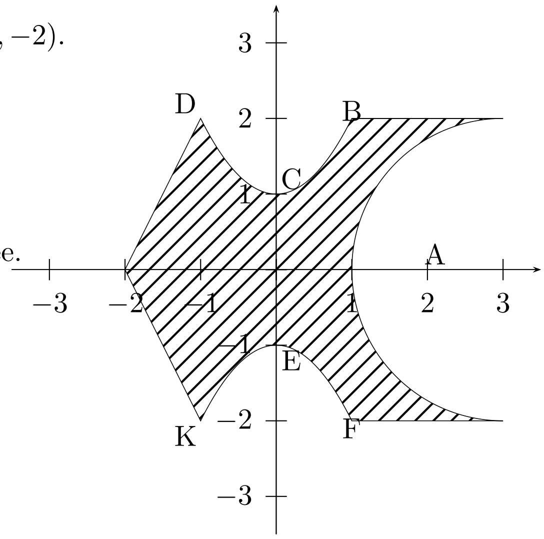
Université A/Mira de Béjaia S_1(2017/2018).
Faculté : ST TD 2 de Maths 3 .

Exercice№1

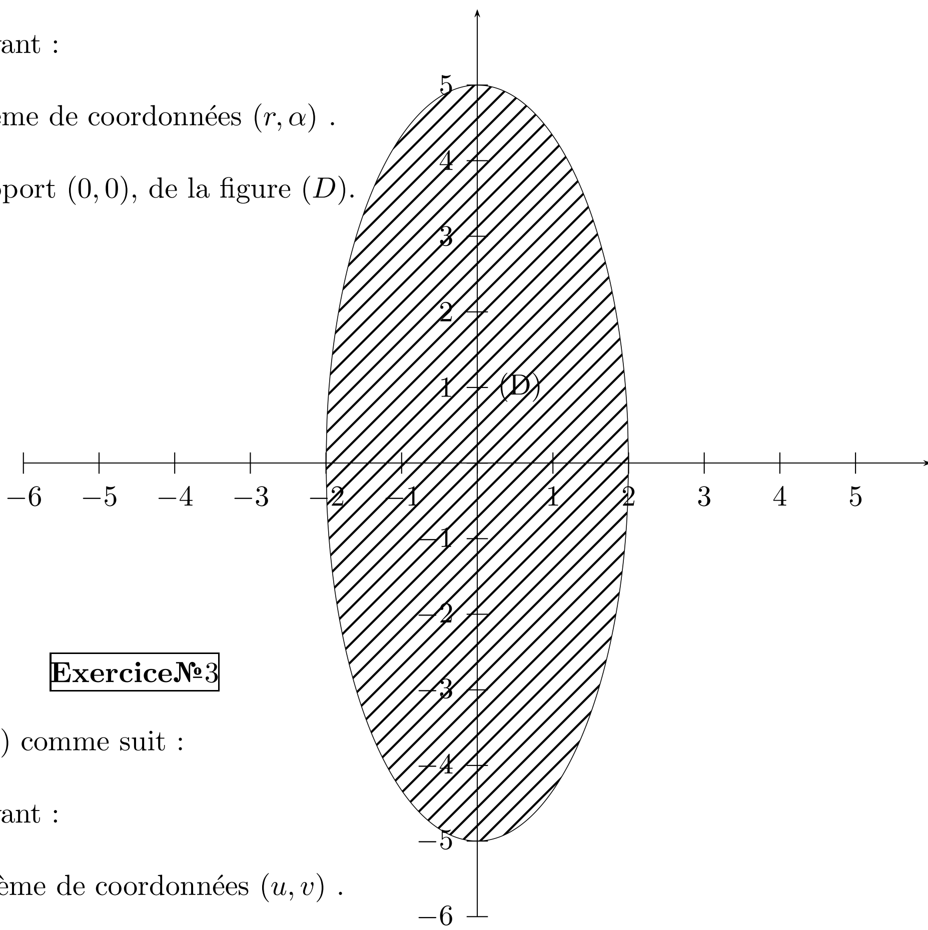
Données :
$A(2,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$, $D(-1,2)$, $E(0,-1)$, $K(-1,-2)$ et $F(1,-2)$.
Les courbes (BCD) et (FEK) définies respectivement par les équations : $y = 1 + x^2$ et $y = -1 - x^2$.
Le demi cercle est défini par l'équation $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

Quetions :
Calculer :
l'aire et les coordonnées du centre de gravité de la partie hachurée.



Exercice№2

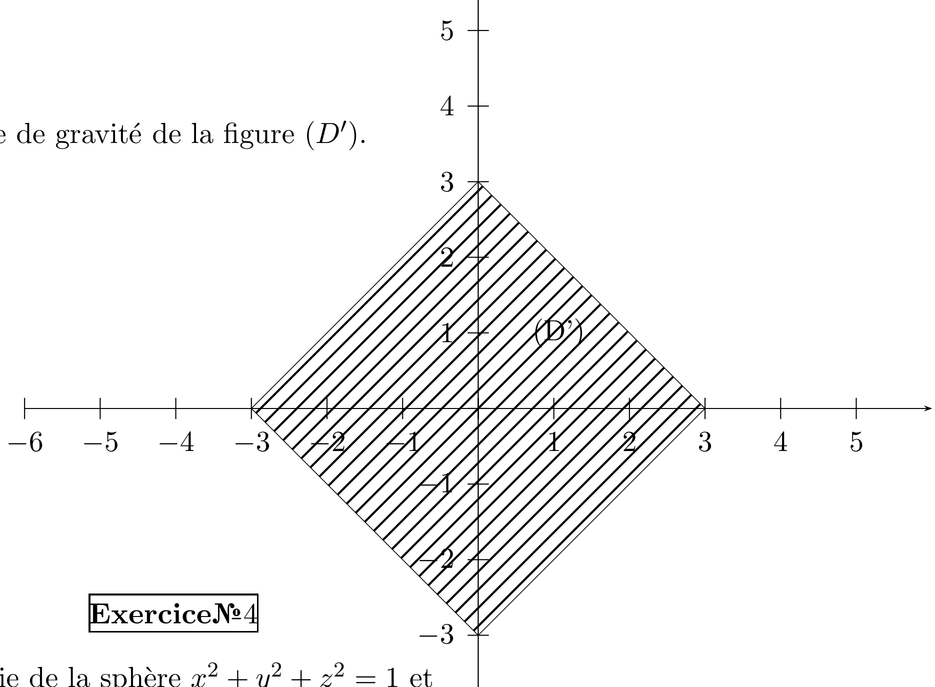
On caractérise le domaine, hachuré, (D) comme suit :
$(D) = \left\{ (x,y) \text{ tel que } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leq 1 \right\}$
A l'aide du changement de variable suivant :
$x = 2r\cos\alpha$ et $y = 5r\sin\alpha$
1) Donner la forme de (D) dans le système de coordonnées (r,α) .
2) Déduire L'aire de (D).
3) Calculer le moment d'inertie, par rapport $(0,0)$, de la figure (D).



Exercice№3

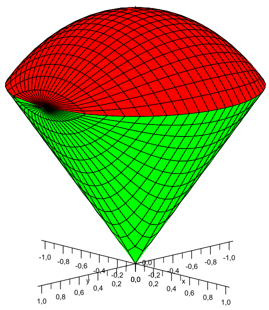
On caractérise le domaine, hachuré, (D') comme suit :
$(D') = \{(x,y) \text{ tel que } |x| + |y| \leq 3\}$
A l'aide du changement de variable suivant :
$x = u + v$ et $y = u - v$
1) Donner la forme de (D') dans le système de coordonnées (u,v) .
2) Déduire L'aire de (D').
Supposons que (D') n'est pas homogène, on donne la densité surfacique $\rho(x,y) = x + y$.

3) Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure (D').



Exercice№4

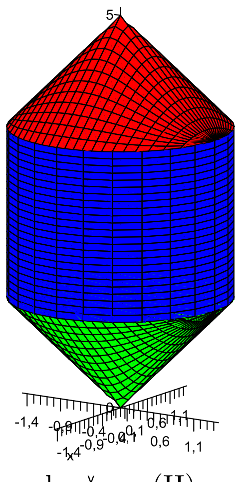
Le corps (V) est délimité par la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et
La partie du cone $z^2 = x^2 + y^2$.
Calculer le volume et les coordonnées du centre de gravité du corps (V).



le corps (V)

Exercice№5

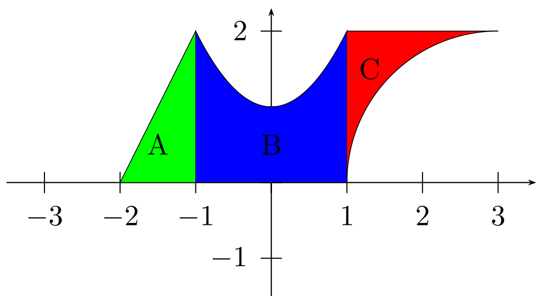
Le corps (H) est délimité par la partie du cone
$x^2 + y^2 = (z-5)^2$,
La surface $\left\{(x,y) \text{ tq } x^2 + y^2 = 2 \ \text{ et } \sqrt{2} \leq z \leq 5 - \sqrt{2}\right\}$
Et la partie du cone $x^2 + y^2 = z^2$.
Calculer le volume du corps (H).



le corps (H)

Solution-exo1

Cette figure possède l'axe des abscisses comme axe de symétrie. Calculons l'aire de la partie supérieure. le domaine ci-dessous n'est pas régulier, pour cette raison, Nous partageons cette partie en trois domaines réguliers : A, B et C.



La partie A (en vert) est délimitée par trois courbes d'équations :

$$y = 0,\ x = -1 \ \text{ et } \ y = 2x+4$$

La partie B (en bleu) est délimitée par quatre courbes d'équations :

$$x = 1,\ x = -1,\ y = 0 \text{ et } \ y = 1 + x^2$$

La partie C (en rouge) est délimitée par trois courbes d'équations :

$$x = 1,\ y = 2 \text{ et } \ y = \sqrt{-5 - x^2 + 6x}$$

Dans chaque cas, les expressions en rouge désignes les bornes de la variable y.
Pour obtenir les bornes de x, vous projetez chaque figure sur l'axe de x.
Ce qu'il faut savoir :

$\boxed{\text{l'aire de la figure hachurée=2(l'aire de A+l'aire de B+l'aire de C)}}$.

l'aire de la figure $A = \displaystyle\iint_A dxdy = \int_{-2}^{-1}\left[\int_0^{2x+4} dy\right] dx$

l'aire de la figure $B = \displaystyle\iint_B dxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{x^2+1} dy\right] dx$

l'aire de la figure $C = \displaystyle\iint_C dxdy = \int_{1}^{3}\left[\int_{\sqrt{-5-x^2+6x}}^{2} dy\right] dx$

Dans chaque cas, vous commencez par calculer l'intégrale par rapport à y puis vous intégrez le résultat obtenu par rapport à x.

Coordonnées du centre de gravité de la partie hachurée.

Soit $G(x_G, y_G)$ le centre de gravité de (H) où (H) désigne la partie hachurée.

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_{(H)} xdxdy}{\displaystyle\iint_{(H)} dxdy} \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint_{(H)} ydxdy}{\displaystyle\iint_{(H)} dxdy}$$

Comme (H) n'est pas régulier, on partage comme suit :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left[\int_{-2x-4}^{2x+4} xdy\right] dx + \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1-x^2}^{x^2+1} xdy\right] dx + \int_{-2}^{2}\left[\int_{1}^{3-\sqrt{4-y^2}} xdx\right] dy}{\text{l'aire de la figure } (H)}.$$

De même

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left[\int_{-2x-4}^{2x+4} ydy\right] dx + \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1-x^2}^{x^2+1} ydy\right] dx + \int_{-2}^{2}\left[\int_{1}^{3-\sqrt{4-y^2}} ydx\right] dy}{\text{l'aire de la figure } (H)}.$$

Il s'agit d'un problème calculatoire.

Solution-exo2

1) La forme de (D) dans le système des coordonnées (r, α).

Par hypothèse, on a $x = 2r\cos\alpha$ et $y = 5r\sin\alpha$. Par conséquent, l'ensemble

$$\left\{(x, y) \text{ tel que } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1\right\}$$

Se transforme en cet ensemble :

$$\{(r, \theta) \text{ tel que } 0 \leq r \leq 1\}$$

Évidement, ce dernier désigne le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
2) **L'aire de** (D) :
On a :

$$\text{l'aire de la figure } (D) = \iint_{(D)} dxdy$$

Avec le changement de variable sus-cité, on en déduit :

$$\text{l'aire de la figure } (D) = \iint_{(D')} |J| dr d\theta$$

Comme $J = 10r$, on obtient :

$$\text{l'aire de la figure } (D) = \iint_{(D')} 10r dr d\theta$$

Bien sur, $(D') = \{(r,\theta) \text{ tel que } 0 \leq r \leq 1\}$ (c-a-d, le disque de centre $(0,0)$ de rayon 1).
Enfin,
$\iint_{(D')} 10r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 10r dr\right] d\theta = 10\pi$. D'où,

$$\text{l'aire de la figure } (D) = 10\pi.$$

le moment d'inertie, par rapport $(0,0)$, de la figure (D).

$$I_{(0,0)} = \iint_{(D)} (x^2+y^2) dxdy$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise le changement de variables $x = 2r\cos\alpha$ et $y = 5r\sin\alpha$.
On obtient :

$$\iint_{(D)} (x^2+y^2) dxdy = \iint_{(D')} r^2 \left(4\cos^2\theta + 25\sin^2\theta\right) |J| dr d\theta.$$

Comme $|J| = 10r$, d'où :

$$\iint_{(D)} (x^2+y^2) dxdy = \iint_{(D')} 10r^3 \left(4\cos^2\theta + 25\sin^2\theta\right) dr d\theta.$$

$$\iint_{(D')} 10r^3 \left(4\cos^2\theta + 25\sin^2\theta\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 10r^3 \left(4\cos^2\theta + 25\sin^2\theta\right) dr\right] d\theta = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \left(21\sin^2\theta + 4\right) d\theta.$$

Indication : appliquer cette formule : $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.

Solution-exo3

$(D') = \{(x,y) \text{ tel que } |x| + |y| \leq 3\}$
A l'aide du changement de variable suivant :
$x = u + v$ et $y = u - v$
1) cherchons la forme de (D') dans le système des coordonnées (u,v) .
on a :
$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ $\quad |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$
Considérons les points suivants :
$A(3,0)$, $B(0,3)$, $C(-3,0)$ et $D(0,-3)$
On peut dire : (D') est délimité par les segments $[AB] : x+y = 3$, $[BC] : -x+y = 3$, $[CD] : -x-y = 3$ et $[DA] : x - y = 3$:
Le domaine (D') peut s'écrire ainsi :

$$D' = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

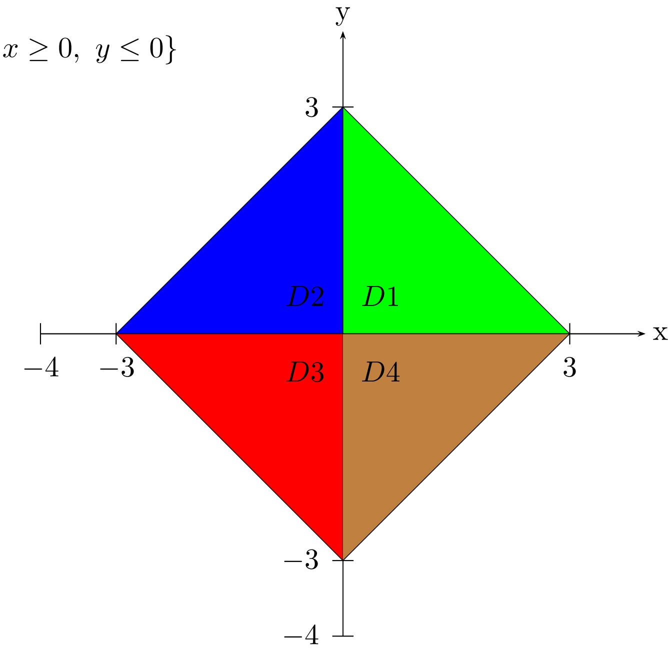
Avec,

$$D_1 = \{(x,y) \text{ tel que } x+y \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \text{ tel que } -x+y \le 3,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \text{ tel que } -x-y \le 3,\ x \le 0,\ y \le 0\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \text{ tel que } x-y \le 3,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$$



A l'aide du changement de variable $x = u+v$ et $y = u-v$
$D_1 = \{(x,y) \text{ tel que } x+y \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$
Se transforme en
$D_1' = \left\{(u,v) \text{ tel que } u \le \dfrac{3}{2},\ u \ge -v,\ u \ge v\right\}$

$D_2 = \{(x,y) \text{ tel que } -x+y \le 3,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$
Se transforme en
$D_2' = \left\{(u,v) \text{ tel que } v \ge \dfrac{-3}{2},\ u \le -v,\ u \ge v\right\}$

$D_3 = \{(x,y) \text{ tel que } -x-y \le 3,\ x \le 0,\ y \le 0\}$
Se transforme en
$D_3' = \left\{(u,v) \text{ tel que } u \ge \dfrac{-3}{2},\ u \le -v,\ u \le v\right\}$.

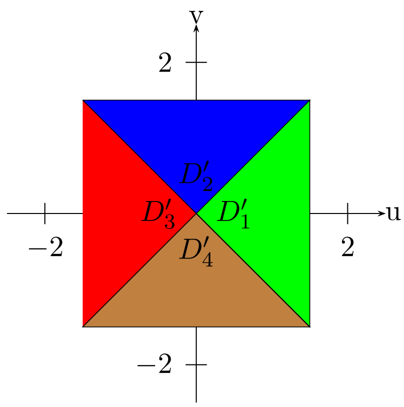
$D_4 = \{(x,y) \text{ tel que } x-y \le 3,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$
Se transforme en
$D_4' = \left\{(u,v) \text{ tel que } v \ge \dfrac{3}{2},\ u \ge -v,\ u \le v\right\}$.

Enfin,

$$D' = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

Se transforme, à l'aide du changement de variable $x = u+v$ et $y = u-v$, en

$$D = D_1' \cup D_2' \cup D_3' \cup D_4'$$



Ce qu'il faut savoir :

$$\boxed{\text{l'aire de la figure } (D') = |J| \times \text{l'aire de la figure } (D)}$$

$$\text{l'aire de la figure } (D') = \iint_{(D')} dxdy = \iint_{(D)} |J| dudv$$

Comme $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, on obtient :

$$\iint_{(D)} |J| dudv = 2 \iint_{(D)} dudv = 2(\text{l'aire de la figure } (D)) = 18.$$

D'où

$$\text{l'aire de la figure } (D') = 18.$$

3)**Coordonnées du centre de gravité de la figure D'.**
Soit $G(x_G, y_G)$ le centre de gravité de (D') .

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_{(D')} xdxdy}{\text{l'aire de la figure } (D')} \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint_{(D')} ydxdy}{\text{l'aire de la figure } (D')}$$

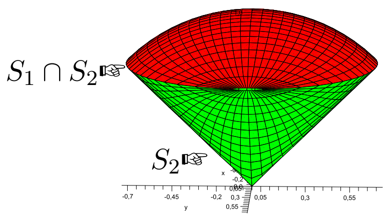
A l'aide du changement de variable $x = u + v$ et $y = u - v$, on obtient :

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_{(D)} 2(u+v)dudv}{\text{l'aire de la figure } (D')} \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint_{(D)} 2(u-v)dudv}{\text{l'aire de la figure } (D')}$$

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{-1.5}^{1.5}\left[\int_{-1.5}^{1.5} 2(u+v)dv\right]du}{18} \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_{-1.5}^{1.5}\left[\int_{-1.5}^{1.5} 2(u+v)dv\right]du}{18}$$

Solution-exo4

Le corps (V) est délimité par la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et
La partie du cone $z^2 = x^2 + y^2$.
Calculons le volume du corps (V).
Le corps (V) est délimité par deux surfaces S_1 et S_2.
La surface S_1 est définie par l'équation $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
La surface S_2 est définie par l'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$\text{Volume du corps} V = \iiint_V dxdydz$$

$$= \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\right] dxdy$$

Le volume du V se ramène à l'intégrale double suivantes :

$$= \iint_D \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy,$$

Où D désigne la projection de V sur le plan (Oxy).
Évidemment, le domaine D est limité par la C, où C désigne la projection de $S_1 \cap S_2$ sur le plan (Oxy).
Cherchons la courbe $S_1 \cap S_2$:
Revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ et \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Ce qui entraine :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

D'où

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

La courbe $S_1 \cap S_2$ désigne le cercle de centre $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tracé dans le plan $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc D désigne le disque de centre $(0, 0)$ de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En utilisant les coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, calculons $\iint_D \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$.

$$\iint_D \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy = \iint_D r\left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) drd\theta$$

$$= \iint_D r\sqrt{1 - r^2} drd\theta - \iint_D r^2 drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\sqrt{1 - r^2} dr\right] d\theta - \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2 dr\right] d\theta$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)-\frac{\sqrt{2}}{12}\right] \simeq 0.19\pi.$$

$$\text{Volume du corps } V = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)-\frac{\sqrt{2}}{12}\right] \simeq 0.19\pi \quad \text{(unité de volume)}.$$

De la même manière nous calculons les Coordonnées du centre de gravité de la figure V.
2)Soit $G(x_G, y_G, z_G)$ le centre de gravité de (V) .

$$x_G = \frac{\iiint_{(V)} xdxdydz}{\text{volume de } V} \quad y_G = \frac{\iiint_{(V)} ydxdydz}{\text{volume de } V} \quad z_G = \frac{\iiint_{(V)} zdxdydz}{\text{volume de } V}$$

$$x_G = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xdz\right] dxdy$$

$$y_G = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} ydz\right] dxdy$$

$$z_G = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\right] dxdy$$

Où D désigne le disque de centre $(0,0)$ de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

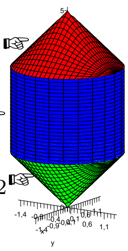
Solution-exo5

Calculons le volume du corps (H).

$z = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$: l'équation de S_1☞

$S_3 = \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2 = 2 \text{ et } \sqrt{2} \le z \le 5-\sqrt{2}\}$☞

$z = \sqrt{x^2+y^2}$: l'équation de S_2☞



$$\text{Volume du corps} H = \iiint_H dxdydz$$
$$= \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5-\sqrt{x^2+y^2}} dz\right] dxdy$$

Le volume du V se ramène à l'intégrale double suivantes :

$$= \iint_D \left(5 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy,$$

Où D désigne la projection de H sur le plan (Oxy).
Évidemment, le domaine D est limité par la C, où C désigne la projection de $S_1 \cap S_3$ sur le plan (Oxy).
Cherchons la courbe $S_1 \cap S_3$:
Revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z = 5 - \sqrt{x^2+y^2} \\ et \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Ce qui entraine :

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$$

D'où

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

La courbe $S_1 \cap S_3$ désigne le cercle de centre $\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$ de rayon $\frac{5}{2}$, tracé dans le plan $z = \frac{5}{2}$.
Donc D désigne le disque de centre $(0, 0)$ de rayon $\frac{5}{2}$.

En utilisant les coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, calculons :

$$\iint_D \left(5 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$$

.

$$\begin{aligned}\iint_D \left(5 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy &= \iint_D r\,(5 - 2r)\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{5}{2}} r\,(5 - 2r)\, dr\right] d\theta = \frac{125\pi}{12}\end{aligned}$$

$$\text{Volume du corps } H = \frac{125\pi}{12} \ \ \text{(unité de volume)} .$$