Maths 3.

Deuxième Années Technologie (ATE, GC) (2017/2018)

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales Doubles-Intégrales triples-Applications

1.1 Intégrales Doubles- Applications

1.1.1 Aspect Physique

Dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ considérons une plaque (D) fabriquée en cuivre, par exemple. soit $f(x, y)$ la densité du cuivre au point $(x, y) \in (D)$.
Objectif : Calculer la masse totale du cuivre distribué sur la région plane (D) ?
Pour ce faire, partageons (D) en n petits morceaux (n suffisamment grand) $(D_1),\ (D_2),\ (D_3), ...,\ (D_n)$ par des courbes quelconques. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note par $m(D_k)$ la masse de (D_k). Le point (x_k, y_k) désigne la position du point matériel (D_k). Voici comment calculer la masse d'un élément (D_k).

$$m(D_k) = f(x_k, y_k) \times \text{Aire}(D_k), \quad \forall k \in [1\,; n]. \tag{1.1}$$

Ainsi, la masse totale devient

$$m_n(D) = \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k, y_k) \times \text{Aire}(D_k). \tag{1.2}$$

Posons la condition suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } \ k \text{ dans } [1\,; n] : \ \text{L'Aire}(D_k) \to 0. \tag{1.3}$$

Sous la condition 1.3 :
1)-la valeur $m(D)$ ($m(D) = \lim\limits_{n \to +\infty} m_n(D)$) est-elle indépendante du mode de découpage de (D) ?
2)-Dans le cas d'indépendance de la valeur $m(D)$ du mode de découpage de (D), comment calculer $m(D)$?

1.1.2 Aspect Mathématique

Définition : Dans un plan, considérons une région (ou domaine) (D) fermée [1], bornée et connexe [2]

$$(D) \text{ est régulier } \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (D) = \{(x, y) \ \text{ tel que } \ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\} \\ \text{ ou} \\ (D) = \{(x, y) \ \text{ tel que } \ c \leq y \leq d \text{ et } k(y) \leq x \leq l(y)\} \end{cases}$$

Où les fonctions f et g sont continues sur $[a;\ b]$ et k, l sont continues sur $[c;\ d]$.

1. Un domaine (D) est fermé veut dire il contient les points de sa frontière.
2. Un domaine (D) est dit connexe s'il vérifie cette propriété : deux points quelconques de (D) peuvent être reliés par une courbe (C) sans quitter ce domaine (ie $(C) \subset (D)$).

1.1.3 Intégrales doubles en coordonnées cartésiennes

Dans le plan (Oxy), considérons un domaine (D) bornée fermé.
Soit $F(x,y)$ une fonction continue dans (D).
Partageons, d'une façon arbitraire, le domaine (D) en N domaines partiels (D_1), (D_2), (D_3), , (D_N).
Dans chaque domaine partiel (D_k) $(k = 1,..,N)$ considérons un point $p_i(x_i;y_i)$ (peu importe à l'intérieur ou sur la frontière), on construit donc N points $p_1(x_1;y_1)$, $p_2(x_2;y_2)$, .., $p_N(x_N;y_N)$.
formons la somme suivante :

$$V_N = F(x_1;y_1) \times \text{aire}(D_1) + F(x_2;y_2) \times \text{aire}(D_2) + .. + F(x_N;y_N) \times \text{aire}(D_N). \tag{1.4}$$

Remarque
Si $F(x,y) \geq 0$ dans (D), géométriquement, chaque terme $F(x_i;y_i) \times \text{aire}(D_i)$ de la formule 1.4 peut être lu comme le volume du cylindre élémentaire de base (D_i) et de hauteur $F(x_i;y_i)$.
On admet le résultat suivant :
Sous les conditions "F est continue dans (D)" et "$\forall k :$ Aire$(D_k) \to 0$" la quantité V_N tend vers une valeur finie s. De plus, s ne dépend ni du mode de découpage de (D) en petits domaines ni du choix des points $p_1(x_1;y_1)$, $p_2(x_2;y_2),...,p_n(x_n;y_n)$ dans (D_1), $(D_2),..(D_n)$ (respectivement).
Appellation et Notation
La valeur s est appelée intégrale double de la fonction $F(x,y)$ sur le domaine (D) et on la note par

$$\iint_{(D)} F(x,y)dxdy. \tag{1.5}$$

On écrit :

$$\iint_{(D)} F(x,y)dxdy = s. \tag{1.6}$$

Un tel domaine (ie (D)) est appelé le domaine d'intégration.
Ce qu'il faut retenir
Règles №1
Si la projection de (D) sur l'axe des x donne l'intervalle $[a,\ b]$ et (D) est délimité par deux graphes définis par des équations de types $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (supposons $f(x) \leq g(x)$ sur $[a,\ b]$) alors

$$☞ \boxed{\iint_{(D)} F(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy\right] dx} \tag{1.7}$$

Règles №2
Si la projection de (D) sur l'axe des y donne l'intervalle $[c,\ d]$ et (D) est délimité par deux graphes définis par des équations de types $x = k(y)$ et $x = l(y)$ (supposons $k(y) \leq l(y)$ sur$[c,\ d]$) alors

$$☞ \boxed{\iint_{(D)} F(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{k(y)}^{l(y)} F(x,y)dx\right] dy}. \tag{1.8}$$

Conséquence :
Dans le cas $F(x,y) = 1$ sur le domaine d'intégration (D), via la formule (1.4), l'intégrale $\displaystyle\iint_{(D)} dxdy$ désigne l'aire de la figure plane (D), c'est à dire :

$$☞ \boxed{\text{L'aire } (D) = \iint_{(D)} dxdy.} \tag{1.9}$$

Exemple
Soit (D) un disque de rayon 2, (D') un carré de longueur 3 et de largeur 2.

$$\iint_{(D)} dxdy = 4\pi, \quad \iint_{(D')} dxdy = 6.$$

Propriété 1
Cette propriété à pour but de régler le problème dans le cas ou (D) n'est pas régulier.
C'est à dire le domaine (D) est délimité par plus de deux graphes de fonctions.
Soient (D_1) et (D_2) deux domaines fermés bornés. Si l'aire$((D_1) \cap (D_2)) = 0$, alors :

$$☞ \iint_{(D_1)\cup(D_2)} f(x,y)dxdy = \iint_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(D_2)} f(x,y)dxdy. \tag{1.10}$$

La formule (1.27) se généralise ainsi :
Soient (D_1), (D_2), ..., (D_n) des domaines fermés bornés. Si l'aire$((D_i) \cap (D_j)) = 0$: $\forall i \neq j$, alors :

$$☞ \iint_{\cup_{k=1}^{k=n}(D_k)} f(x,y)dxdy = \iint_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(D_2)} f(x,y)dxdy + ... + \iint_{(D_n)} f(x,y)dxdy. \tag{1.11}$$

Propriété 2
Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ deux fonctions continues dans le domaine fermé borné (D).

$$☞ \bullet \iint_{(D)} (f(x,y) + g(x,y))\, dxdy = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy + \iint_{(D)} g(x,y)dxdy.$$

$$☞ \bullet \iint_{(D)} \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_{(D)} f(x,y)dxdy \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.1.4 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Rappel

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Chaque point M de (P) peut être représenté par ces coordonnées cartésiennes x et y ou bien par ces coordonnées polaires θ et r, on a la relation suivante :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta.$$

Objectif :

Transformer une intégrales de la forme $\iint_{(D)} h(x,y)dxdy$ à la forme $\iint_{(D')} q(\theta,r)drd\theta$.

une petite démonstration
Considérons un domaine (D), fermé et borné, défini par :

$$(D) = \{(\theta,\ r) \text{ tel que } \gamma \leq \theta \leq \beta \text{ et } f(\theta) \leq r \leq g(\theta)\} \tag{1.12}$$

Où les fonctions $f(\theta)$ et $g(\theta)$ sont continues sur l'intervalle $[\gamma\,;\beta]$.
Soit dans (D) une fonction $F(x,y)$ continue. Découpons arbitrairement le domaine (D) en domaines partiels (D_1), (D_2), (D_3), , (D_n), on reprend la formule 1.4.

$$V_N = F(p_1) \times \text{aire}(D_1) + F(p_2) \times \text{aire}(D_2) + .. + F(p_N) \times \text{aire}(D_N), \tag{1.13}$$

Où chaque point $p_i(x_i, y_i)$ pris dans (D_i).
On admet ce résultat :

$$\exists s \in \mathbb{R},\ \text{pour tout mode de découpage de } (D) \text{ en } (D_i)\ : V_N \xrightarrow[N\to+\infty]{\forall i: D_i \to 0} s.$$

Autrement dit, la valeur s existe, finie et ne dépend ni du mode de découpage de (D) en domaines partiels (D_i) ni du choix du point p_i dans (D_i). Par exemple si tous les (D_i) sont des petits rectangles, en coordonnées cartésiennes, la valeur s est donner par :

$$s = \iint_{(D)} F(x,y)dxdy. \tag{E}$$

Maintenant, nous allons retrouver la valeur s d'une autre manière, en utilisant la géometrie de découpage de (D) approprié aux coordonnées polaires, voici la procédure :

Première étape
partageons l'angle $\widehat{AOB}$, $A(\gamma,\ f(\gamma))$ et $B(\beta,\ f(\beta))$, en petits angles $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ (de sorte que n devient suffisamment grand). On note chaque portion d'angle θ_i et de sommet $O(0,0)$ par P_i
deuxième étape
On partage chaque portion P_i en m_i petits arc de centre $(0,0)$ de rayons $r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{im_i}$ de sorte que pour tout $i = 1, 2, ..., n$ le nombre m_i devient suffisamment grand. De plus $r_{i1} = f(\theta_i)$ et $r_{im_i} = g(\theta_i)$. Chaque portion P_i est partagée en petites surfaces $S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{im_i}$. Par conséquent,

$$\forall i = 1, 2, ..., n \ : \ \text{Aire}(P_i) = \sum_{j=1}^{j=m_i} S_{ij}. \tag{1.14}$$

Par conséquent :

$$V_n = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=m_i} F(p_{ij}) \text{Aire}(S_{ij}) \right). \tag{1.15}$$

Calculons, d'abord, l'aire de la surface (S_{ij}) en utilisant la forme polaire.

$$\text{Aire}(S_{ij}) = \frac{1}{2}(r^2_{i(j+1)} - r^2_{ij})\theta_i \tag{1.16}$$

Dans le but d'employer la notion de l'intégrale simple, on considère les angles mesurée à partir de l'origine, en posant pour tout $i = 1, 2, .., n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \gamma \\ \alpha_{i+1} - \alpha_i = \theta_i \end{cases} \tag{1.17}$$

on pose

$$\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i \ \text{ et } \ \Delta r_{ij} = r_{i(j+1)} - r_{ij} \tag{1.18}$$

En utilisant (1.17) et (1.18) la formule (1.16) devient

$$\text{Aire}(S_{ij}) = \frac{1}{2}\Delta r_{ij}(\Delta r_{ij} + 2r_{ij})\Delta\alpha_i \tag{1.19}$$

Sous la condition $\Delta r_{ij} \to 0$ et $\Delta\alpha_i \to 0$ pour tout i, j, cette dernière prend la forme suivante :

$$\text{Aire}(S_{ij}) = r_{ij}\Delta\alpha_i\Delta r_{ij} \tag{1.20}$$

De plus, avec condition $\Delta r_{ij} \to 0$ et $\Delta\alpha_i \to 0$, la limite de V_n
quand $n,\ m_i \to +\infty$ égale à s.

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=m_i} F(p_{ij}) r_{ij}\Delta\alpha_i\Delta r_{ij} \right) \tag{1.21}$$

Où le point p_{ij} a pour coordonnées cartésienne $(x_{ij},\ y_{ij})$. En posant $x_{ij} = r_{ij}\cos\alpha_i$ et $y_{ij} = r_{ij}\sin\alpha_i$, les coordonnées polaires du point p_{ij} deviennent (r_{ij}, α_i). Par conséquent, la fonctions $F(p_{ij})$, en coordonnées polaire, se transforme en $h(\alpha_i, r_{ij})$ d'où

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=m_i} h(\alpha_i, r_{ij}) r_{ij}\Delta r_{ij} \right) \Delta\alpha_i \tag{1.22}$$

Comme $r_{i1} = f(\alpha_i)$ et $r_{im_i} = g(\alpha_i)$ (évoqué dans le début du paragraphe de la deuxième étape), on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{j=m_i} h(\alpha_i, r_{ij}) r_{ij}\Delta r_{ij} = \int_{f(\alpha_i)}^{g(\alpha_i)} h(\alpha_i, r) r dr \tag{1.23}$$

On pose

$$k(\alpha_i) = \int_{f(\alpha_i)}^{g(\alpha_i)} h(\alpha_i, r) r dr.$$

La formule (1.22) devient

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} k(\alpha_i)\Delta\alpha_i = \int_{\gamma}^{\beta} k(\alpha)d\alpha = \int_{\gamma}^{\beta}\left(\int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} h(\alpha, r)rdr\right)d\alpha.$$

En fin

$$s = \int_{\gamma}^{\beta}\left(\int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} h(\alpha, r)rdr\right)d\alpha. \tag{1.24}$$

enfin :

Ce qu'il faut retenir

Pour $x = r\cos\alpha$ et $y = r\sin\alpha$, on a :

$$☞ \boxed{\iint_{(D)} F(x, y)dxdy = \iint_{(D)} F(r\cos\alpha, r\sin\alpha)rdrd\alpha,} \tag{1.25}$$

Calcul d'aire en coordonnées polaires

Soit (D) une région du plan. L'aire de (D), en coordonnées polaire, est donné comme suit :

$$☞ \boxed{\text{Aire}(D) = \iint_{(D)} rdrd\alpha.} \tag{1.26}$$

Exemple

Soit $D((0,0),\ R)$ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R. Calculer l'aire de $D((0,0),\ 2)$.

On peut caractériser ce disque comme suit :

$$D((0,0),\ R) = \{(\theta, r) \text{ tel que } 0 \le \theta \le 2\pi \text{ et } 0 \le r \le R\}$$

$$\text{Aire }(D) = \iint_{(D)} rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R rdr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\theta = \pi R^2$$

1.1.5 Changement de variables dans une intégrale double :Cas général

Autrement dit, nous décrirons le changement de coordonnées pour l'intégrale double.
étant données une intégrale double, sur un domaine (D), définie dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y). Soit T une transformation ponctuelle qui transforme le domaine (D) en un domaine (D') de même nature que (D) c'est à dire fermé, borné et connexe (dans un système de coordonnées (u, v)). On représente cette transformation, (T), comme suit :

$$T\colon (x, y) \in (D) \mapsto T(x, y) = (u, v) \in (D') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

Avec (T) doit être bijective, be-continue et les dérivées partielles de ϕ et ψ existent et continues sur (D').

Ce qu'il faut retenir

$$☞ \boxed{dxdy = \left|J\right| dudv.} \tag{1.27}$$

Où

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix},\ J \text{ s'appelle le Jacobien.}$$

Et $\left|J\right|$ désigne la valeur absolue du déterminant J.

D'une façon plus générale

$$☞ \boxed{\iint_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint_{(D')} f(\phi(u, v), \psi(u, v))\left|J\right| dudv.} \tag{1.28}$$

Cas particulier

$$☞\text{Aire}(D) = \iint_{(D)} dxdy = \iint_{(D')} |J|\, dudv. \tag{1.29}$$

Remarques :

1) A l'aide de changement de variables, en coordonnées polaires, $x = \underbrace{r\cos\theta}_{\phi(r,\theta)}$ et $y = \underbrace{r\sin\theta}_{\psi(r,\theta)}$, on pourra retrouver la formule de l'intégrale double en coordonnées polaires. Dans ce cas, $|J| = r$.

$$\iint_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint_{(D)} F(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta. \tag{1.30}$$

1.2 Quelques applications des Intégrales doubles

1.2.1 Aire d'une surfaces gauche

Soit (S) une surface gauche (c'est à dire une surface de l'espace) bornée, fermée [3] et définie par l'équation $z = f(x,y)$ où f est continue et possède des dérivées partielles continues. Notre but, consiste à calculer l'aire de cette surfaces. Pour ce faire, découpons (S) en petites surfaces partielles $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N$, de sort que $N \longrightarrow +\infty$ et $\text{Aire}(\sigma_i) \longrightarrow 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., N$. Il est claire que :

$$\text{Aire}(S) = \text{Aire}(\sigma_1) + \text{Aire}(\sigma_2) + ... + \text{Aire}(\sigma_N). \qquad (B)$$

D'autre part, pour tout $i = 1, 2, ..., N$:

$$\text{Aire}(s_i) = \cos(\vec{n_i}, z)\text{Aire}(\sigma_i), \tag{1.31}$$

Où s_i la projection de la surface partielle σ_i sur le plan (oxy), $\vec{n_i}$ un vecteur normale à la surface élémentaire σ_i en un point $M_i \in \sigma_i$, $(\vec{n_i}, z)$ l'angle entre la normale $\vec{n_i}$ et l'axe (Oz).

Rappel

Soit (S) une surface de l'espace définie par une équation de la forme $z = f(x,y)$. Soit $M(x,y)$ un point quelconque sur cette surface. La normale à la surface (S) passant par $M(x,y)$ est définie comme suit :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en est de même pour notre cas, soit $M_i(x_i,\ y_i)$ un point quelconque de la surface σ_i et

$$\vec{n_i}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i),\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i),\ 1\right)$$

le vecteur normale à la surface σ_i en point $M_i(x_i,\ y_i)$.

On a $\cos(\vec{n_i}, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}}$

En substituant la valeur de $\cos(\vec{n_i}, z)$ dans la formule (1.53) on obtient :

$$\text{Aire}(\sigma_i) = \text{Aire}(s_i).\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}. \tag{1.32}$$

3. la surface S est limitée par une courbe fermée Γ , le domaine de projection de (S) sur le plan (Oxy) est limité par une courbe L où (L) est une courbe fermée désigne la projection de Γ sur le plan (Oxy).

les formules (1.31) et (1.32) entrainent :

$$\text{Aire}(S) = \sum_{i=1}^{i=N} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2}.\text{Aire}(s_i). \tag{1.33}$$

Sous la condition $N \longrightarrow +\infty$ et $\text{Aire}(\sigma_i) \longrightarrow 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., N$ et d'après la définition de l'intégrale double, la formule (1.33) se transforme ainsi :

$$☞ \boxed{\text{Aire}(S) = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, dxdy} \tag{1.34}$$

Où (S) désigne la surface d'équation $z = f(x, y)$ et (D) sa projection sur le plan (Oxy).

1.2.2 Moment d'inertie d'une surface matérielle plane

Par rapport à l'origine des coordonnées

Définition
Soit M un point matériel, m sa masse et r la distance du point M au point O (fixé). On appelle moment d'inertie I de point M par rapport à O le produit mr^2 c'est à dire :

$$I = mr^2.$$

D'une manière générale, on appelle Le moment d'inertie d'un ensemble de points $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ de masses $m_1, m_2, ..., m_n$, respectivement, par rapport à O le nombre I

$$\text{I} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \tag{1.35}$$

Où r_i désigne la distance du point M_i au point O $(i = 1, 2, ..., n)$.

En partant de cette définition, déterminons le moment d'inertie d'une surface matérielle plane (D) représentée dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{i})$.
Soit $\rho(x, y)$ la densité de matière (densité surfacique) en un point (x, y) de (D).
Découpons la surface matérielle (D) en petites surfaces élémentaires $s_1, s_2, ..., s_n$ de sort que $n \longrightarrow +\infty$ et pour tout $i = 1, 2, ..n$: $\text{Aire}(s_i) \longrightarrow 0$. sous cette condition chaque surface s_i est considérée comme étant un point matériel de coordonnées (x_i, y_i). Le moment d'inertie de s_i par rapport à O est donnée comme suit

$$I_i = (x_i^2 + y_i^2)m_i = (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i).\text{Aire}(s_i)$$

Par conséquent, le moment d'inertie de (D) par rapport à O devient

$$I = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i).\text{Aire}(s_i)$$

Sous la condition $n \longrightarrow +\infty$ et pour tout $i = 1, 2, ..n$: $\text{Aire}(s_i) \longrightarrow 0$ cette dernière somme se transforme en une intégrale double, c'est à dire :

$$\boxed{I = \iint_{(D)} (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,dxdy} \tag{1.36}$$

Cas particulier
Si $\rho(x, y) = 1$, alors le moment d'inertie de (D) par rapport à O devient

$$I = \iint_{(D)} (x^2 + y^2)\,dxdy$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe des abscisses
Le moment d'inertie de la surface matérielle (D) par rapport à l'axe des ordonnés est donné par

$$\boxed{I_{xx} = \iint_{(D)} y^2 \rho(x,y)dxdy} \tag{1.37}$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe des ordonnés
Le moment d'inertie de la surface matérielle (D) par rapport à l'axe des ordonnés est donné par

$$\boxed{I_{yy} = \iint_{(D)} x^2 \rho(x,y)dxdy} \tag{1.38}$$

1.2.3 Coordonnées du centre de gravité d'une surfaces maternelle plane

Soit (D) une surface matérielle plane de densité surfacique $\rho(x,y)$. Partageons d'une façon arbitraire le domaine (D) en $N = n$ domaines partiels (D_1), (D_2), (D_3), , (D_N) de masses $m_1, m_2, ..., m_n$, respectivement.
Dans chaque domaine partiel (D_i) $(i = 1, .., n)$ considérons un point $(x_i; y_i)$ (peu importe à l'intérieur ou sur la frontière). Notons par $G(\alpha, \beta)$ le centre de gravité de (D) on a

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}, \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}$$

Comme $\rho(x_i, y_i) = \dfrac{m_i}{\text{Aire}(D_i)}$, on a :

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} x_i \rho(x_i, y_i)\text{Aire}(D_i)}{\sum_{i=1}^{i=N} \rho(x_i, y_i)\text{Aire}(D_i)}, \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} y_i \rho(x_i, y_i)\text{Aire}(D_i)}{\sum_{i=1}^{i=N} \rho(x_i, y_i)\text{Aire}(D_i)}$$

Sous la condition $n \longrightarrow +\infty$ et pour tout $i = 1, 2, ..n$: $\text{Aire}(D_i) \longrightarrow 0$ ces deux dernières formules se transforment ainsi

$$\boxed{\alpha = \frac{\iint_{(D)} x\rho(x,y)dxdy}{\iint_{(D)} \rho(x,y)dxdy}, \quad \beta = \frac{\iint_{(D)} y\rho(x,y)dxdy}{\iint_{(D)} \rho(x,y)dxdy}} \tag{1.39}$$

Cas particulier
Si $\rho(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in (D)$, alors les coordonnées du centre de gravité G sont

$$\alpha = \frac{\iint_{(D)} xdxdy}{\iint_{(D)} dxdy}, \quad \beta = \frac{\iint_{(D)} ydxdy}{\iint_{(D)} dxdy} \tag{1.40}$$

1.3 Intégrale triples- Applications

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons un corps V limité par une surface S. Soit $F(x,y,z)$ une fonction continue dans V. Partageons (D) en n petits morceaux (D_1), (D_2), (D_3), , (D_n), dans chaque morceaux (D_i) considérons un point arbitraire $p_i(x_i, y_i, z_i)$ (peut importe sa position dans (D_i)). Nous allons reprendre la formule (1.4) mais cette fois-ci de cette manière :

$$H_N = F(x_1; y_1) \times v(D_1) + F(x_2; y_2) \times v(D_2) + .. + F(x_n; y_n) \times v(D_n) \tag{1.41}$$

Où $v(D_i)$ désigne le volume de (D_i).
On admet le résultat suivant :
Sous la condition "$\forall i$: Aire$(D_i) \to 0$" la quantité H_n tend vers une valeur finie s. De plus, s ne dépend ni du mode de découpage de V en petits domaines ni du choix du point $p_i(x_i; y_i, z_i)$ dans (D_i).
Appellation et Notation
La valeur s est appelée intégrale triple de la fonction $F(x, y, z)$ sur le domaine V et on la note par

$$\iiint_V F(x,y,z)dxdydz. \tag{1.42}$$

On écrit :

$$\iiint_V F(x,y,z)dxdydz = s. \tag{1.43}$$

(V) est appelé le domaine d'intégration.

1.3.1 Intégrales triples En coordonnées cartésiennes

Voici les types de domaines de l'espace dont on peut calculer la valeur numérique s

$$V \text{ est régulier} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} V = \{(x,y,z) \text{ tel que } (x,y) \in (D) \text{ et } f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\} \text{ (forme 1)} \\ \quad \text{ou} \\ V = \{(x,y,z) \text{ tel que } (x,z) \in (D') \text{ et } k(x,z) \leq y \leq l(x,z)\} \text{ (forme 2)} \\ \quad \text{ou} \\ V = \{(x,y,z) \text{ tel que } (y,z) \in (D'') \text{ et } h(y,z) \leq x \leq p(y,z)\} \text{ (forme 3)} \end{cases}$$

Où D, D' et D'' sont des domaines réguliers dans les plan (Oxy), (Oxz) et (Oyz), respectivement.
Voici comment calculer la valeur s pour chaque forme .

Si (V) est donné sous la Forme 1, c'est à dire :

$$V = \{(x,y,z) \text{ tel que } a \leq x \leq b,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \text{ et } f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$

alors, voici la règle de calcul

$$\boxed{\iiint_V F(x;y;z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{f(x;y)}^{g(x;y)} F(x;y;z)dz\right) dxdy} \tag{1.44}$$

Où le domaine D désigne le domaine de projection de corps V sur le plan (Oxy).

- **Cas particulier**

Dans le cas $F(x, y, z) = 1$ pour tout $(x, y, z) \in V$, on a la formule calcul de volume

$$\boxed{\text{volume}(V) = \iiint_V dxdydz = \iint_D \left(\int_{f(x;y)}^{g(x;y)} dz\right) dxdy} \tag{1.45}$$

D'autres règles
On peut calculer l'intégrale $\iiint_V F(x; y; z)dxdydz$ autrement :
Si V possède la forme 2, alors :

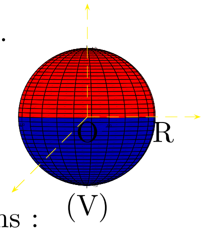
$$\boxed{\iiint_V F(x;y;z)dxdydz = \iint_{D'} \left(\int_{k(x;z)}^{l(x;z)} F(x;y;z)dy\right) dxdz}$$

Où le domaine D' désigne le domaine de projection de corps V sur le plan (Oxz).
Si V possède la forme 3, alors :

$$\boxed{\iiint_V F(x;y;z)dxdydz = \iint_{D''} \left(\int_{h(y;z)}^{p(y;z)} F(x;y;z)dx\right) dydz}$$

Où le domaine D'' désigne le domaine de projection de corps V sur le plan (Oyz).

> **Exemple**
> Calculer le volume du domaine V limité par la sphère S de centre $O(0,0)$ et de rayon R.



La sphère S est définie par l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

le domaine V est régulier car il est limité par deux surfaces S_1 et S_2 définies par les équations :

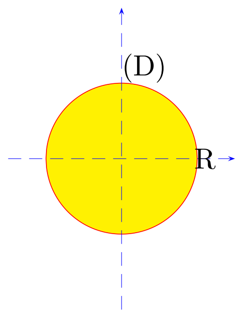
$$\begin{cases} S_1 : \ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \text{(en rouge)} \\ S_2 : \ z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \text{(en bleu)} \end{cases}$$

Le domaine V se caractérise ainsi

$$V = \left\{ (x, y, z) \ \text{ tel que } \ (x, y) \in (D) \text{ et } -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

Où D désigne la projection de V sur le plan (Oxy). Évidement, D désigne le disque de centre $(0,0)$ de rayon R.

$$\text{volume}(V) = \iiint_V dxdydz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dxdy$$



Ce qui donne

$$\text{volume}(V) = \iiint_V dxdydz = \iint_D 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$$

En utilisant les coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$), on obtient :

$$\text{volume}(V) = \iint_D 2r\sqrt{R^2 - r^2} dr d\theta$$

$$\text{volume}(V) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R 2r\sqrt{R^2 - r^2} dr \right) d\theta$$

Calculons l'intégrale entre parenthèse

$$\int_0^R 2r\sqrt{R^2 - r^2} dr = -\int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2) = -\left\{ \frac{2(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right\}_{r=0}^{r=R} = \frac{2R^3}{3}$$

Enfin

$$\boxed{\text{volume}(V) = \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.}$$

1.3.2 Intégrales triples en coordonnées cylindrique

> **Rappel**
> Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Un point quelconques M de l'espace se positionne en coordonnées cartésiennes par $(x; y; z)$, en coordonnées cylindrique par $(r; \theta; z)$ et en coordonnées sphériques par $(r; \theta; \phi)$.
> La relation entre les coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ et les coordonnées cartésiennes $(x; y; z)$
>
> $$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta.$$
>
> La relation entre les coordonnées sphérique $(r; \theta; \phi)$ et les coordonnées cartésiennes $(x; y; z)$
>
> $$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Nous allons transformer l'intégrale $\iiint_V F(x;y;z)dxdydz$ à la forme intégrale triple en coordonnées cylindrique. Pour ce faire on applique la formule (1.44) en posant $x = \phi(r,\theta),\ y = \psi(r,\theta)$. On a

$$dx = (\cos\theta)dr - (r\sin\theta)d\theta,\ dy = (\sin\theta)dr + (r\cos\theta)d\theta \text{ et } dz = dz.$$

En appliquant la formule (1.48)

$$dxdy = rdrd\theta$$

par conséquent

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

Ce qui donne

$$\boxed{\iiint_V F(x;y;z)dxdydz = \iiint_V F(r\cos\theta; r\sin\theta; z)rdrd\theta dz} \tag{1.46}$$

1.3.3 Intégrales triples en coordonnées sphériques

De la même manière

$$\begin{cases} dx = (\cos\theta\sin\phi)dr - (r\sin\theta\sin\phi)d\theta + (r\cos\theta\cos\phi)d\phi \\ dy = (\sin\theta\sin\phi)dr + (r\cos\theta\sin\phi)d\theta + (r\sin\theta\cos\phi)d\phi \\ dz = (\cos\phi)dr - (r\sin\phi)d\phi \end{cases}$$

On applique le même passage effectue entre (1.46) à (1.47) (problème calculatoire). On obtient

$$\boxed{dxdydz = r^2\sin\phi drd\theta d\phi}$$

En fin

$$\boxed{\iiint_V F(x;y;z)dxdydz = \iiint_V F(r\cos\theta\sin\phi; r\sin\theta\sin\phi; r\cos\phi)r^2\sin\phi drd\theta d\phi} \tag{1.47}$$

1.3.4 Changement de variables dans une intégrale triple :Cas général

Soit $f(x,y,z)$ une fonction de trois variables. La différentielle de f, notée df est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Soit (V) un domaines régulier. Notre but, consiste à transformer une intégrale triple

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \text{ (Dans le système de coordonnées (x,y,z))}$$

En une intégrale double de la forme

$$\iint_{(V')} g(u,v,w)dudvdw \text{ (Dans le système de coordonnées } (u,v,w))$$

En effet, considérons une transformation ponctuelle T qui transforme le domaine (V)(dans le système de coordonnées (x,y,z)) en un domaine (V') de même nature que (V) c'est à dire régulier (dans un système de coordonnées (u,v,w). On représente cette transformation, (T), comme suit :

$$T\colon (x,y,z) \in (V) \mapsto T(x,y,z) = (u,v,w) \in (V') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \phi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \eta(u,v,w) \end{cases}$$

Avec (T) doit être bijective, be-continue et les dérivées partielles de ϕ, ψ et η existent et continues sur (V').

Les variables x, y, z sont des fonctions de trois variables u, v et w, leurs différentielles dx, dy et dz sont données comme suit :

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv + \frac{\partial \phi}{\partial w}dw = d\phi \\ , dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv + \frac{\partial \psi}{\partial w}dw = d\psi \\ dz = \frac{\partial \eta}{\partial u}du + \frac{\partial \eta}{\partial v}dv + \frac{\partial \eta}{\partial w}dw = d\eta \end{cases} \tag{1.48}$$

La quantité $\Delta x \Delta y \Delta z$ désigne un volume élémentaire. On calcul le produit $\Delta x \Delta y \Delta z$ en négligeant toutes quantités multipliée par l'un des facteurs $d\phi, d\psi, \eta$, on obtient :

$$\boxed{\iiint_V F(x; y; z)dxdydz = \iiint_{V'} F(\phi(u, v, w), \psi(u, v, w), \eta(u, v, w)) \left|J\right| dudvdw.} \tag{1.49}$$

Où J appelé le jacobien. Défini par le déterminant suivant :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial w} \end{vmatrix}$$

1.3.5 Moment d'inertie d'un corps matériel de l'espace

Toutes les lois du moment d'inertie en dimension 2 restent inchangées dans la dimension 3.
Moment d'inertie par rapport aux axes des coordonnées.
Soit V un corps de densité volumique $\rho(x, y, z)$. Le moment d'inertie de corps (V) par rapport à l'axe (Ox) est donné par

$$\boxed{I_{xx} = \iint_{(V)} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz} \tag{1.50}$$

Le moment d'inertie de corps (V) par rapport à l'axe (Oy) est donné par

$$\boxed{I_{xx} = \iint_{(V)} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz}. \tag{1.51}$$

Le moment d'inertie de corps (V) par rapport à l'axe (Oz) est donné par

$$\boxed{I_{xx} = \iint_{(V)} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz}. \tag{1.52}$$

Moment d'inertie par rapport à l'origine des coordonnées des coordonnées

$$\boxed{I_O = \iint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz}. \tag{1.53}$$

1.3.6 Coordonnées du centre de gravité d'un corps maternel de l'espace

Soit (V) un corps matériel de l'espace de densité volumique $\rho(x, y, z)$. On note les coordonnées du centre de gravité de V par α, β, δ où

$$\alpha = \frac{\iiint_{(V)} x\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z)dxdydz}, \beta = \frac{\iiint_{(V)} y\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z)dxdydz}, \delta = \frac{\iiint_{(V)} z\rho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z)dxdydz} \tag{1.54}$$