Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2015-2016
MATHS 2 Avril 2016

Série de T.D. N 3 : Matrices, déterminants et systèmes linéaires

Exercice n° 1.

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de A :
a) En le développant suivant la première ligne
b) En le développant suivant la deuxième colonne
c) Par la règle de Sarrus.
2) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3) Soit le système linéaire suivant :

$$(S) : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système (S) :
a) Par la méthode de Cramer
b) En utilisant l'inverse de A.

Exercice n° 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

Résoudre suivant les valeurs de α le système suivant :

$$(S_\alpha) : A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Mai 2016

Corrigé de la série N°03

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Le déterminant de A en développant la ligne 1 est donné par $\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j} \times a_{1j} \times \det(A_1^j)$,

avec A_1^j est la matrice obtenue à partir de A, en supprimant la ligne 1 et la colonne j, donc $\det(A) = (-1)^{1+1} \times a_{11} \times \det(A_1^1) + (-1)^{1+2} \times a_{12} \times \det(A_1^2) + (-1)^{1+3} \times a_{13} \times \det(A_1^3) =$

$$3 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - (-2) \times \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 15 - 10 = 5$$

b. Le déterminant de A en développant la colonne 2 est donné par $\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1} \times a_{i1} \times \det(A_i^1)$,

avec A_i^1 est la matrice obtenue à partir de A, en supprimant la ligne i et la colonne 2, donc $\det(A) = (-1)^{1+2} \times a_{12} \times \det(A_1^2) + (-1)^{2+2} \times a_{22} \times \det(A_2^2) + (-1)^{3+2} \times a_{32} \times \det(A_3^2) =$

$$-(-2) \times \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - (-3) \times \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

c. Soit A' la matrice obtenue à partir de A en en ajoutant la première ligne comme quatrième et la deuxième comme cinquième, donc on obtient la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors
$\det(A) = (3\times1\times2+2\times(-3)\times1+4\times(-2)\times1)-(4\times1\times1+3\times(-3)\times3+2\times(-2)\times2) = 6-6-8-4+9+8 = 5.$

2. Comme $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}, \text{tel que } c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_i^j)$$

Les c_{ij} sont :

$$c_{11} = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix} = 5, c_{12} = -\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} = 0, c_{13} = \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix} = -10,$$

$$c_{21} = -\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix} = 1, c_{22} = \det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} = 2, c_{23} = -\det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix} = 1,$$

$$c_{31} = \det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -3, c_{32} = -\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = -1, c_{33} = \det\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 7$$

$$\text{alors } A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ -10 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

3. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$$

a. Le système est de Cramer car $\det(A) \neq 0$. Par la méthode de Cramer on a :
$x_j = \dfrac{1}{\det(A)} \times \det(A^j)$, avec A^j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne j par le vecteur $(2\ \ 7\ \ 4)^t$, alors :

$$x = \frac{1}{5}\times\det\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\times(2\times\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}+2\times\det\begin{pmatrix}7 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+1\times\det\begin{pmatrix}7 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}) = 1$$

$$y = \frac{1}{5}\times\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 7 & 1\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\times(3\times\det\begin{pmatrix}7 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} - 2\times\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} + 1\times\det\begin{pmatrix}2 & 7\\ 4 & 4\end{pmatrix}) = 2$$

$$z = \frac{1}{5}\times\det\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 7\\ 4 & -3 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\times(3\times\det\begin{pmatrix}1 & 7\\ -3 & 4\end{pmatrix}-(-2)\times\det\begin{pmatrix}2 & 7\\ 4 & 4\end{pmatrix}+2\times\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}) = 3$$

b. Par la méthode de la matrice inverse

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A^{-1}\times\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ -10 & 1 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ 7\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit le système linéaire suivant :

$$A_\alpha \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}, \text{avec } A_\alpha = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & \alpha\\ 1 & \alpha & 3\end{pmatrix}$$

1. $\det(A_\alpha) = 1\times\det\begin{pmatrix}3 & \alpha\\ \alpha & 3\end{pmatrix} - 1\times\det\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ 1 & 3\end{pmatrix} - 1\times\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & \alpha\end{pmatrix} = -\alpha^2 - \alpha + 6$

a. Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-3, 2\}$, le système est de Cramer et a la solution suivante :

$$x = \frac{1}{-\alpha^2 - \alpha + 6} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{-\alpha^2 - \alpha + 6} \times (1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}) = 1$$

$$y = \frac{1}{-\alpha^2 - \alpha + 6} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{-\alpha^2 - \alpha + 6} \times (1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = \frac{-1}{\alpha + 3}$$

$$z = \frac{1}{-\alpha^2 - \alpha + 6} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{5} \times (1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}) = \frac{-1}{\alpha + 3}$$

b. Si $\alpha = 2$, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{, on a } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Donc le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ 3 - 2z \end{pmatrix} \text{ et } x + 2y + 3z = 2$$

Il est clair que le sous système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z \\ 3 - 2z \end{pmatrix}$$

est de Cramer, donc il a comme solutions :

$$x = \det \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ 3 - 2z & 3 \end{pmatrix} = 5z$$

$$y = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 + z \\ 2 & 3 - 2z \end{pmatrix} = 1 - 4z$$

Comme cette solution vérifié l'équation x+2y+3z = 2, alors le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

possède une infinité de solution $x = 5z$, $y = 1 - 4z$ et $z \in \mathbb{R}$

c. Si $\alpha = -3$, le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{, on a } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Donc le système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ 3+3z \end{pmatrix} \text{et } x - 3y + 3z = 2$$

Il est clair que le sous système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ 3+3z \end{pmatrix}$$

est de Cramer, donc il a comme solutions :

$$x = \det \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ 3+3z & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \det \begin{pmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 3+3z \end{pmatrix} = 1 - z$$

Comme cette solution ne vérifié l'équation x-3y+3z = 2, alors le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de solutions.