Université A/MIRA de Béjaia	Année : 2017-2018
Faculté : ST	TD de Maths 3 : Série №1.
Départements : G.C, ELN et ELT.	

Exercice №1 : Schématiser les domaines d'intégration puis calculer les suivantes :

1) $\displaystyle\iint_{D_1} ye^{x+y}dxdy$, où $D_1 = \left\{(x,y) \text{ tel que } 0 \le x \le \sqrt{2} \text{ et } x^2 \le y \le \sqrt{2}x\right\}$.

2) $\displaystyle\iint_{D_2} y\sin(x+y)dxdy$, où $D_2 = \left\{(x,y) \text{ tel que } 0 \le y \le 2 \text{ et } \sqrt{y} \le x \le \sqrt{6-y^2}\right\}$.

3) $\displaystyle\iint_{D_3} e^{y^2+y+x}dxdy$, $D_3 = \left\{(x,y) \text{ tel que } -4 \le x \le 0 \text{ et } \sqrt{-x} \le y \le \sqrt{5-x}\right\}$.

4) $\displaystyle\iint_{D} (x-y)dxdy$, où $D = \left\{(x,y) \text{ tel que } -1 \le x^2+y^2 \le 4 \text{ et } 0 \le y \le 1\right\}$.

Exercice №2 :

1)Calculer l'aire de la figure délimitée par la parabole $y = -x^2$ et la droite $y = -3x$.

2)Calculer l'aire de la partie délimitée par les cercles $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$ et les droites $y = x$, $y = \sqrt{3}x$.

3)Calculer l'aire de la figure délimitée par les courbes : $|x|+|y| = 2$, $|x|-|y| = 0$.

4) Calculer l'aire de la surface du plan $z = -2$ découpée par le cylindre $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4} = 1$.

5) Calculer l'aire de la partie du cone $x^2+y^2 = z^2$ découpée par le cylindre $x^2+y^2 = 2x$.

Exercice №3 :1)Trouver les coordonnées du centre de gravité de chaque figure :

figure (A)=$\{(x,y) \text{ tel que } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \text{ et } 0 \le y \le \sin x\}$.

La figure (B) est une plaque triangulaire de sommets $A(2,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,1)$.

2) calculer le moment d'inertie de la partie $D = \left\{(x,y) \text{ tq } x^2+\dfrac{y^2}{2} \le 1,\ y \ge 0\right\}$, dans les cas suivants :
a) par rapport à l'axe (OY) ; b) par rapport à l'axe (Ox) ; c) par rapport à l'origine des coordonnées.

Solutions

Exercice№3

On note par $G(x_G,\ y_G)$ le centre de gravité de la figure hachurée (A).

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_{(A)} xdxdy}{\displaystyle\iint_{(A)} dxdy},\ y_G = \frac{\displaystyle\iint_{(A)} ydxdy}{\displaystyle\iint_{(A)} dxdy} \text{...........}(*)$$

$$\iint_{(A)} dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sin x} dy\right]dx = \int_0^{\pi/2}\sin x dx = 1$$

De même

$$\iint_{(A)} xdxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sin x} xdy\right]dx = \int_0^{\pi/2} x\sin x dx = 1.$$

(passer à l'intégration par partie en posant : $u' = \sin x,\ v = x$).

$$x_G = 1$$

$$\iint_{(A)} ydxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sin x} ydy\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

$$y_G = \frac{\pi}{8}$$

. **Coordonnées du centre de gravité de la figure** (B)

On applique la formule (*) sur la figure (B).

La figure (B) est délimitée par le segment $[AC]$ (partie de la droite (AC) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$),

le segment $[BC]$ (partie de la droite (BC) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$) et $[AB]:\ y = 0$.

$$\iint_{(B)} xdxdy = \int_0^1\left[\int_{2y-2}^{-2y+2} xdx\right]dy = \int_0^1 0dy = 0.$$

$$x_G = 0$$

$$\iint_{(B)} dxdy = \text{l'aire du triangle } ABC = \frac{4\times 1}{2} = 2.$$

$$\iint_{(B)} ydxdy = \int_0^1\left[\int_{2y-2}^{-2y+2} ydx\right]dy = \int_0^1(-4y^2+4y)dy = \frac{2}{3}.$$

$$y_G = \frac{\iint_{(B)} ydxdy}{\iint_{(B)} dxdy} = \frac{1}{3}$$

$$G\left(0,\ \frac{1}{3}\right) \quad \text{le centre de gravité de la figure } (B).$$

Moment d'inertie de la figure (D) **par rapport à** $O(0,0)$.

On note par I_O le moment d'inertie en question.

$$I_O = \iint_{(D)}(x^2+y^2)dxdy = \int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{2-2x^2}}(x^2+y^2)dy\right]dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{-1}^1(x^2+2)\sqrt{1-x^2}dx$$

Pour calculer cette intégrale, on pose $x = \sin t$, t varie de $\frac{-\pi}{2}$ à $\frac{-\pi}{2}$, $dx = \cos t dt$.

Ce qui donne

$$I_O = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+2)|\cos t|\cos t dt, \text{ sur } \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ |\cos t| = \cos t$$

$$I_O = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+2)\cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-\cos^2 t)\cos t^2 dt$$

$$I_O = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{8}+\cos 2t - \frac{1}{8}\cos 4t\right)dt = \frac{9\pi}{8}.$$

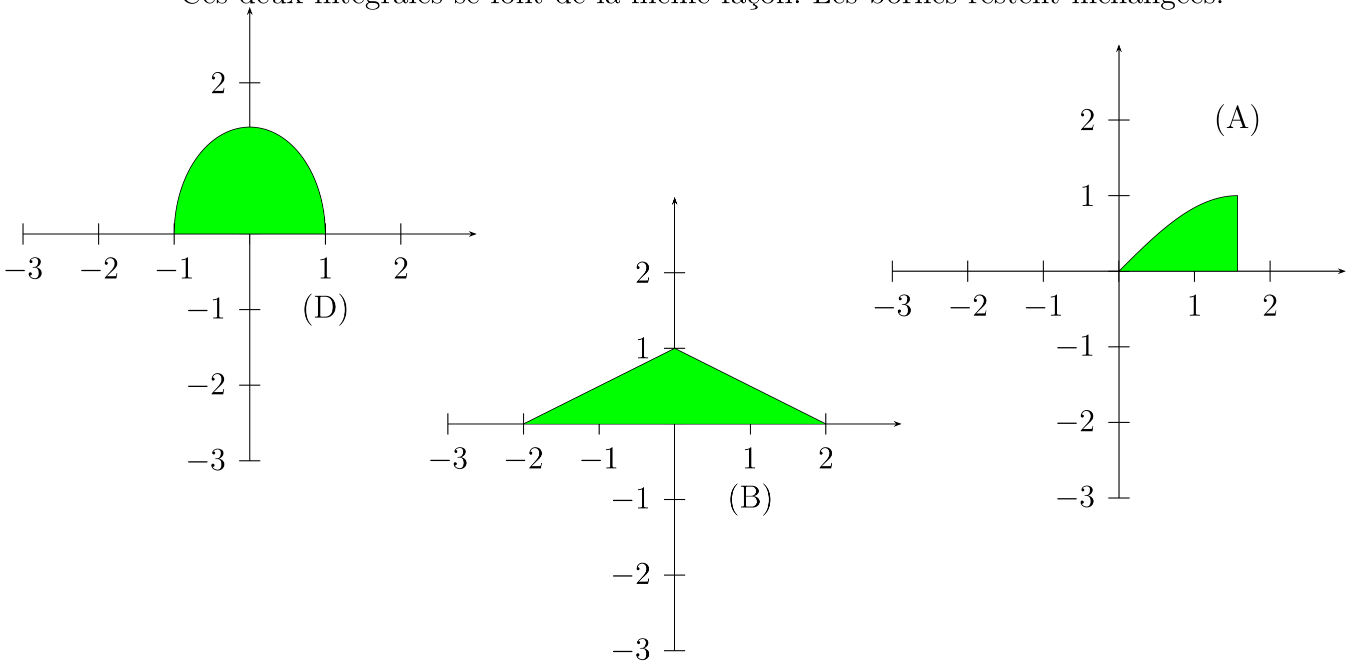
Moment d'inertie de la figure (D) par rapport à l'axe des x.

$$I_x = \iint_{(D)} (y^2)dxdy$$

Moment d'inertie de la figure (D) par rapport à l'axe des y.

$$I_y = \iint_{(D)} (x^2)dxdy$$

Ces deux intégrales se font de la même façon. Les bornes restent inchangées.



Exercice№2 : Solution

5) Calculer l'aire de la partie du cone $x^2 + y^2 = z^2$ découpée par le cylindre $x^2 + y^2 = 2x$.

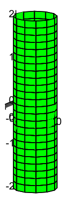


Fig 1

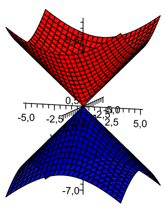


Fig 2

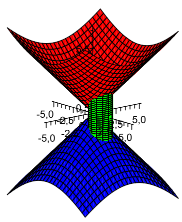


Fig 3

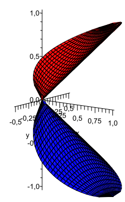


Fig 4

Fig 1 : désigne le cylindre $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
(il suffit de remarquer : $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$).
On peut représenter Ce cylindre comme suit :

$$\left\{(x, y, z) \text{ tq } x^2 + y^2 - 2x = 0 \text{ et } z \text{ quelconque dans } \mathbb{R}\right\}.$$

Fig 2 : désigne le cone $x^2 + y^2 = z^2$.
La partie supérieur, en rouge, est définie par l'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
La partie inférieur, en bleu, est définie par l'équation $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
Fig 3 : Le cylindre de la figure 1 coupe le cone de la figure 2

Fig 4 : les parties (ou les surfaces) du cone découpées par le cylindre.
(Bien sur, ces deux parties se trouvent à l'intérieur du cylindre).
Notre objectif :
Calculons l'aire des surfaces S_1 (en rouge) et S_2 (en bleu) (voir la Fig 4).
Pour calculer l'aire de la surface S_1 il faut d'abord écrire son équation.
Par hypothèse S_1 est définie par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. voici la règle à appliquer :

$$\text{l'aire de } S_1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

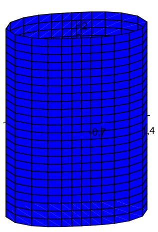
Ici D désigne la projection de S_1 sur le plan (Oxy).
Évidement, D désigne la région délimité par le cercle $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (base du cylindre).
Autrement dit, D désigne le disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 1
On a, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
Par conséquent,

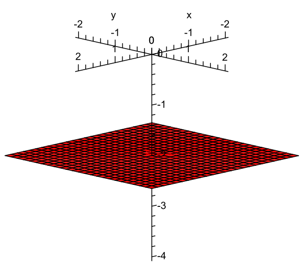
$$\text{l'aire de } S_1 = \iint_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \sqrt{2} \times \text{ (l'aire de } D) = \sqrt{2}\pi.$$

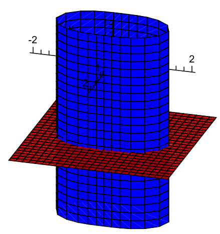
Par symétrie,

$$\text{l'aire de } S_2 = \text{l'aire de } S_1.$$

4) Calculer l'aire de la surface du plan $z = -2$ découpée par le cylindre $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.







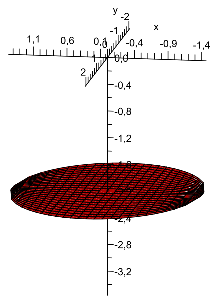


Fig a Fig b Fig c Fig d

Fig a : désigne le cylindre $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
On peut représenter Ce cylindre comme suit :

$$\left\{(x, y, z) \text{ tq } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ et } z \text{ quelconque dans } \mathbb{R}\right\}.$$

Fig b : désigne le cylindre $z = -2$.
Fig c :le cylindre de la figure (a) coupe le plan de la figure (b).
Fig d : la partie (ou la surface) du plan $z = -2$ découpées par le cylindre.
Notre objectif :
Calculons l'aire de la surface S (en rouge) (voir la Fig c).
Pour calculer l'aire de la surface S il faut d'abord écrire son équation.
Par hypothèse, S désigne la portion du plan $z = -2$, donc son équation est $z = -2$. voici

la règle à appliquer :

$$\text{l'aire de } S = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Ici D désigne la projection de S sur le plan (Oxy).
Évidement, D désigne la région délimité par l'ellipse $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (base du cylindre).
On a, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$
Par conséquent,

$$\text{l'aire de } S = \iint_D dxdy = \text{l'aire de } D$$

. La partie hachurée désigne le domaine D.
Pour calculer $\displaystyle\iint_D dxdy$, On passe aux coordonnées polaires en posant :

$$\begin{cases} x = r\sqrt{2}\cos\theta \\ \\ y = 2r\sin\theta \end{cases} \qquad (*)$$

A l'aide de la transformation ponctuelle (*),

D se transforme en disque de centre $(0,0)$ de rayon 1.
je m'y explique,
En coordonnées rectangulaires D se caractérise comme suit :
$D=\left\{(x,y)\ \text{ tq }\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}.$
A l'aide de (*), D se transforme en D_1 :
$D'=\{(r,\theta)\ \text{ tq }\ 0\le r\le 1\}.$
d'où, D_1 désigne le disque de centre $(0,0)$ de rayon 1.
En utilisant le changement de variables (*), on obtient :
$\displaystyle\iint_D dxdy = \iint_{D_1}|J|drd\theta.$
Où $|J|$ désigne le jacobien. défini comme suit :
$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}r\sin\theta\\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta\end{vmatrix}=2\sqrt{2}r$
Donc :
$\displaystyle\iint_D dxdy = 2\sqrt{2}\iint_{D_1} rdrd\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 rdr\right]d\theta = 2\sqrt{2}\pi.$
Enfin,

$$\text{l'aire de } S = \text{l'aire de } D = 2\sqrt{2}\pi.$$