et le coût annuel de possession du stock est de 25% du prix d'achat par pound. Le délai de livraison pour ce produit est d'une semaine.

1. Est ce que la quantité approvisionnée est optimale ?
2. Le fournisseur vient de faire une offre de 4$ par pound pour tout volume de commande qui est multiple de 500 pounds.
   a) Est ce que l'entreprise a intérêt d'accepter cette offre ?
   b) Calculer le nombre optimal de commandes, la période de réapprovisionnement et le point de commande.

Exercice 2.6. A chaque heure, D étudiants veulent prendre le bus dans une ville donnée (les bus appartiennent à une seule compagnie). L'administration fixe un coût K pour chaque heure qu'un étudiant est obligé à attendre. Il coûte à l'université h dinars pour envoyer un bus par la compagnie.
En supposant que les étudiants arrivent à l'arrêt des bus à un taux constant, combien de bus à envoyer à chaque heure par la compagnie ?
Application numérique : $K = 50$ dinars par étudiant et par heure, $D = 100$ étudiants par heure et $h = 100$ dinars par bus.

Exercice 2.7. La demande annuelle pour un produit est de 9000 unités et le prix unitaire du produit est évalué à 5$. Le coût de possession d'une unité en stock est estimé à 10% du prix du produit, et le coût de lancement d'une commande est de 1000$.
a) Calculer la quantité optimale de commande et le coût associé.
b) Le fournisseur offre maintenant une remise de 4% sur le prix d'achat si nous commandons au moins $8,000$ unités à la fois. Est-ce que nous devrions prendre l'offre ? Quel est le coût de gestion associé ?
c) Notre fournisseur ajoute une autre offre : un taux de remise de 5%, si nous achetons au moins 18000 unités. Est-ce que nous devrions prendre cette offre ?

Exercice 2.8. Un revendeur Mercedes doit en payer 20000$ pour chaque voiture achetée. Le coût de stockage annuel est estimé à 25% de la valeur d'inventaire. Le revendeur vend une moyenne de 500 voitures par année et suppose que la demande peut être différée. Il estime que le coût de pénurie pour une année est de 20000$ (perte de clients futurs) et que le coût de lancement d'une commande est de 10000$.

1. Calculer la quantité optimale de commande du revendeur Mercedes.
2. Quelle est la pénurie maximale qui se produira ?
3. Calculer le nombre de commandes, ainsi que la période de commande.
4. Pendant une année, en combien de temps il y a une consommation normale de l'article et le temps où il y rupture de stock ?
5. Calcul le coût total de gestion de stock du revendeur Mercedes.
6. Déterminer le point de commande pour un délai de livraison d'une semaine, puis de 03 mois.

3

Modèles stochastiques de gestion des stocks

3.1 Introduction

Dans les modèles déterministes (chapitre 2), nous avons supposé que la demande ainsi que le délai de livraison (délai d'attente) étaient constants. Dans la pratique, on est souvent confronté au caractère aléatoire de la demande et du délai de livraison. On a alors recours aux techniques probabilistes pour améliorer notre maîtrise de nos stocks.

Pour les modèles stochastiques, on suppose que la demande moyenne est constante, mais la demande ponctuelle (par exemple, pendant une journée) suit une loi de probabilité qui change d'une application à une autre. Par exemple, pour une demande importante on utilise la loi normale, mais pour de petits volumes de commande on utilise la loi de Poisson ou la loi exponentielle.

3.2 Système à point de commande (Q, r)

Pour ce système de gestion de stock, le contrôle du stock se fait de manière continue, i.e., à tout instant on connaît le niveau du stock. Ce contrôle est réalisé en utilisant des fiches de stock ou en informatisant le système.
Cette politique consiste à commander une quantité fixe Q chaque fois que le niveau du stock baisse en dessous du seuil r, appelé point de commande (ou stock d'alerte). La quantité commandée est réceptionnée après un délai d'approvisionnement L. Notons que pour ce modèle, les

cycles de réapprovisionnement du stock se diffèrent d'une période à une autre, mais la quantité commandée est toujours constante. L'évolution du niveau de stock dans le temps est illustrée par la figure suivante :

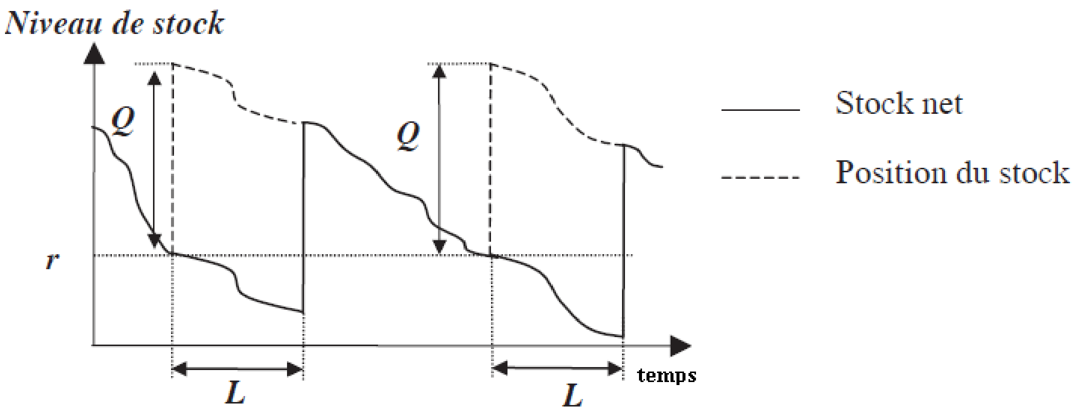

FIG. 3.1 – Evolution du stock avec la politique (Q, r)

3.2.1 Calcul du point de commande

On suppose que le volume de commande est déjà connu, calculé par exemple par la formule de Wilson. Le calcul du point de commande r se fait de manière à maximiser le niveau de service ou minimiser le coût total de gestion des stocks.
Considérons alors, la variable aléatoire D : "la demande ponctuelle de l'article durant une unité de temps".

On suppose que D est une variable aléatoire continue et f sa densité de probabilité ayant une moyenne μ_D et un écart-type σ_D. On définit la variable aléatoire :
X : "la demande durant le délai de livraison L".
Pour des demandes indépendantes émanant d'un grand nombre de clients, il s'ensuit que $X = \sum_{i=1}^{L} D_i = LD$ suit la loi normale de paramètres μ_X et σ_X, tels que :

$$\begin{cases} \mu_X = L\mu_D, \\ \sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D. \end{cases}$$

•Calcul de r en connaissance du risque de rupture de stock α :
α= Probabilité ("la demande durant L dépasse r unités")=$P(X > r)$.
$1 - \alpha = P(X \leq r)$ = Probabilité ("la demande durant L est inférieur à r"). Le réel $1 - \alpha$ est appelé *niveau (taux) de service* et représente le pourcentage d'articles satisfaits par le client

sur la demande totale durant une période donnée. On a :

$$\mathbb{P}(X \leq r) = 1 - \alpha \Longrightarrow \mathbb{P}(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{r - \mu_X}{\sigma_X}) = 1 - \alpha.$$

Posons $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \hookrightarrow N(0, 1)$, d'où

$$r = \mu_X + Z_{1-\alpha} \times \sigma_X, \tag{3.1}$$

où $Z_{1-\alpha}$ est le quartile associé à la loi normale centrée réduite de probabilité $1-\alpha$. Cette valeur est lue à partir de la table de la loi $N(0, 1)$.
Le tableau suivant résume les quartiles associés aux taux de service suivants :

$1 - \alpha$	90 %	95 %	97.5%	99%
$Z_{1-\alpha}$	1.29	1.65	1.96	2.33

- **Calcul du stock de sécurité :**

Définition 3.1 (Stock de sécurité). C'est une quantité supplémentaire d'articles que l'on conserve en stock pour se protéger contre les pénuries causées par une augmentation de la demande des clients et/ou un retard de livraison du fournisseur.

Le niveau du stock de sécurité est calculé comme suit :

$$S = r - \mu_X = Z_{1-\alpha} \times \sigma_X = \sqrt{L}\ \sigma_D\ Z_{1-\alpha}. \tag{3.2}$$

Exemple 3.1. Chaque année, le propriétaire d'un magasin d'ordinateur vend une moyenne de 1000 boîtes de disques. La demande annuelle des boîtes de disques est distribuée normalement avec un écart-type de 40,8 boîtes. Il s'approvisionne les disques chez un distributeur régional et le coût de lancement d'une commande est de 50\$. Le coût annuel de possession d'une boîte de disques en stock est de 10\$. Le délai de livraison d'une commande est supposé de deux semaines. Le propriétaire du magasin adopte une politique du point de commande.

1. Déterminer les paramètres de ce modèle de gestion du stock pour un niveau de service de 95%.
2. Quel est le niveau de service offert si le propriétaire du magasin désire avoir un stock de sécurité de 10 boites.

Solution : $t = 10\%$, $h = 50\$/\text{commande}$, $c_s = 10\$/\text{boite/an}$, $L = 2$ semaines.

Considérons la v.a D :"demande annuelle des boites de disques";

$D \hookrightarrow N(\mu_D, \sigma_D)$, avec $\mu_D = 1000$ boites/an et $\sigma_D = 40,8$ boites/an.

1. *Les paramètres de la politique* (Q, r) *adoptée :*

   - La quantité de commande est calculée par la formule de Wilson :

   $$Q = \sqrt{\frac{2h\mu_D}{c_s}} = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1000}{10}} = 100 \text{ boites.}$$

   - Calcul du point de commande r pour un niveau de service $1 - \alpha = 95\%$:

   Soit la v.a X :"la demande des boites de disque durant $L = 2$ semaines";

   $X = LD \hookrightarrow N(\mu_X, \sigma_X)$, tels que

   $$\begin{cases} \mu_X = L\mu_D, = \frac{2}{52} \times 1000 = 38.46 \simeq 38 \text{ boites,} \\ \sigma_X = \sqrt{L}\sigma_D = \sqrt{\frac{2}{52}} \times 40,8 = 8 \text{ boites.} \end{cases}$$

   Pour $1 - \alpha = 95\%$, on a $Z_{1-\alpha} = 1.65$, d'où

   $$r = \mu_X + \sigma_X Z_{1-\alpha} = 38 + 8 \times 1.65 = 51,20 \simeq 51 \text{ boites.}$$

   Le niveau du stock de sécurité est $S = r - \mu_X = 51 - 38 = 13$ boites.

   La politique de cette entreprise est de commander 100 boites de disque chaque fois que le niveau du stock baisse à 51 unités.

2. *Calcul du niveau de service pour un stock de sécurité* $S = 10$ *boites :*

   on a $S = r - \mu_X = \sigma_X Z_{1-\alpha} \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = \frac{S}{\sigma_X} = \frac{10}{8} = 1,25$. A partir de la table de la loi normale centrée et réduite, on aura $1 - \alpha = 0,8944 = 89,44\%$.

3.2.2 Méthodes de calcul du niveau de service

✓ **Cas 1 :** *Si on connais le nombre d'années n , où on a une seule rupture de stock :*

on a : **Le risque × nombre de commandes** $= \frac{1}{n}$.
Comme le nombre de commandes par année est $\frac{\lambda}{Q}$, alors on aura :

$$\alpha\frac{\lambda}{Q} = \frac{1}{n} \Longrightarrow \alpha = \frac{Q}{n\lambda},$$

où λ : la demande annuelle moyenne de l'article.

> **Exemple 3.2 (exemple précédent).** Calculer le point de commande si le propriétaire du magasin d'ordinateur accepte une rupture de stock tous les 5 ans.
> **Solution :** on a : $n = 5$ ans ; $\lambda = \mu_D = 1000$ boites/an.
> Le risque de rupture du stock : $\alpha = \frac{Q}{n\lambda} = \frac{100}{5\times 1000} = 0.02 \Longrightarrow 1-\alpha = 1-0.02 = 98\%$.
> Pour ce niveau de service, son quartile associé est $Z_{1-\alpha} = 2.06$.
> Donc le point de commande $r = \mu_X + \sigma_X Z_{1-\alpha} = 38 + 8 \times 2.06 = 54,48 \simeq 54$ boites,
> et le niveau du stock de sécurité est $S = r - \mu_X = 54 - 38 = 16$ boites.

✓ **Cas 2 :** *Si on connaît le coût de pénurie d'une unité en stock :*

Sans parte de généralité, on suppose qu'on gère en stock un seul article et durant la période de gestion du stock, soit π le coût de pénurie d'une unité de l'article. Considérons la v.a X : "la demande de l'article durant le délai de livraison fixe L" ayant une densité de probabilité f et une moyenne μ_X.

Le nombre d'articles en pénurie de stock durant une période de commande est la v.a

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq r \\ X - r & \text{si } X > r. \end{cases}$$

Le nombre moyen d'unités en rupture de stock pendant une période de réapprovisionnement est $\mathbb{E}(Y) = \int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx$ et son coût annuel moyen est alors

$$C_r = \pi\frac{\lambda}{Q}\mathbb{E}(Y) = \pi\frac{\lambda}{Q}\int_r^{+\infty}(x-r)f(x)dx.$$

Le niveau moyen du stock est $\frac{Q}{2} + S = \frac{Q}{2} + r - \mu_X$ et son coût annuel de stockage est

$$C_P = (\frac{Q}{2} + r - \mu_X)c_s.$$

Donc le coût moyen total de gestion du stock est

$$\begin{aligned} C_T(Q, r) &= C_L + C_P + C_r \\ &= \frac{\lambda}{Q}h + (\frac{Q}{2} + r - \mu_X)c_s + \pi\frac{\lambda}{Q}\int_r^{+\infty}(x-r)f(x)dx \end{aligned}$$

L'objectif ici est de calculer le point de commande r qui minimise la fonction coût $C_T(Q,r)$. Si on fixe la quantité de commande Q, alors le point minimum r de la fonction C_T vérifie :

$$\frac{\partial C_T}{\partial r} = c_S - \frac{\lambda\pi}{Q}\int_r^{+\infty} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_r^{+\infty} f(x)dx = \frac{c_s Q}{\pi\lambda} \Rightarrow \alpha = \mathbb{P}(X > r) = \frac{c_s Q}{\pi\lambda}.$$

Donc le niveau de service $1-\alpha = 1 - \frac{c_s Q}{\pi\lambda}$.
Par conséquent, le point de commande et le stock de sécurité peuvent respectivement être obtenus en utilisant les formules (3.1) et (3.2).

Exemple 3.3 (exemple précédent). Calculer le stock d'alerte si le coût annuel de rupture d'une boite de disque est de 10$.
Solution : on a : $\pi = 10\$/\text{an}$.
Le risque de rupture du stock : $\alpha = \frac{Q\times c_s}{\pi\lambda} = \frac{100\times 10}{10\times 1000} = 0,1 \Longrightarrow 1-\alpha = 90\%$.
Pour ce niveau de service, son quartile associé est $Z_{1-\alpha} = Z_{0,90} = 1,29$.
Donc le point de commande $r = \mu_X + \sigma_X Z_{1-\alpha} = 38 + 8 \times 1.29 = 48,32 \simeq 48$ boites,
et le niveau du stock de sécurité est $S = r - \mu_X = 48 - 38 = 10$ boites.

3.3 Le système à réapprovisionnement périodique (R, T)

Pour ce système, le contrôle du stock se fait de manière périodique, par exemple chaque semaine, un mois ou un trimestre. Au début de chaque période fixe T, on contrôle le niveau de stock et la quantité commandée est celle qui ramène le niveau du stock au seuil R, appelé *niveau de recomplètement (ou de réapprovisionnement).* Cette commande sera réceptionnée après un délai d'approvisionnement L. L'évolution du niveau de stock de cette politique est donnée dans la figure ci-après : L'avantage de cette politique par rapport à (Q,r) est qu'elle permet de regrouper les commandes par fournisseur, ce qui permet de réduire les coûts de commande et de transport.

Les calculs utilisés dans le système (Q,r) peuvent être utilisés dans ce système avec les modifications suivantes :

- Dans le modèle (R,T) le contrôle du stock n'est pas nécessaire entre les périodes de révision, par contre dans le modèle (Q,r) le stock est contrôlé d'une manière continue.
- Pour une période de révision T, le niveau de recomplètement R détermine le niveau de service offert par le système.

3.3.1 Calcul du niveau de recomplètement R

Pour déterminer R dans le système (R,T), on procède de la même façon que dans le modèle(Q,r) pour calculer r, sauf que l'on doit remplacer la fonction de densité de la demande pendant L par la fonction de densité de la demande ponctuelle durant $(T+L)$.

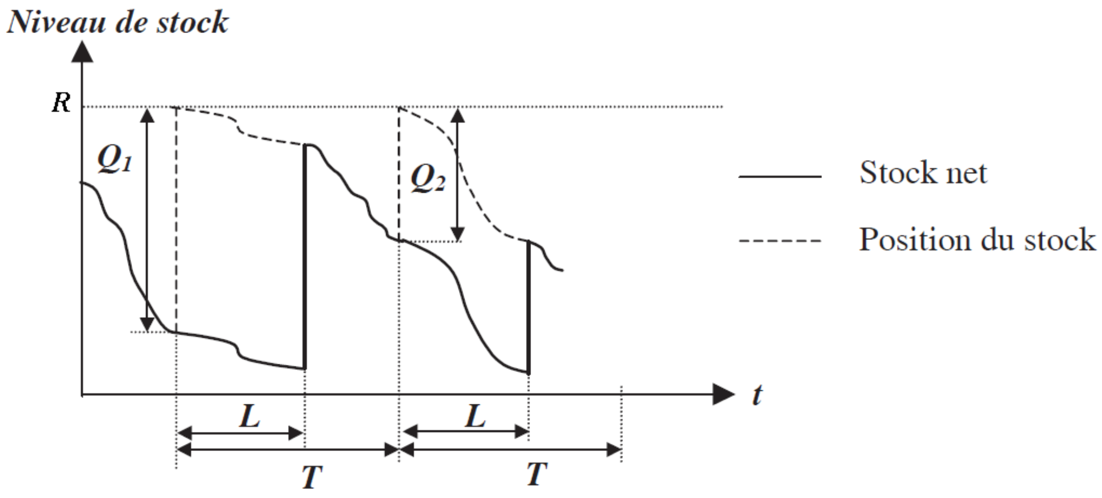

FIG. 3.2 – Evolution du stock avec la politique (R, T)

Soit la variable aléatoire D : "demande de l'article par unité de temps", avec D suit une loi normale de paramètres μ_D et σ_D.
Considérons la variable aléatoire X : "la demande durant $T + L$".
Dans le cas où le délai de réapprovisionnement L est constant, on a

$$X = D(T+L) \hookrightarrow N(\mu_X, \sigma_X), \text{ avec } \begin{cases} \mu_X = (T+L)\mu_D, \\ \sigma_X = \sqrt{T+L}\sigma_D. \end{cases}$$

Si on exige un niveau de service $1 - \alpha$, alors on aura :

$$P(X \leq R) = 1 - \alpha \Rightarrow P(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{R - \mu_X}{\sigma_X}) = 1 - \alpha.$$

Notons par la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
Alors, on aura :

$$P(Z \leq \frac{R - \mu_X}{\sigma_X}) = 1 - \alpha \Longrightarrow R = \mu_X + \sigma_X Z_{1-\alpha} = (T+L)\mu_D + \sqrt{T+L}\sigma_D Z_{1-\alpha}.$$

Le niveau du stock de sécurité est : $S = R - \mu_X = \sqrt{T+L}\ \sigma_D\ Z_{1-\alpha}$.

Exemple 3.4. Un laboratoire effectue ses approvisionnements tous les 30 jours à partir d'un même fournisseur de produits chimiques. Le délai de livraison est de 05 jours. Le gérant doit déterminer le volume de la commande des différents produits chimiques. Une vérification du niveau de ses stocks a révélé que 11 jarres de $25ml$ d'un de ses produits sont disponibles. L'utilisation journalière de ce produit est approximativement normal de moyenne $15,2ml$ par jour et un écart-type de $1,6ml$ par jour. Le niveau de service pour ce produit est de 95%.

1. Quelle est la politique de gestion de stocks appliquée par ce laboratoire ?
2. Calculer la quantité moyenne du stock de sécurité pour ce produit.

Solution : Nous avons :

Le délai de livraison du produit :$L = 5 jours$;

Le niveau de service : $1 - \alpha = 95\% \Rightarrow Z_{1-\alpha} = 1.65$;

La demande quotidienne du produit : $D \hookrightarrow N(\mu_D, \sigma_D)$, avec $\mu_D = 25ml$ et $\sigma_D = 1.6ml$.

1. Puisque les approvisionnement se font au début de chaque mois, alors le laboratoire adopte une politique de recomplètement périodique (R, T), avec $T = 1$ mois.

   Pour un niveau de service $1 - \alpha = 95\%$, le niveau de recomplètement R est calculé comme suit

   $$R = (T+L)\mu_D + \sqrt{(T+L)}\sigma_D \times Z_{1-\alpha} = (30+5)\times 15.2 + \sqrt{30+5}\times 1.6 \times 1.65 = 547.62ml,$$

   Donc $R = \frac{547.62}{25} = 21,90 \backsimeq 22$ jarres.

   Puisque le niveau actuel du stock est $Q_0 = 11$ jarres, alors la quantité commandée Q est celle qui ramène le niveau du au seuil R.

   D'où $R = Q_0 + Q \Longrightarrow Q = R - Q_0 = 22 - 11 = 11$ jarres.
2. Le niveau moyen du stock de sécurité :

   $S = \sqrt{(T+L)}\sigma_D \times Z_{1-\alpha} = \sqrt{30+5} \times 1.6 \times 1.65 = 15,62ml.$

3.4 Classification ABC

Lorsqu'une entreprise gère plusieurs milliers d'articles, elle ne peut pas accorder à chacun la même priorité dans sa gestion. Dans ce cas, une gestion des stocks sélective s'impose. En effet, on ne gère pas de la même façon les fournitures de bureau et les articles destinés à la production. De même, dans un ensemble produit, la vis de diamètre $5cm$ dont la valeur est faible ne sera pas gérée de manière identique à un produit dont la valeur est très importante. On note donc à ce niveau qu'il est nécessaire d'adopter une classification des produits selon les critères suivants :

– critère de destination (fournitures de bureau, production, service après-vente) ;
– critère de valeur (valeur cumulée des articles apparaissant dans les mouvements de stocks ou valeur en stock) ;

Méthode de classification ABC

La méthode ABC est un modèle simple de classement des articles issue de la méthode de **Pareto**, dite aussi **méthode des 20-80**, développée au début du 19 $^{\text{ème}}$ siecle. Elle permet de classer les flux et les stocks d'articles en fonction de certains critères, à savoir :

– Le chiffre d'affaire (valeur de vente des stocks pendant une période).
– Valeur du stock.
– La surface ou le volume consommé.

La démarche de la classification ABC est la suivante :

1. Classer les articles par ordre décroissant du critère utilisé.
2. Calculer les pourcentages cumulés du critère utilisé.
3. Déterminer les fréquences cumulées, exprimées en pourcentage sur le nombre d'articles.
4. Déterminer les trois classes A, B et C selon le graphe suivant :

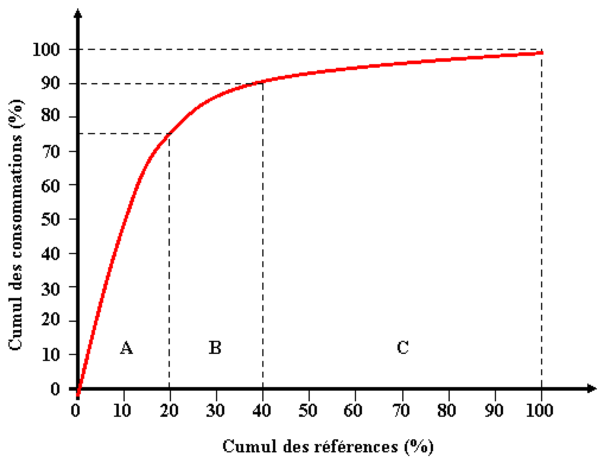

FIG. 3.3 – Courbe de classification des articles par la méthode ABC [5].

A partir du ce ce graphe, nous remarquons que le stock d'articles est reparti en trois classes :
Classe " A " : 5 à 10% des références représentent 60 à 75% de la consommation totale des articles du stock.
Classe " B " : 25 à 30% des références représentent 25 à 30% de la consommation totale des articles du stock.

Classe " C " : 60 à 70% des références représentent 5 à 10% de la consommation totale des articles du stock.
Le tableau suivant récapitule les principales caractéristiques des trois classes :

Classes	A	B	C
% des références	5% à 20%	20% à 40%	40% à 50%
% de consommation totale	55% à 75%	15% à 20%	5% à 10%
Niveau de contrôle	Rigoureux	Normal	Simple
Stock de sécurité	Bas	Modéré	Important
Fréquence des inventaires	Élevée	Modérée	Faible
Inventaire du stock	Soigneuse et précise (Révisions fréquentes)	Normale	Périodique (1 à 2 fois par an)
Modèles du stock	(Q,r) et (R,T)	Wilson et ces variantes	fiches de stock

Tab. 3.1 – Principales caractéristiques des classes A,B et C de la méthode ABC

Exemple 3.5. L'entreprise AZT fabrique et vend des meubles de luxe à plusieurs grandes chaînes de distribution de la région de Montréal. Elle utilise dans son processus de fabrication, 10 types d'articles dont les consommations annuelles sont indiquées dans le tableau ci-après :

Articles	Consommation annuelle (en quantité)	Coût unitaire en $
A1	1 100	2
A2	600	40
A3	100	4
A4	1 300	1
A5	100	60
A6	10	25
A7	100	2
A8	1 500	2
A9	200	2
A10	500	1
Total	5 510	

Tab. 3.2 – Donnée de l'entreprise AZT

Le tableau suivant résume les étapes de la méthode ABC, ainsi que la composition des trois classes obtenues.

Articles	Consommation annuelle	Valeur des consommations	% cumulé des valeurs	% cumulé du nombre d'articles	Classe
A2	2 400	24 000	62,75	10	A
A5	6 000	30 000	78,43	20	A
A8	3 000	33 000	86,27	30	B
A1	2 200	35 200	92,03	40	B
A4	1 300	36 500	95,42	50	B
A10	500	37 000	96,73	60	C
A9	400	37 400	97,78	70	C
A3	400	37 800	98,82	80	C
A6	250	38 050	99,48	90	C
A7	200	38 250	100,00	100	C

TAB. 3.3 – Tableau de la classification ABC des articles de AZT

La courbe de la classification ABC est schématisé par la figure 3.4 suivante :

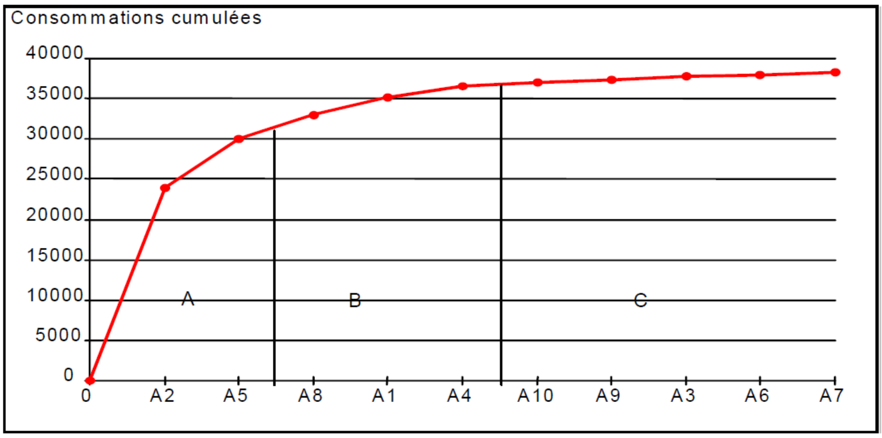

FIG. 3.4 – Classification ABC des articles de l'entreprise AZT

3.5 Exercices d'application

Exercice 3.1. L'entreprise Duglaçon distribue un produit, le Frilox, dont la demande annuelle est égale à 12 000 unités. Elle achète ce produit au fournisseur Duranafer au prix unitaire de 25€ ou de 22 € si le volume de la commande est un multiple de 250. Le coût de passation administratif d'une commande est évalué à 10 €. Le taux de possession annuel est approximativement égal à 24%. Le délai de livraison pour ce produit est de 3 jours.

1. Expliciter la fonction de coût total de gestion du stock de Frilox (on prendra la quantité commandée Q comme variable).
2. Uniquement à l'aide de la question précédente (c'est-à-dire sans utiliser de formule toute prête), déterminer la valeur de la quantité économique de commande, notée Q^*.
3. Calculer le point de commande.
4. En réalité, la demande n'est pas certaine ; après avoir effectué quelques statistiques, il semblerait qu'elle suit une loi normale de moyenne 12000 et d'écart-type de 220 unités. Votre directeur exige un niveau de service de 99%.

   a. Déterminer le point de commande.

   b. Déduire le niveau du stock de sécurité et son coût moyen.

Exercice 3.2. On vous demande de déterminer le niveau de réapprovisionnement pour un niveau de service de 95% lorsque la demande par semaine est normalement distribuée de moyenne égale à 20 unités et d'écart-type de 2 unités dans les deux cas suivants :

1. Le délai de livraison est constant et est égale à 2 jours.
2. Le délai de livraison suit une loi normale dont sa distribution durant 100 jours est donnée dans le tableau suivant :

Délai de livraison (en semaines)	1	2	3	4	5
Nombre d'occurrences	10	20	40	20	10

Exercice 3.3. La demande journalière d'un article est normale de moyenne 100 unités et d'écart type de 10 unités. Le délai de livraison pour cet article est de 3 jours.

A. On applique une politique à point de commande (Q, r).

1. Déterminer le point de commande pour un niveau de service de 95%.
2. Si on décide de lancer une commande lorsque le stock baisse à 330 unités, quel sera le risque de rupture des stocks ?

B. On applique une politique de recomplètement périodique (R, T). On décide de contrôler notre stock une fois par mois.

1. Déterminer R pour avoir un taux de service de 95%.

2. Notre magasin ne peut contenir que 2000 unités, comment modifier les paramètres de cette politique de façon à garder le même niveau de service ?

Exercice 3.4 (Problème du vendeur de journaux). Un libraire s'approvisionne quotidiennement auprès d'une maison d'édition. Il paie v dinars pour chaque exemplaire du journal, et le revend pour p dinars. Les invendus lui sont repris à g dinars par l'éditeur. On suppose que la demande du quotidien considéré est une variable aléatoire continue X, dont sa fonction de densité est $f(x)$.

a) Combien de journaux le libraire doit-il commander chaque jour afin de maximiser son bénéfice espéré ?

b) Appliquer ce modèle à un libraire qui achète le journal liberté à 8 Da, le revend à 15 Da et les invendus sont repris par l'éditeur à $5DA$; la demande journalière est normale de moyenne 150 unités et d'écart-type 15.

Exercice 3.5. Le premier jour de chaque mois, le revendeur d'un produit Alpha passe une commande d'une certaine quantité de ce produit. Le délai de livraison est de 15 jours et le coût de passation d'une commande est de 2500$. Le prix d'achat de ce produit est 100$ à l'unité et son taux de possession en stock est de 30%.
La demande mensuelle du produit Alpha suit une loi normale et après l'avoir observée sur plusieurs mois, le revendeur a obtenu les données suivantes :

Demande mensuelle	[0, 10 [	[10, 20 [	[20, 30 [	[30, 40 [	[40, 50 [
Fréquence d'apparition	10%	20%	40%	20%	10%

1. Quelle est la distribution de probabilité de la demande mensuelle du produit Alpha ?
2. A quel type de modèle de gestion de stock ce problème fait référence ? déterminer ces paramètres pour un niveau de service de 95%.
3. Calculer le stock de sécurité.
4. Quel sera le niveau du stock si le revendeur lance une commande de volume Q, calculée par le modèle de Wilson ?
5. Si le revendeur adopte une politique du point de commande, déterminer alors ses paramètres de gestion pour un niveau de service de 99% ?

Exercice 3.6. Procéder à une analyse **ABC** des données suivantes :

Articles	Valeur	Nombre en Stock
A1	800	10
A2	100	60
A3	150	20
A4	200	10
A5	210	15
A6	80	9
A7	250	6

Bibliographie

[1] Yves CRAMA. *Eléments de gestion de la production*. Ecole d'Administration des Affaires, Université de Liège, 2003.

[2] Jean-Philippe Gayon. *Gestion des stocks : Notes de cours, exercices, projets et annales*. Génie industriel, INP Grenoble, 2015.

[3] V. Giard. *Gestion de la Production*. Economica, Paris, 1988.

[4] T. Hubert. *Prévision de la demande et pilotage des flux en approvisionnement lointain*. Thèse de doctorat en génie industrielle, École Centrale de Paris, 2013.

[5] G. Javel. *Organisation et Gestion de la Production : Cours avec exercices corrigés*. Dunod, Paris, 2004.

[6] Pierre Médan and Anne Gratacap. *Management de la production : Concepts, méthodes et cas*. Dunod, Paris, 3^{e} edition, 2009.

[7] H.A. Taha. *Operations Research : An Introduction*. McMillan Publishing, 8th edition, 2007.

[8] Donald Waters. *Inventory Control and Management*. John Wiley & Sons Ltd, New York, 2nd edition, 2003.

[9] P. Zermati. *La Pratique de la Gestion des Stocks*. Bordas, Paris, 4^{e} edition, 2000.