UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BÉJAIA

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

Cours et Exercices d'Analyse et Algèbre II

Module : Mathématiques II

Conformément au Programme de Première Année LMD

Sciences de Technologie

Rédigé par Dr : Boukoucha Rachid

Année Universitaire : 2016 - 2017

Table des matières

Introduction

Ce cours d'Analyse et Algèbre s'adresse aux étudiants du domaine Sciences et Technique (dans le cadre du système L.M.D). Il couvre le programme officiel du module Mathématiques II qui est consacré au programme du semestre 2 du module Analyse et Algèbre II. On a inclus dans ce cours de nombreux exemples typiques d'applications et on a proposé quelques exercices importants à la fin de chaque chapitre.

Le contenu du cours est inspiré des manuels de mathématiques couramment utilisés, ainsi que du cours que j'ai enseigné de 2011 à 2017 pour les étudiants de première année L.M.D du domaine Sciences de Technologie au sein du Département de Technologie de la Faculté de Technologie.

J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Analyse et Algèbre II qui constituent la base des mathématiques à l'université.

Enfin, des erreurs peuvent être relevées, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr).

Chapitre 1

Matrices et déterminants

1.1 Introduction

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser des problèmes issus de divers domaines : physiques, biologie, mécaniques, chimie,...

Les matrices servent à interpréter en termes de calculs opérationnels les résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent des matrices.

1.2 Généralités sur les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions et notations :

Définition 1.1 *Soient n et p deux entiers positifs.*

Une matrice A de dimension np est une application de $\{1,2,....,n\}\times\{1,2,....,p\}$ dans $\mathbb{k}$.

On note par a_{ij} l'image du couple (i,j) par l'application A.

Alors on écrit A sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$.

Les a_{ij} sont appelés les coefficients (les composantes) de la matrice A.

L'indice i désigne les lignes, l'indice j désigne les colonnes.

n désigne le nombre de lignes de la matrice A et p désigne le nombre de colonnes de la matrice A.

L'élément a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

On note $M_{n,p}(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{k}$, c'est à dire si $A\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ alors A est une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Exemple 1.1 *La matrice A de type $(4,3)$ définie par :* $a_{11}=-1, a_{12}=\sqrt{2}, a_{13}=5, a_{21}=-2, a_{22}=\frac{3}{2}, a_{23}=0, a_{31}=4, a_{32}=1, a_{33}=3, a_{41}=0, a_{42}=6, a_{43}=-4$ *se note par :*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est une matrice de 4 lignes et 3 colonnes.

Egalité de deux matrices :

Soient $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_{np}(K)$.

On dit $A=B$ si et seulement si $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall 1\leq i\leq n, \forall 1\leq j\leq p$.

Transposée d'une matrice :

Définition 1.2 *Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{k})$. On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA$ de $M_{p,n}(\mathbb{k})$ définie par ${}^tA=(a_{ji})$.*

Exemple 1.2

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}, \quad alors \quad {}^tA=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{3}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$.

Propriété :

$\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ on a ${}^t({}^tA)=A$.

Matrices particulières :

Matrice nulle :

Définition 1.3 *On dit $A=(a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ est nulle si et seulement si $a_{ij}=0, \forall 1\leq i\leq n, \forall 1\leq j\leq p$.*

La matrice nulle dans $M_{n,p}(\mathbb{k})$, est noté $0_{M_{n,p}(\mathbb{k})}$.

Exemple 1.3

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice ligne :

Une matrice ne contenant qu'une seule ligne (de dimension $1 \times p$) est appelée matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice colonne :

Une matrice ne contenant qu'une seule colonne (de dimension $n \times 1$) est appelée matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \pi \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Matrice carrée :

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes $(n = p)$ est appelée matrice carrée.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$ se note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ ou plus simplement par $M_n(\mathbb{k})$.

Diagonale d'une matrice carrée :

Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux et on appelle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

diagonale de A.

Exemple 1.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux sont $-1, \frac{3}{2}$ *et* -4, *et la diagonale de* A *est*

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Trace d'une matrice carrée :

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ la somme des coefficients diagonaux et on écrit :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}.$$

Exemple 1.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

alors $Tr(A) = -1 + \frac{3}{2} + (-4) = -\frac{7}{2}$.

1.2.1 Matrices carrés particulières

Matrice diagonale :

La matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice diagonale si : $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Exemple 1.8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

sont des matrices diagonales.

Matrice identité :

La matrice identité d'ordre n est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont égaux à 1 et on la note I_n .

Exemple 1.9

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

Matrices scalaires :

Les matrices de la forme : $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{k}$ sont dites matrices scalaires.

Exemple 1.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\, I_3,$$

sont des matrices scalaires

Matrice triangulaire supérieure :

Définition 1.4 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire supérieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.*

C'est à dire tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire inférieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$.

C'est à dire tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemple 1.11

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A et B sont des matrices triangulaires supérieures.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

C et D sont des matrices triangulaires inférieures.

1.2.2 Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices :

Définition 1.5 *Soient $A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$. On définit la somme de A et B et on note $A + B$ la matrice $A + B = (c_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$ tel que :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall 1 \le i \le n, \forall 1 \le j \le p.$$

Exemple 1.12

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+5 & 1+(-4) & 3+5 \\ 4+7 & 2+3 & 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 11 & 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+(-3) & 3+\frac{5}{2} \\ 4+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 $A \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$ *Impossible car A est de type 2×3 et B est de type 2×2.*

Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Définition 1.6 *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$ et $\lambda \in \Bbbk$, alors*

$$\lambda A = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \;\; 1 \le i \le n, 1 \le j \le p.$$

Exemple 1.13 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{4}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ et λ, μ deux réels. Alors on :

1) $A + B = B + A$ (+ commutative)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (+ associative)
3) $A + 0 = 0 + A = A$ (0 matrice nulle élément neutre)
4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ opposée de A)
5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8) $1 \times A = A$ et $0 \times A = 0$ (ne pas confondre 0 scalaire et 0 matrice nulle).

Remarque 1.2 *Compte tenu des propriétés ci-dessus, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{k})$ muni des deux lois précédentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.*

Produit de deux matrices :

Définition 1.7 *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{p,m}(\mathbb{k})$ (c'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C = A \times B = (c_{ik})$ de $M_{n,m}(K)$ tel que :*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}.$$

Exemple 1.14

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \textit{Impossible.}$$

Remarques importantes :

1. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A \times B$ n'est pas défini.

2. En général, et lorsque le produit est bien défini, on a $A \times B \neq B \times A$, alors on a aussi

$(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$,
$(A - B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB$,
$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

3. Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.

4. L'égalité $A \times B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple 1.15 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ et } B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. L'égalité $A \times B = A \times C$ n'implique pas $B = C$.

Exemple 1.16 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 10 & 20 \end{pmatrix},$$

et

$$AC=\begin{pmatrix}3&6\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&30\\10&20\end{pmatrix}.$$

Remarquons que : $AB=AC$. Mais $B\neq C$.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a

1. $A(B+C)=AB+AC$.

2. $(AB)C=A(BC)$.

3. En général, $AB\neq BA$ (le produit des matrices est une opération qui n'est pas commutative).

Exemple 1.17 *Soient* $A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

On a :

$$AB=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8&-1\\-1&10&1\\0&12&3\end{pmatrix},$$

et

$$BA=\begin{pmatrix}2&1&2\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&25&40\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

$$\begin{pmatrix}-2&8&-1\\-1&10&1\\0&12&3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}10&25&40\\2&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Donc en général, $AB\neq BA$.

1.2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 1.8 *Soit $A\in M_n(\mathbb{k})$, on dit que A est inversible si et seulement si il existe $B\in M_n(\mathbb{k})$ telle que*

$$AB=BA=I_n.$$

Si A est inversible alors B est unique et est appelée inverse de A (notée A^{-1}).

Exemple 1.18 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

On a :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

est l'inverse de A car :

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

et

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$, alors la matrice AB est aussi inversible et*

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 1.2 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$ alors on a :*

1. ${}^{t}(\lambda A+\beta B)=\lambda({}^{t}A)+\beta({}^{t}B)$.
2. ${}^{t}(AB)={}^{t}B\,{}^{t}A$.
3. $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$, ${}^{t}(A^{n})=({}^{t}A)^{n}$.
4. *Si $A\in M_n(\mathbb{k})$ et inversible on a* $({}^{t}A^{-1})=({}^{t}A)^{-1}$.

Matrices symétriques :

Définition 1.9 *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si :*

$${}^{t}A=A.$$

Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple 1.19 *La matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \sqrt{3} & 4 \\ \frac{2}{3} & -2 & 5 & \frac{6}{7} \\ \sqrt{3} & 5 & 3 & -1 \\ 4 & \frac{6}{7} & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

est symétrique.

Matrice antisymétrique :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite antisymétrique si et seulement si : ${}^tA = -A$.

Matrice orthogonale :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite orthogonale si et seulement si : $A\left({}^tA\right) = \left({}^tA\right)A = I_n$.

Propriété :

Si A est une matrice orthogonale, alors A est inversible et $A^{-1} = \left({}^tA\right)$.

Matrices équivalentes :

Soient A, B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles $P \in M_p(\mathbb{k})$ et $Q \in M_n(\mathbb{k})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Matrices semblables :

Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$.

1.3 Matrice associée à une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimension finie, $\dim E = p$, $\dim F = n$, $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E, $B_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F.

Définition 1.10 *On appelle matrice de f par rapport aux bases B_1 et B_2 la matrice $M_{f,B_1,B_2} = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} c_{ij}u_i$ pour $1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$.*

Exemple 1.20 *Soient f une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + 2y - 5z, x - 4y, 2x - 3y + z\right). \end{array}$$

et $B_1 = B_2 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \left(\tfrac{1}{2}, 1, 2\right) = \tfrac{1}{2}e_1 + 1e_2 + 2e_3, \\ f(e_2) &= (2,-4,-3) = 2e_1 + (-4)e_2 + (-3)e_3, \\ f(e_3) &= (-5,0,1) = (-5)e_1 + 0e_2 + 1e_3. \end{aligned}$$

Donc

$$M_{f,B_1,B_2} = \begin{array}{c} \\ e_1 \to \\ e_2 \to \\ e_3 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple 1.21 *Soit* g *une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (x-3y, x+y, 2x-y). \end{array}$$

$B_1 = \{e_1 = (-1,2), e_2 = (1,1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^2$,

$B_2 = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,2,3)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

On a : $g(e_1) = g(-1,2) = (-7,1,0)$.

$$\begin{aligned} (-7,1,0) &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ &= \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,2,3) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \beta+3\gamma). \end{aligned}$$

Par identification on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -7, \\ \alpha + 2\gamma = 1, \\ \beta + 3\gamma = 0, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha,\beta,\gamma) = (-3,-6,2)$.

Donc

$$(-7,1,0) = (-3)(1,1,0) + (-6)(1,0,1) + 2(1,2,3).$$

On a : $g(e_2) = g(1,1) = (-2,2,1)$.

$$\begin{aligned} (-2,2,1) &= \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \\ &= \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,2,3) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \beta+3\gamma). \end{aligned}$$

Par identification on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2, \\ \alpha+2\gamma=2, \\ \beta+3\gamma=1, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha,\beta,\gamma)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{11}{4},\frac{5}{4}\right)$. *Donc*

$$(-2,2,1)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0)+\left(-\frac{11}{4}\right)(1,0,1)+\frac{5}{4}(1,2,3).$$

Alors

$$M_{g,B_1,B_2}=\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ -6 & -\frac{11}{4} \\ 2 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ de dimension n et $f:E\to E$ une application linéaire de E vers E et $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de E. $M\in M_n(\Bbbk)$ la matrice associée à f relativement à la base B de E, alors :*

$$M \text{ est inversible} \iff f \text{ est bijective.}$$

De plus, M^{-1} est la matrice associée à l'application f^{-1} relativement à la base B.

Rang d'une matrice :

Définition 1.11 *Soit $A\in M_{n,p}(\Bbbk)$. On appelle rang de A le nombre maximum de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants et on a $rang(A)\leq$* $\min(n,p)$.

Proposition 1.4 *Soient E,F deux espaces vectoriels sur $\Bbbk$ de dimensions finies et B_1,B_2 des bases de E,F respectivement et soit $f:E\to F$ une application linéaire de E vers F et $M=M_{f,B_1,B_2}$ la matrice associée à f relativement aux bases B_1,B_2, alors rg(f) =rg(M).*

1.4 Matrice de passage, changement de bases

1.4.1 Matrice de passage

Définition 1.12 *Soient E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ de dimension finie n, $B_1=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $B_2=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice de $M_n(K)$ dont les colonnes sont formées des* *composantes des vecteurs de* B_2 *exprimés dans la base* B_1*, on la note* $P = Pass(B_1, B_2)$ *, c'est à dire*

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n, \\ b_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{n2}e_n, \\ \quad .... \\ b_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n, \end{cases}$$

et

$$P = Pass(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.22 *Soient* $E = \mathbb{R}^3$*,*

$$B_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

et

$$B_2 = \{b_1 = (3,2,1), b_2 = (-4,2,3), b_3 = (1,-1,-1)\},$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$*.*

Déterminer $Pass(B_1, B_2)$ *la matrice de passage de la base* B_1 *à la base* B_2 *?*

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$*.*

$$\begin{aligned} b_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \quad &\Rightarrow \quad (3,2,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow \quad (3,2,1) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_1 = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3. \tag{1.1}$$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$

$$\begin{aligned} b_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \quad &\Rightarrow \quad (-4,2,3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow \quad (-4,2,3) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -4, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_2 = -4e_1 + 2e_2 + 3e_3. \tag{1.2}$$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :* $b_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$\begin{aligned} b_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 &\Rightarrow (1,-1,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &\Rightarrow (1,-1,-1) = (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = -1, \\ \gamma = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$b_3 = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3. \tag{1.3}$$

De (1.1), (1.2) *et* (1.3) *on a :*

$$\begin{cases} b_1 = (3)e_1 + (2)e_2 + (1)e_3, \\ b_2 = (-4)e_1 + (2)e_2 + (3)e_3, \\ b_3 = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3. \end{cases}$$

Donc

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{array}{c} \\ e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$

d'où

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de passage de la base B_1 *à la base* B_2.

Propriétés :

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n, B_1, B_2, B_3 trois bases de E, alors :

1. $Pass(B_1, B_3) = Pass(B_1, B_2) \times Pass(B_2, B_3)$.
2. $Pass(B_1, B_1) = I_n$ (matrice identité).
3. $P = Pass(B_1, B_2)$ est inversible et $P^{-1} = Pass(B_2, B_1)$.

1.4.2 Changement de bases

Changement de bases pour un vecteur :

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie n, B_1, B_2 deux bases de E et $P = Pass\,(B_1, B_2)$. Soit $x \in E$ et considérons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les composantes de x dans la base B_1 et $b_1, b_2, ..., b_n$ les composantes de x dans la base B_2. Alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.23 *Soient* $B_1 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}, B_2 = \{b_1 = (1,2), b_2 = (2,1)\}$ *deux bases de* $\mathbb{R}^2$*. On a :*

$$P = Pass\,(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si (x, y) *sont les coordonnées d'un vecteur* X *dans la base* B_1*, les composantes du même vecteur* X *dans la base* B_2 *sont* (γ_1, γ_2) *où :*

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}.$$

Changement de bases pour une applications linéaire :

Cas d'un endomorphisme :

Théorème 1.24 *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *de dimension finie* n*,* $f : E \to E$ *une application linéaire,* B_1, B_2 *deux bases de* E *et* $P = Pass\,(B_1, B_2)$*. Alors :*

$$M_{f,B_2,B_2} = P^{-1} M_{f,B_1,B_1} P,$$

c'est à dire, deux matrices associées à un endomorphisme suivant des bases différentes sont semblables.

Cas général :

Théorème 1.25 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{k}$ *de dimensions finies et* $f : E \to F$ *une application linéaire,* B_1, B_2 *deux bases de* E*,* C_1, C_2 *deux base* *de F et $P = Pass\,(B_1, B_2)$, $Q = Pass\,(C_1, C_2)$ (ou bien $Q^{-1} = Pass\,(C_2, C_1)$). Alors :*

$$M_{f,B_2,C_2} = Q^{-1} M_{f,B_1,C_1} P,$$

c'est à dire, deux matrices associées à une application linéaire suivant des bases différentes sont équivalentes.

1.5 Déterminants

1.5.1 Calcul des déterminants

Définition 1.13 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice carrée de $M_n\,(\mathbb{k})$.*

On appelle déterminant de A développé suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik} \det A_{ik},$$

où A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle déterminant de A développé suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{kj} \det A_{kj}.$$

On utilise également la notation :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque 1.3 *Les déterminants ne concernent que les matrices carrées.*

Le déterminant d'une matrice carrée est unique.

Cas de déterminant d'ordre 2 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2\,(\mathbb{k})\,.$$

Alors
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemple 1.26

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (-4)(-1) = -10,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -7 \\ -\pi & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)(4) - (-\pi)(-7) = 10 - 7\pi.$$

Cas de déterminant d'ordre 3 :
Soit
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{k}).$$

Alors
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Première méthode : Développement suivant la première ligne.

$$\det A = (-1)^{1+1}(a_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(a_{12}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(a_{13}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

Deuxième méthode : Développement suivant la troisième colonne.

$$\det A_{3\times 3} = (-1)^{1+3}(a_{13}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(a_{23}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(a_{33}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Exemple 1.27 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer detA.
Développement la première ligne :

$$detA=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-7)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(8)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(3)(4+2)+(7)(-3-10)+(8)(3-20)=-209.$$

Développement la troisième colonne :

$$detA=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}(8)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(8)(3-20)-(2)(-3+35)+(12-21)=-209.$$

La règle de Sarrus :
Cette règle est valable uniquement pour les matrices carrées d'ordre 3.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Propriétés des déterminants :
Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda\in\mathbb{k}$.
1) $\det I_n=1$.
2) $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.
3) $\det(AB)=\det A\det B$.

4) $\det(A^m) = (\det A)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

5) A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ de plus $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

6) $\det({}^tA) = \det A$.

7) Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne une combinaison linéaires d'autres colonnes.

8) Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes est nulle.

9) Un déterminant est nul si ses colonnes (resp. ses lignes) sont liées.

10) Si A est une matrice triangulaires inférieure ou supérieure, alors $\det A = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

1.5.2 Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant

La formule $AA^{-1} = I_n$ permet de calculer l'inverse A^{-1} de la matrice inversible A. On détermine ici une formule plus performante de calcul de A^{-1}. Cette formule utilise les comatrices.

Définition 1.14 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle cofacteur de la place (i,j) dans A et on note c_{ij} le nombre :*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où : A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Définition 1.15 *On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par :*

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{ni} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

où c_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

Théorème 1.28 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(comA).$$

Exemple 1.29 *Soit la matrice de* $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} *si elle existe.*
On a : $detA = 8 \neq 0$, *donc* A^{-1}*existe.*

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(4) & (-1)^{1+2}\det(2) \\ (-1)^{2+1}\det(-3) & (-1)^{2+2}\det\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$ComA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad {}^t(ComA) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.30 *Soit la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer B^{-1} *si elle existe.*
On a : $detB = 25 \neq 0$, *donc* B^{-1}*existe.*

$$ComB = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

donc

$$ComB = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 7 & -3 & 5 \\ 8 & -7 & -5 \end{pmatrix},$$

d'où

$$^t\left(ComB\right)=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 8\\ 8 & -3 & -7\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Alors

$$B^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-2 & 7 & 8\\ 8 & -3 & -7\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{8}{25}\\ \frac{8}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{7}{25}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

1.6 Exercices

Exercise 1.31 *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & -\sin\alpha\end{pmatrix}.$$

Soit $n\in\mathbb{Z}^*$, déduire A^n en fonction de n .

Exercise 1.32 *Soit A la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2, A^3, A^4 .

b) Soit $n\in\mathbb{Z}^*$, déduire A^n en fonction de n.

Exercise 1.33 *Déterminer le rang des matrices suivantes. Etudier si elles sont inversibles. Si oui calculer l'inverse*

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\ \textit{et}\ D=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.34 *Calculer le déterminant suivant :*

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

a) par la règle de Sarrus.

b) En le développant suivant la première colonne puis la troisième ligne.

c) En faisant apparaître des zéros dans la première ligne.

Exercise 1.35 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer AB, BA, A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$.

2) Calculer $2M$, M^2, $2M - M^2$, *en déduire* M^{-1} .

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Introduction

Les systèmes linéaires interviennent à travers leurs applications dans de nombreux contextes, car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. C'est pourquoi ce cours commence avec une étude des équations linéaires et de leur résolution. Le but de ce chapitre est de résoudre des systèmes linéaires.

2.2 Généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 *On appelle système linéaire de n équations à m inconnues et à coefficients dans $\mathbb{k}$, tout système de la forme :*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ sont appelés les coefficients du système (S).

La matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix},$$

est appelée matrice du système (S).

Le vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système (S).

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelé le vecteur inconnu du système (S).

Alors le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante $MX = B$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Système homogène associé :

A un système (S) on associe un système homogène (S_h) en annulant les secondes membres des équations de système (S).

$$(S_h) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0, \end{cases}$$

alors le système homogène (S_h) s'écrit sous la forme matricielle suivante $MX = 0$.

Un tel système homogène (S_h) possède au moins la solution $(0, 0, \dots, 0)$ dite solution triviale.

Définition 2.2 *Une solutions du système (S) est une liste de m nombre réels $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ (un $m-$uplet) tels que si l'on substitue $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dans le système (S), on obtient une égalité.*

On appelle l'ensemble des solutions du système (S) l'ensemble de tous ces $m-$uplet vérifiant (S).

Définition 2.3 *On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Théorème 2.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit a une seule solution, soit a une infinité de solutions.*

2.3 Les méthodes de résolution d'un système linéaire

2.3.1 Systèmes de Cramer

Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si M est carrée et $\det M \neq 0$. Dans ce cas, (S) admet une unique solution donnée par :

$$x_i = \frac{\det M_{x_i}}{\det M} \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où M_{x_i} est la matrice obtenue de M en remplaçant la colonne i de M par : $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Exemple 2.2 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7, \\ 2x_1 - x_2 = 9. \end{cases}$$

On a :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$\det M = -13 \neq 0$, *donc* (S) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{-13} = -1.$$

Alors la solution unique de système (S) *est* $(x_1, x_2) = (4, -1)$.

Exemple 2.3 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

On a :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\det M = 12 \neq 0$, *donc* (S) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\det M_{x_3}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1}{2}.$$

Alors la solution unique de système (S) *est* $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

2.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Considérons le système linéaire sous la forme matricielle $MX = B$ où M est une matrice carrée, dans le cas où M est inversible, nous pouvons utiliser la matrice pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 2.1 *Si la matrice* M *est inversible, alors la solution du système* $MX = B$ *est unique et est donnée par :*

$$X = M^{-1}B.$$

Exemple 2.4 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ -x + y - 2z = 2, \\ x + y + 3z = 1. \end{cases}$$

Le système (S) *s'écrit sous la forme matricielle* $MX = B$, *avec*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \textit{et}\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

$\det M = -3 \neq 0$, *donc* M *est inversible d'où le système admet une solution unique donnée par :*

$$X = M^{-1}B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{34}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc, $(x, y, z) = \left(-\frac{34}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$ *est la solution unique du système.*

2.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Forme échelonnée :

Définition 2.4 *Nous dirons qu'un système est échelonné s'il se présente sous la forme suivante.*

$$(S_E) \begin{cases} p_1 y_1 + c_{12} y_2 + ... + c_{1j} y_j + ... + c_{1m} y_m = d_1, \\ 0 + p_1 y_2 + ... + c_{2j} y_j + ... + c_{2m} y_m = d_2, \\ ... \\ 0 + ... + 0 + p_r y_r + ... + c_{rm} y_m = d_r, \\ 0 + ... + 0 = d_{r+1}, \\ ... \\ 0 + ... + 0 = d_n. \end{cases}$$

Transformations équivalentes :

L'idée de la méthode de Gauss est de transformer par étapes, le système à résoudre en des systèmes plus simples, tous équivalents au système initial, jusqu'à un système dit « résolu », sur lequel on lit directement la solution. Pour un système linéaire, « plus simple » signifie « avec moins de termes », ou encore

« plus de coefficients nuls » . Pour annuler des termes, la méthode de Gauss combine les trois transformations suivantes changent tout système en un système équivalent :

- échanger deux lignes,

- multiplier une ligne par un réel non nul,

- ajouter une ligne à une autre ligne.

Mettre un système (S) sous forme échelonnée, c'est passer de (S) à (S_E) par les transformations précédentes, et une permutation éventuelle des coordonnées, de sorte que

1. les inconnues $(y_1, ..., y_n)$ de (S_E) sont celles de (S), mais dans un ordre qui peut être différent,

2. les coefficients $p_1, ..., p_r$ sont tous non nuls.

Les coefficients $p_1, ..., p_r$, que l'on appelle les pivots, jouent un rôle important. Pour arriver à la forme échelonnée avec des pivots non nuls on peut être amené au cours des calculs, à

1. permuter des variables.

2. permuter des équations. Le principe général consiste à utiliser une équation à pivot non nul pour annuler les termes au-dessous du pivot dans les équations suivantes du système. Décrire formellement l'algorithme dans le cas général, conduirait à des notations compliquées. Le mieux est de comprendre son fonctionnement sur des exemples. Dans ce qui suit nous utilisons la notation algorithmique , pour « prend la valeur ». A part les permutations éventuelles de variables ou d'équations, les seules transformations utilisées sont du type $L_i \leftarrow L_i + aL_k$, soit « la ligne i est remplacée par la somme de la ligne i, et de la ligne k multipliée par a». Cette transformation change le système en un système équivalent.

Exemple 2.5 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ x - y + z = 3, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2, \\ x - y + z = 3, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_1 - 2L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ 2L_3 + L_1 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 - 5y - 3z = 4. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 + 5L_2 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 + 0 + 2z = -16. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ \frac{1}{2}L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 - L_3 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 + L_2 - 3L_3 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 2x = 30, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{2}L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} x + 0 + 0 = 15, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{array} \right.$$

Le système est maintenant sous la forme résolue, $(15, 4, -8)$ *est la solution unique du système.*

2.4 Exercices

Exercise 2.6 *Résoudre les systèmes suivants :*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2, \\ x - 3y = 1. \end{array} \right. , (S_2) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 5, \\ 4x + 3y - z = 8, \\ 8x + 5y - 3z = 16. \end{array} \right.$$

Exercise 2.7 *Résoudre les systèmes suivants :*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2, \\ 6x - 3y = 1. \end{array} \right. , (S_2) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 2, \\ 4x + y + 2z = 5. \end{array} \right.$$

Exercise 2.8 *Résoudre les systèmes suivants :*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} -3x + y = 6, \\ x - \frac{1}{3}y = -2. \end{array} \right. , (S_2) \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1, \\ 4x - y + 3z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = -2. \end{array} \right.$$

Exercise 2.9 *Résoudre le système suivant :*

$$(S)\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 7, \\ 3x - 9y + 4z = 9, \\ 5x - 8y + 2z = 8, \\ 8x - 7y + z = 12. \end{cases}$$

Exercise 2.10 *Soit λ un paramètre réel .*

Résoudre le système suivant :

$$(S_\lambda)\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Chapitre 3

Intégrales et calcul des primitives

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est purement technique, le but est d'exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales.

Les fonctions de ce chapitre sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

3.2 Les primitives

Définition 3.1 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction,* I *est un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$*. On appelle "primitive" de* f *sur* I *toute fonction* $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable sur* I *telle que :* $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Une primitive d'une fonction f*, représentée par* $\int f(x)\,dx$ *s'appelle aussi une intégrale indéfinie de* f*. L'ensemble de toutes les primitives de* f *s'écrit* $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.1 *La fonction :* $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ *est la primitive de la fonction :* $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ *sur* $\mathbb{R}$,

et toutes les primitives de la fonction : $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont* $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

On écrit :

$$\int \left(3x^2 - 8x + 2\right) dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

La primitive de la fonction : $x \longmapsto \cos 2x$ *est* $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin 2x$ *sur* $\mathbb{R}$ *et toutes les primitives de la fonction :* $x \longmapsto \cos 2x$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont*

$$\int (\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.1 *La primitive d'une fonction n'est pas unique.*

Exemple 3.2 *Soit la fonction* $f(x) = 4x + 3$.

On a :

$$F(x) = 2x^2 + 3x,\ \ G(x) = 2x^2 + 3x + 1,\ \ H(x) = 2x^2 + 3x + 2,\ \ .....$$

sont des primitives de la fonction f *sur* $\mathbb{R}$.

Conclusion 3.3 *Si on connaît une primitive F de f, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c est une constante.*

Propriétés fondamentales :

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1. $\int (f+g)(x)\,dx = F(x) + G(x)\ \forall x \in I.$
2. $\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda F(x)\ \forall x \in I.$
3. $\int (fG + Fg)(x)\,dx = (F.G)(x)\ \forall x \in I.$
4. $\int \left(\frac{fG - Fg}{G^2}\right)(x)\,dx = \left(\frac{F}{G}\right)(x)\ \forall x \in I$,(avec $G(x) \neq 0\ \forall x \in I$).

Primitives des fonctions usuelles :

$\int \lambda dx = \lambda x + c, \lambda \in \mathbb{R},$

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\},$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,$

$\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c, a \neq 0,$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c, a \neq 0,$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, |x| < 1,$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$.

3.3 Techniques de calcul des primitives

3.3.1 Intégration par parties

La première méthode de calcul des primitives est donnée par la formule dite "intégration par parties". Elle est basée sur la formule de dérivation d'un produit.

Proposition 3.1 *Soient $U, V : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors*

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = U(x)\,V(x) - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

Preuve. On a :

$$(U(x)\,V(x))' = U'(x)\,V(x) + U(x)\,V'(x),$$

donc,

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = \int (U(x)\,V(x))'\,dx - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

D'où

$$\int U(x)\,V'(x)\,dx = U(x)\,V(x) - \int U'(x)\,V(x)\,dx.$$

■

Exemple 3.4 *Calculer* $\int xe^x dx.$

Posons :

$$\begin{cases} U(x) = x, \\ V'(x) = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1, \\ V(x) = e^x. \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int 1e^x dx \\ &= (x-1)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2 *La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme* $\int x^k (\sin x)\, dx$, $\int x^k (\cos x)\, dx$, $\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int x^k (\ln x)\, dx$.

3.3.2 Intégration par changement de variable

Voici une seconde méthode de calcul de primitives. Elle s'appuie sur la formule de dérivation d'une fonction composée.

Formules de changement de variable :

Si le calcul de $\int f(x)\, dx$ s'avère difficile, on remplace x par $g(t)$ dérivable et donc $dx = g'(t)\, dt$ et on aura :

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx.$$

Remarque 3.3 *Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.*

Un changement de variable comporte trois étapes :

1- Choisir la fonction $g(t)$ *(c'est la seule partie où il faut faire preuve d'imagination et d'expérience).*

2- écrire $dx = g'(t)\, dt$ *pour préparer le changement de variable.*

3- Appliquer la formule du changement de variable (ne pas oublier de changer les bornes quand il s'agit d'une intégrale définie).

Exemple 3.5 *Calculer* $\int \frac{1}{(x-1)^5}\, dx.$

On pose : $t = x - 1$, *donc* $dt = dx.$

Alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)^5}\,dx &= \int \tfrac{1}{t^5}dt \\ &= \int t^{-5}\,dt \\ &= \tfrac{-1}{4}t^{-4}+c, c\in\mathbb{R} \\ &= \frac{-1}{4(x-1)^4}+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 3.6 *Calculer* $\int \sin^3 x\cos x\ dx$.

On pose : $t=\cos x$, *donc* $dt=-(\sin x)\,dx$, *d'où* $dx=\dfrac{-1}{\sin x}dt$.

Alors

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos x\ dx &= \int\left(\sin^3 x\right)t\ \tfrac{-1}{\sin x}dt \\ &= -\int\left(\sin^2 x\right)t\ dt \\ &= -\int\left(1-\cos^2 x\right)t\ dt \\ &= -\int\left(1-t^2\right)t\ dt \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{4}t^4+c, c\in\mathbb{R} \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x+\tfrac{1}{4}\cos^4 x+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

3.4 Compléments sur le calcul des primitives

1- Intégration des fractions rationnelles :

Une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$, $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où a, b, p, q, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Donc il suffit de connaître les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles.

a) Intégrale du type : $\int P(x)\,dx$.

Dans le cas où P est un polynôme, on intègre terme à terme :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

alors

$$\begin{aligned}\int P(x)\,dx &= \int\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)dx \\ &= \int a_nx^ndx+\int a_{n-1}x^{n-1}dx+...+\int a_1xdx+\int a_0dx \\ &= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+...+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{x+\lambda}dx, \lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{x+\lambda}dx = \ln|x+\lambda| + c, c \in \mathbb{R}.$$

c) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$ et $n > 1$.

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

d) Intégrale du type : $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où a, b, p et $q \in \mathbb{R}$.

Si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β, donc :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{A}{x-\alpha}dx + \int \frac{B}{x-\beta}dx \\ &= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 3.7 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$.

On a :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{1}{2(x+1)}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Si x^2+px+q n'a pas de racines réelles, écrivons :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

En posant : $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$, on obtient :

$$x^2+px+q = (x-\alpha)^2 + \beta^2.$$

On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha = \beta t$ et donc $dx = \beta dt$ et $(x-\alpha)^2+\beta^2 = \beta^2(t^2+1)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \\ &= \int \frac{Mt+N}{t^2+1}dt \\ &= \int \frac{Mt}{t^2+1}dt + \int \frac{N}{t^2+1}dt \\ &= \tfrac{M}{2}\ln(t^2+1) + N\arctan t + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Puis on remplace t *par* $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

Exemple 3.8 *Calculer* $\int \dfrac{x+4}{x^2+2x+5}dx$.

On a :

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

En posant : $x+1=2t$ *(et donc* $dx=2dt$*), on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2t+3}{4\left(t^2+1\right)}2dt \\
&= \int \frac{4t}{4\left(t^2+1\right)}dt+\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{3}{2}\arctan t+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

e) Intégration des fractions rationnelles en : e^x :

On utilise le changement de variable $t=e^x$ et donc : $dt=e^x dx$ où $dx=\frac{1}{t}dt$

Exemple 3.9 *Calculer* $\int \dfrac{dx}{3-2e^x}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3-2e^x} &= \int \frac{dt}{t\left(3-2t\right)} \\
&= \tfrac{1}{3}\int \frac{dt}{t}-\tfrac{1}{3}\int \frac{\left(-2\right)dt}{3-2t} \\
&= \tfrac{1}{3}\ln|t|-\tfrac{1}{3}\ln|3-2t|+c, c\in\mathbb{R} \\
&= \tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{3}\ln|3-2e^x|+c, c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2- Intégrale du type : $\int P\left(x\right)e^{\lambda x}dx$ où P est un polynôme et $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

On peut effectuer des intégrations par parties successives selon le degré de P, mais on doit réserver cette méthode au cas où $\deg P$ est petit. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive $P\left(x\right)e^{\lambda x}$ sous la forme $Q\left(x\right)e^{\lambda x}$, avec $\deg P=\deg Q$.

Exemple 3.10 *Calculer* $\int\left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}dx$.

On sait que : $\int\left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}dx=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$, *et on obtient :* a,b,c *de la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
\left[\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right]' &= \left[-ax^2+\left(2a-b\right)x+b-c\right]e^{-x} \\
&= \left(5x^2+3x-1\right)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 5, \\ 2a - b = 3, \\ b - c = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5, \\ b = 2a - 3, \\ c = b + 1, \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} a = -5, \\ b = -13, \\ c = -12. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int \left(5x^2 + 3x - 1\right) e^{-x} dx = \left(-5x^2 - 13x - 12\right) e^{-x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.11 *Calculer* $\int (x^4 - 1)\, e^{2x} dx$.

On pose : $\int (x^4 - 1)\, e^{2x} dx = Q(x)\, e^{2x}$ *avec* $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda$ *où* a, b, c, d *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned} \left[Q(x)\, e^{2x}\right]' &= \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d\right) e^{2x} + 2\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \lambda\right) e^{2x} \\ &= \left[2ax^4 + (4a + 2b)\, x^3 + (3b + 2c)\, x^2 + (2c + 2d)\, x + (2\lambda + d)\right] e^{2x} \\ &= (x^4 - 1)\, e^{2x}. \end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ 4a + 2b = 0, \\ 3b + 2c = 0, \\ 2c + 2d = 0, \\ 2\lambda + d = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -2a, \\ c = -\frac{3}{2}b, \\ d = -c, \\ \lambda = \frac{-1-d}{2}, \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -1, \\ c = \frac{3}{2}, \\ d = -\frac{3}{2}, \\ \lambda = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Alors

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\int \left(x^4 - 1\right) e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

3- Intégration de certaines fonctions trigonométriques :

a) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$. En effectuant le changement da variable : $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\\
&= 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\\
&= \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{2t}{1+t^2},\\
\cos x &= \cos\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\\
&= \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}\\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}\\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
t=\tan\tfrac{x}{2} \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{x}{2}=\arctan t\\
&\Longrightarrow \quad x = 2\arctan t\\
&\Longrightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt.
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
t=\tan\tfrac{x}{2} \quad &\Rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\\
\sin x \quad &= \quad \frac{2t}{1+t^2},\\
\cos x \quad &= \quad \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\tan x \quad &= \quad \frac{2t}{1-t^2},\\
\cot x \quad &= \quad \frac{1-t^2}{2t}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.12 *Calculer* $\int \frac{1}{\cos x}dx$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{1-t}dt \\
&= \ln|1+t| - \ln|1-t| + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.4 *Le changement de variable* $t = \tan\frac{x}{2}$*, appelé changement de variable universel pour l'intégration des fonctions trigonométriques résout le problème d'intégration de toute expression de la forme* $f(\sin x, \cos x)$ *mais conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable d'utiliser d'autres changements de variables menant plus rapidement au but.*

b) Intégrale de type : $\int \cos^p x \sin^q x dx, p$ **et** $q \in \mathbb{N}$.

Premier cas : p est impair

Soit $p = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^{2k+1} x \sin^q x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^q x \cos x dx.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \sin x$, $(dt = (\cos x)\, dx)$ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int (1-t^2)^k t^q dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 3.13 *Calculer* $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$*.*

On a :

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int (1-t^2)^2 t^2 dt \\
&= \int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt \\
&= \tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{1}{3}t^3 + c, c \in \mathbb{R}. \\
&= \tfrac{1}{7}\sin^7 x - \tfrac{2}{5}\sin^5 x + \tfrac{1}{3}\sin^3 x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : q est impair

Soit $q = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^p x \sin^{2k+1} x dx \\ &= \int \cos^p x \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x dx.\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \cos x$, $(dt = -(\sin x)\, dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $-\int t^p \left(1-t^2\right)^k dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 3.14 *Calculer* $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sin^3 x dx &= \int \cos^6 x \left(1-\cos^2 x\right) \sin x dx \\ &= -\int t^6 \left(1-t^2\right) dt \\ &= \int \left(t^8 - t^6\right) dt \\ &= \tfrac{1}{9} t^9 - \tfrac{1}{7} t^7 + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{1}{9} \cos^9 x - \tfrac{1}{7} \cos^7 x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Troisième cas : Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.

c) Intégrale de type : $\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule suivante :

$$(\cos \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) x + \cos(\alpha-\beta) x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x)\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \cos\left[(\alpha+\beta) x\right] dx + \tfrac{1}{2}\int \cos\left[(\alpha-\beta) x\right] dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)} \sin(\alpha+\beta) x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)} \sin(\alpha-\beta) x + c, c \in \mathbb{R}. \\ & \quad (\text{tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta).\end{aligned}$$

Exemple 3.15 *Calculer* $\int (\cos 5x)(\cos x)\, dx$.

On a :

$$\begin{aligned}\int (\cos 5x)(\cos x)\, dx &= \tfrac{1}{2}\int (\cos 6x)\, dx + \tfrac{1}{2}\int (\cos 4x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\sin 6x\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\sin 4x\right) + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{1}{12}\sin 6x + \tfrac{1}{8}\sin 4x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) Intégrale de type : $\int (\sin\alpha x)(\cos\beta x)\,dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.
On utilise la formule suivante :

$$(\sin\alpha x)(\cos\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\sin\alpha x)(\cos\beta x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin[(\alpha+\beta)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin[(\alpha-\beta)x]\,dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cos(\alpha-\beta)x + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\text{(tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta).\end{aligned}$$

Exemple 3.16 *Calculer* $\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx$.
On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 4x)(\cos 6x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \sin(10x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int \sin(-2x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{10}\cos 10x\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{-2}\cos(-2x)\right) + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{-1}{20}\cos 10x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Intégrale de type : $\int (\sin\alpha x)(\sin\beta x)\,dx, \alpha$ **et** $\beta \in \mathbb{R}^*$.
On utilise la formule suivante :

$$(\sin\alpha x)(\sin\beta x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int (\sin\alpha x)(\sin\beta x)\,dx &= \tfrac{-1}{2}\int \cos[(\alpha+\beta)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\int \cos[(\alpha-\beta)x]\,dx \\ &= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin(\alpha-\beta)x + c, c \in \mathbb{R}. \\ &\text{(tel que } \alpha \neq \beta \text{ et } \alpha \neq -\beta).\end{aligned}$$

Exemple 3.17 *Calculer* $\int (\sin 3x)(\sin 2x)\,dx$.
On a :

$$\begin{aligned}\int (\sin 3x)(\sin 2x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int [-\cos 5x + \cos x]\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{-1}{5}\sin 5x + \sin x\right] + c, c \in \mathbb{R}. \\ &= \tfrac{-1}{10}\sin 5x + \tfrac{1}{2}\sin x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4- Intégrales des fonctions contenant des radicaux :

Fonction de la forme $f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où f est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle. On suppose que $ad - cb \neq 0$ et $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, dans ce cas le changement de variable adéquat est $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, il permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. Expliquons cela sur un exemple.

Exemple 3.18 *Calculer* $I = \int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x+2}{x}}dx.$

On pose $t = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$, *c'est à dire* $t^2 = \frac{x+2}{x}$ *et par suite* $x = \frac{2}{t^2-1}$ *et* $dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt$. *D'où*

$$I = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2\arctan t + c, c \in \mathbb{R}.$$

puis on remplace t *par* $\sqrt{\frac{x+2}{x}}$.

3.5 Intégrale définie

Proposition 3.2 *Si* F *est une primitive de la fonction continue* f *sur* $[a,b]$, *alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales.

Remarque 3.5 *Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux).*

$\int f(x)\,dx$ *s'appelle une intégrale indéfinie de* f, *c'est une fonction primitive de* f.

$\int_a^b f(x)\,dx$ *s'appelle une intégrale définie de* f, *c'est un nombre réel.*

Remarque 3.6

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Exemple 3.19

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Proposition 3.3 ***(opérations élémentaires)***

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1) $f+g$, fg, λf et $|f|$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

5) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

6) Si $f(x)=0$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

7) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

8) Si $n \leq f(x) \leq m$, $\forall x \in [a,b]$ (tels que $n,m \in \mathbb{R}$), alors $n(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq m(b-a)$.

9) Si $n \leq f(x) \leq m$ et $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ (tels que $n,m \in \mathbb{R}$), alors $n\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq m\int_a^b g(x)\,dx$.

Proposition 3.4 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

3.6 Exercices

Exercise 3.20 *Calculer les intégrales et les primitives suivantes :*

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}dx, \qquad \int_0^3 \frac{x^2+2}{x+1}dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x-3}dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2-4}dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}dx.$$

Exercise 3.21 *Calculer les intégrales et les primitives suivantes :*

$$\int (x^3+2)\,e^x dx, \qquad \int_0^1 (x^3+2)\,e^x dx,$$
$$\int (x\ln x)\,dx, \qquad \int_1^2 (x\ln x)\,dx,$$
$$\int \frac{1}{x\ln x}dx, \qquad \int_2^4 \frac{1}{x\ln x}dx.$$

Exercise 3.22 *Calculer les intégrales et les primitives suivantes :*

$$\begin{array}{ll}
\int \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx, & \int_1^3 \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx, \\
\int (\sin x)^3\, dx, & \int_0^\pi (\sin x)^3\, dx, \\
\int \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx, & \int_0^1 \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.
\end{array}$$

Exercise 3.23 *Soit* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, *on pose :*

$$I_n = \int_0^\pi x\,(\sin x)^n\, dx.$$

a) Trouver une relation entre I_n *et* I_{n-1} *.*

b) Déduire la valeur de I_n *.*

Exercise 3.24 *Soient*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx.$$

a) Calculer $I - J$ *et* $I + J$ *.*

b) Déduire les valeurs de I *et* J *.*

Chapitre 4

Equations différentielles

4.1 Introduction

Les lois de la physique et de la mécanique ainsi que de nombreux phénomènes chimiques, biologiques ou économiques se ramènent à la recherche de fonctions dont les dérivées vérifient certaines relations.

4.2 Généralités

Définition 4.1 *On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue y d'une variable x et ses dérivées de différents ordres*

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

où F est une relations liant x à la fonction y et ses dérivés $y', ..., y^{(k)}$.

*On appelle "**ordre**" de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée, figurant dans l'équation.*

Une telle équation différentielle (4.1) est dite équation différentielle ordinaire (EDO) car la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable.

Exemple 4.1 $y'' + (y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.

$y' + xy + \frac{x}{x+1} = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$x^2y'' + xy' + 2y^4 = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.

$xy''' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 3.

$y''' + 2y^{(8)} = xe^xy'$ *est une équation différentielle d'ordre* 8.

Définition 4.2 *On appelle "solution" (ou intégrale) de l'équation différentielle (4.1) tout couple (I, f) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction f , vérifiant les conditions suivantes :*

1) f est $k-$fois dérivable sur I.

2) $\forall x \in I$, $F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(k)}(x)\right) = 0$.

Si f est une solution de l'équation différentielle (4.1), alors le graphe de f est appelé courbe intégrale de cette équation.

Définition 4.3 *Si la seule solution prolongeant f, est f elle même, on dira alors que f est une "solution maximale".*

Exemple 4.2 $y = e^x$ *est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y = 0$. ($y = e^x$ est une solution maximale).*

Remarque 4.1 *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.*

4.3 Equations différentielles du premier ordre

Définition 4.4 *La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est :*

$$F(x, y, y') = 0,$$

où F est une relations liant x à la fonction y et sa dérivée y'.

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$,où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple 4.3 $xy' + 2y^4 + \ln x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$xy' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$x(y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$y' = xy^3 + \frac{x}{x+1}$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

Problème de Cauchy :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation $y' = f(x, y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0), x_0 \in I$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

4.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Définition 4.5 *On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme :*

$$f(y)\, y' = g(x),$$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

On a : $y' = \dfrac{dy}{dx}$, donc l'équation peut s'écrire aussi comme :

$$f(y)\, dy = g(x)dx.$$

Résolution d'une équations différentielles à variables séparées :

Une telle équation différentielle à variables séparées se résout par calcul de primitives de f et g comme suit :

On a :

$$\begin{array}{rrcl} & f(y)\,y' & = & g(x) \\ \Rightarrow & f(y)\,dy & = & g(x)dx \\ \Rightarrow & \int f(y)\,dy & = & \int g(x)dx \\ \Longrightarrow & F(y) & = & G(x)+c/\ c\in\mathbb{R}. \end{array}$$

où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur J .

Enfin, on va résoudre cette équation (algébrique) : $F(y) = G(x) + c$ de l'inconnu y.

Voici des exemples concrets :

Exemple 4.4 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + e^y = 0. \tag{4.2}$$

On commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{array}{rl} (4.2) \Rightarrow & xy' = -e^y, \\ \Rightarrow & x\dfrac{dy}{dx} = -e^y, \\ \Rightarrow & -e^{-y}dy = \dfrac{1}{x}dx,\ \textit{(en supposant } x\neq 0\textit{)}, \\ \Rightarrow & \displaystyle\int \left(-e^{-y}\right)dy = \int \frac{1}{x}dx, \\ \Rightarrow & e^{-y} = \ln|x| + c/\ c\in\mathbb{R}, \\ \Rightarrow & -y = \ln(\ln|x|+c)\ /\ c\in\mathbb{R}\ \textit{(en supposant } \ln|x|+c>0\textit{)}, \\ \Rightarrow & y(x) = -\ln(\ln|x|+c)\ /\ c\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Alors

$$y(x) = -\ln(\ln|x|+c)\ /\ c\in\mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle (4.2).

Exemple 4.5 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\left(1+x^2\right)y' - xy = 0. \tag{4.3}$$

On a : $y = 0$ *est une solution triviale (évidente) de* (4.3). *On suppose que* $y \neq 0$, *et on commence à séparer les variables :* x *d'un côté et* y *de l'autre côté.*

On a :

$$
\begin{aligned}
(4.3) \quad &\Rightarrow \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy,\\
&\Rightarrow \left(1+x^2\right)dy = xydx,\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2}dx,\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2}dx,\\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c/\ c \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow |y| = e^{\ln\sqrt{1+x^2}+\ln k}/\ k \in \mathbb{R},\ \text{où}\ (c = \ln k),\\
&\Rightarrow |y| = e^{\ln\left(k\sqrt{1+x^2}\right)}/\ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow |y| = k\sqrt{1+x^2}/\ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow y = \pm k\sqrt{1+x^2}/\ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow y = \lambda\sqrt{1+x^2}/\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{où}\ (\lambda = \pm k).
\end{aligned}
$$

Finalement, les solutions de l'équation (4.3) *sont :*

$$y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2}/\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

4.3.2 Equations différentielles homogènes en x et y.

Définition 4.6 *On appelle "équations différentielles homogènes en* x *et* y*" toute équation de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction définie et continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équations différentielles homogènes :

On utilise ce changement d'inconnue $u = \frac{y}{x}$ $(y = xu)$ qui donne $y' = u + xu'$. Par suite on a :

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = f(u), \\ &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u, \ (u' = \frac{du}{dx}), \\ &\Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c / \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On détermine u puis y, on obtient la solution générale grâce à la relation $y = xu$.

Voici des exemples concrets :

Exemple 4.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0. \tag{4.4}$$

Si on suppose que $xy \neq 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} (4.4) \ &\Rightarrow \ y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \\ &\Rightarrow \ y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}, \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$, *en remplace dans* (4.4)

$$\begin{aligned} (4.4) \ &\Rightarrow \ u + xu' = u - \frac{1}{u}, \\ &\Rightarrow \ x\frac{du}{dx} = \frac{-1}{u}, \\ &\Rightarrow \ udu = -\frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \ \int udu = \int -\frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{2}u^2 = -\ln|x| + c / \ c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \ u = \pm\sqrt{-2\ln|x| + 2c} / \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mais : $y = xu$*, d'où*

$$y(x) = \pm x\sqrt{-2\ln|x| + 2c}/\ c \in \mathbb{R}.$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (4.4) *.*

Exemple 4.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$x^2y' - xy + y^2 = 0. \tag{4.5}$$

Si on suppose que $x \neq 0$*, on a :*

$$\begin{aligned}(4.5) \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2},\\ &\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2,\end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$*, on remplace dans* (4.5) *:*

$$\begin{aligned}(4.5) \quad &\Rightarrow \quad u + xu' = u - u^2,\\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = -u^2,\\ &\Rightarrow \quad \frac{-du}{u^2} = \frac{dx}{x},\\ &\Rightarrow \quad \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},\\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{u} = \ln|x| + c/\ c \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow \quad u = \frac{1}{c + \ln|x|}/\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Mais : $y = xu$*, d'où*

$$y(x) = \frac{x}{c + \ln|x|}/\ c \in \mathbb{R}.$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (4.5) *.*

4.3.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 4.7 *On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)\,y + b(x), \tag{4.6}$$

où a et b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)\, y. \tag{4.7}$$

L'équation (4.7) est dite équation différentielle homogène associée à l'équation (4.6) (ou l'équation sans second membre).

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

a) Résolution de l'équation homogène (4.7) :

Soit l'équation (4.7)

$$y' = a(x)\, y.$$

Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = \int a(x)dx + k / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |y| = \exp\left(\int a(x)dx + k\right) / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y_h(x) = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.7).

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 4.1 *La solution générale y de (4.6) est la somme de la solution générale y_h de (4.7) et d'une solution particulière de (4.6).*

$$y = y_p + y_h = y_p + c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.$$

b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a : $y_h(x) = c \exp\left(\int a(x)dx\right) \,/\, c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (4.7) avec c une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right)$, où c est maintenant une fonction de la variable x à déterminer.

On pose :

$$y(x) = c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right),$$

donc

$$y'(x) = c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right)$$

En remplaçant y et y' dans (4.6) on obtient :

$$c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) = a(x)\, c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) = b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right),$$

par conséquent

$$c(x) = \int \left(b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right)\right) dx + \lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (4.6) est

$$y(x) = \left(\int \left(b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right)\right) dx + \lambda\right) \exp\left(\int a(x)dx\right), \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.8 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = 3y + 1 - 2e^x, \tag{4.8}$$

puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^x, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{4.9}$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 3y \tag{4.10}$$

Remarquons que : $y = 0$ *est une solution évidente de* (4.10).

On suppose que $y \neq 0$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} = 3 \quad &\Rightarrow \quad \int \tfrac{dy}{y} = \int 3dx, \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = 3x + k, \;\; k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y = \pm e^k e^{3x}, \; k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y = ce^{3x}, \; c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k).
\end{aligned}$$

Alors

$$y_h(x) = ce^{3x}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.10).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)e^{3x} \Rightarrow y'(x) = c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x}$. *En remplaçant* y *et* y' *dans* (4.8) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x} = 3c(x)e^{3x} + 1 - 2e^x, \\
&\Rightarrow \quad c'(x)e^{3x} = 1 - 2e^x, \\
&\Rightarrow \quad c'(x) = e^{-3x} - 2e^{-2x}, \\
&\Rightarrow \quad c(x) = \tfrac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \left(\frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda\right)e^{3x} = \frac{-1}{3} + e^x + \lambda e^{3x}, \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(x) = \lambda e^{3x} + e^x - \frac{1}{3}, \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.8).

Pour le problème de Cauchy (4.9) *on a :*

$$\begin{aligned}
y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad \lambda + 1 - \tfrac{1}{3} = 2, \\
&\Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + e^x - \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy (4.9).

4.3.4 Equation différentielle de Bernoulli

Définition 4.8 *On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :*

$$y' + a\,(x)\,y + b(x)y^{\alpha} = 0. \tag{4.11}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et a, b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Remarque 4.2 *On sait déjà traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, car (4.11) est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (4.11), on divise par y^{α}

$$(4.11) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)\left(\frac{y}{y^{\alpha}}\right) + b\,(x) = 0,$$

puis on pose : $z = \frac{y}{y^{\alpha}} = y^{1-\alpha}$ comme un changement de variable, et par conséquent : $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$ d'où $y' = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}z'$. En remplaçant y et y' dans (4.11) on obtient :

$$(4.11) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b\,(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

Exemple 4.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + y + x^2y^2 = 0. \tag{4.12}$$

Cette équation (4.12) est de Bernoulli.

$$(4.12) \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) + x = 0, \text{ pour } xy \neq 0$$

En posant $z = \frac{1}{y}$, on aura : $z' = \frac{-1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2z'$. En remplaçant y et y' dans (4.12) on obtient :

$$z' = \frac{1}{x}z + x, \tag{4.13}$$

l'équation (4.13) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

L'équation homogène associée à (4.13) est

$$z' = \frac{1}{x}z. \tag{4.14}$$

Résolution de l'équation (4.14) :

$$\begin{aligned}(4.14) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{z'}{z} = \tfrac{1}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + k,\ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad |z| = e^{\ln|x|+k},\ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad z = \pm e^{k}x,\ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad z = cx,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.14) *.*

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x$, *donc* :$z'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* z *et* z' *dans* (4.13) *, on obtient :*

$$\begin{aligned}(4.13) \quad &\Rightarrow \quad c'(x) = 1, \\ &\Rightarrow \quad c(x) = \int 1dx, \\ &\Rightarrow \quad c(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$z(x) = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.13) *.*

Par conséquent : $z = \frac{1}{y} = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. *C'est à dire :*

$$y(x) = \frac{1}{x(x+\lambda)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (4.12) *.*

4.3.5 Equation de Riccati

Définition 4.9 *On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{4.15}$$

où a, b *et* c *sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_p pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable : $y = y_p + z$, donc $y' = y'_p + z'$, En remplaçant y et y' dans (4.15) on obtient :

$$\begin{array}{lcl} (E) & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)(y_p + z)^2 + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_p z + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x), \\ & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)\left(y_p^2 + 2y_p z + z^2\right) + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ & \Leftrightarrow & \left[y'_p - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right)\right] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2, \\ \text{on a} & : & y'_p - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution } (4.15). \end{array}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

Exemple 4.10 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}. \tag{4.16}$$

(Indication : $y_p = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (4.16)).

On a : (4.16) est une équation différentielle de Riccati. Donc on pose le changement de variable : $y = \frac{1}{x} + z$, alors : $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$, En remplaçant y et y' dans (4.16) on obtient :

$$\begin{array}{lcl} (4.16) & \Leftrightarrow & -\frac{1}{x^2} + z' = -\left(\frac{1}{x} + z\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + z\right) - \frac{1}{x^2}, \\ & \Leftrightarrow & z' + \frac{1}{x}z + z^2 = 0, \end{array}$$

d'où

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0, \tag{4.17}$$

l'équation (4.17) est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

En posant $u = \frac{1}{z}$, on aura $u' = \frac{-1}{z^2}z'$, d'où $z' = -z^2u'$. En remplaçant z et z' dans (4.17) on obtient :

$$\begin{array}{lcl} (4.17) & \Leftrightarrow & \frac{-z^2u'}{z^2} + \frac{1}{x}u + 1 = 0, \\ & \Leftrightarrow & -u' + \frac{1}{x}u + 1 = 0, \end{array}$$

d'où

$$u' = \frac{1}{x}u + 1, \tag{4.18}$$

l'équation (4.18) *est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue* u.

L'équation homogène associée à (4.18) *est*

$$u' = \frac{1}{x}u. \tag{4.19}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad &\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}u, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{x}dx, \quad (u' = \frac{du}{x}), \\
&\Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x| + k \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |u| = e^{\ln|x|+k} \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |u| = e^{k}|x| \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad u = cx, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^{k}).
\end{aligned}$$

Alors

$$u(x) = c(x)x, \;\; c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.19).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $u(x) = xc(x)$, *donc :* $u'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* u *et* u' *dans* (4.18) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
(4.18) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)x + c(x) = \tfrac{1}{x}xc(x) + 1, \\
&\Rightarrow \quad c'(x)x = 1, \\
&\Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{1}{x}dx, \\
&\Rightarrow \quad c(x) = \ln|x| + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.18).

On a $u = \frac{1}{z}$, *donc* $z = \frac{1}{u}$, *d'où*

$$z = \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}, \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.17).

Mais $y = \frac{1}{x} + z$, *donc*

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln |x| + \lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (4.16).

4.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on va étudier la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 4.10 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :*

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{4.20}$$

où a, b *sont deux constantes réelles et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4.21}$$

Problème de Cauchy :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \ \text{où } x_0 \in I, \\ y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation (4.20) et aux deux conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y_0' = y'(x_0)$, $x_0 \in I$ consiste à chercher la solution maximale de l'équation (4.20) telle que : $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0)$.

4.4.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

On cherche des solutions du type $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $y = e^{rx}$, alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$ en remplace dans (4.21) on obtient :

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a l'équation suivante :

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{4.22}$$

L'équation (4.22) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (4.20).

Dans l'étude de l'équation caractéristique (4.22) , trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\triangle = a^2 - 4b$.

Premier cas : Si $\triangle > 0$, l'équation (4.22) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de (4.21) est de la forme

$$y_0 = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si $\triangle = 0$, l'équation (4.22) admet une racine réelle double r, alors la solution générale de (4.21) est de la forme

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{rx},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si $\triangle < 0$, l'équation (4.22) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (4.21) est de la forme

$$y_0 = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)\, e^{\alpha x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Exemple 4.11 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{4.23}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$*. Ainsi, la solution générale de* (4.23) *est*

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.12 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \tag{4.24}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 10r + 25 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 5$*. Ainsi, la solution générale de* (4.24) *est*

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{5x}, \;\; A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.13 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = 0 \tag{4.25}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ *et* $r_2 = -3i$*. Ainsi, la solution générale de* (4.25) *est*

$$\begin{aligned} y_0 &= (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{0x}, \\ &= A\cos 3x + B\sin 3x, \;\; A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.4.2 Résolution de l'équation linéaire non homogène

Théorème 4.14 *La solution générale maximale* Y *de l'équation linéaire non homogène* (4.20) *est la somme d'une solution maximale particulière* y_p *de l'équation* (4.20) *et de la solution générale* y *de l'équation homogène associée* (4.21) *c'est à dire :*

$$Y = y + y_p,$$

où y *est la solution générale de l'équation homogène associée* (4.21) ,
et y_p *est une solution particulière de l'équation avec second membre* (4.20).

Recherche de la solution particulière y_p de (4.20)

- Si le second membre est du type $\mathbf{e^{\alpha x}P(x)}$:

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^m e^{\alpha x}Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

• On pose : $y_p = e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 0)$, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique (4.22).

• On pose : $y_p = xe^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique (4.22).

• On pose : $y_p = x^2 e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique (4.22).

Exemple 4.15 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1. \tag{4.26}$$

Puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases} \tag{4.27}$$

On a :

$$(4.26) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0,$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0. \tag{4.28}$$

On a : $\triangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$, *les racines de l'équation* (4.28) *sont :* $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (4.21) *est*

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^{x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (4.26) *:*

On a :
$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}\right)e^{0x}.$$

Comme 0 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (4.28), *donc on cherche la solution particulière de* (4.26) *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{0x} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *alors*
$$y_p'(x) = c + 2bx + 3ax^2,$$

et
$$y_p''(x) = 2b + 6ax.$$

On remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (4.26) *on a :*

$$(4.26) \Rightarrow (2b + 6ax) + \frac{1}{2}\left(c + 2bx + 3ax^2\right) - \frac{3}{2}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}ax^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x^2 + \left(6a + b - \frac{3}{2}c\right)x + \left(2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \\ 6a + b - \frac{3}{2}c = 1, \\ 2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p *de* (4.26) *est*

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}\ , \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (4.26).

Pour le problème de Cauchy (4.27) *on a :*

$$y(0) = 0, \ \textit{d'où} : 3 + A + B = 0,$$

et

$$\begin{aligned} y'(0)=4 \quad &\Rightarrow \quad \left(x^3+x^2+4x+3+Ae^{x}+Be^{-\frac{3}{2}x}\right)'_{x=0}=4,\\ &\Rightarrow \quad \left(3x^2+2x+4+Ae^{x}-\tfrac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}\right)_{x=0}=4,\\ &\Rightarrow \quad 4+A-\tfrac{3}{2}B=4,\\ &\Rightarrow \quad A-\tfrac{3}{2}B=0. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\left\{\begin{array}{l} 3+A+B=0,\\ A-\frac{3}{2}B=0. \end{array}\right. \quad d'où : \quad \left\{\begin{array}{l} A=-\frac{9}{5},\\ B=-\frac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Alors

$$Y(x)=x^3+x^2+4x+3-\frac{9}{5}e^{x}-\frac{6}{5}e^{-\frac{3}{2}x},$$

est la solution de problème du Cauchy (4.27).

Exemple 4.16 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y''-4y'+4y=e^{2x}. \tag{4.29}$$

L'équation homogène associée est

$$y''-4y'+4y=0, \tag{4.30}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2-4r+4=0. \tag{4.31}$$

On a : $\triangle=(-4)^2-4(4)=0$, *la racine double de l'équation* (4.31) *est* $r_1=r_2=2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (4.30) *est*

$$y(x)=(Ax+B)e^{2x}, A \text{ et } B\in\mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de* (4.29) *:*

On a : $f(x)=e^{2x}=1e^{2x}$.

Comme 2 est une racine double de l'équation caractéristique (4.31), *nous devons chercher une solution particulière de l'équation* (4.29) *sous la forme :*

$$y_p(x)=kx^2e^{2x}, k\in\mathbb{R},$$

donc

$$y_p'(x) = \left(2kx^2 + 2kx\right) e^{2x},$$

et

$$y_p''(x) = \left(4kx^2 + 8kx + 2k\right) e^{2x},$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans* (4.29) *on a :*

$$\left(4kx^2 + 8kx + 2k\right) e^{2x} - 4\left(2kx^2 + 2kx\right) e^{2x} + 4\left(kx^2 e^{2x}\right) = e^{2x},$$

on obtient : $2ke^{2x} = e^{2x}$ *d'où* $k = \frac{1}{2}$.

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (4.29) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B) e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (4.29).

Exemple 4.17 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x. \tag{4.32}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0, \tag{4.33}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0. \tag{4.34}$$

On a : $\triangle = (-2)^2 - 4(1) = 0$, *la racine double de l'équation* (4.34) *est* $r_1 = r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (4.33) *est*

$$y(x) = (Ax + B) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (4.32) *:*

On a : $f(x) = (x + 2) e^{1x}$.

Comme 1 *est une racine double de l'équation caractéristique* (4.34) *, nous devons chercher une solution particulière* y_p *de* (4.32) *sous la forme :*

$$y_p(x) = x^2(ax+b)e^x = \left(ax^3+bx^2\right)e^x,$$

où a *et* $b \in \mathbb{R}$.

Donc

$$y_p'(x) = \left(ax^3+(3a+b)x^2+2bx\right)e^x,$$

et

$$y_p''(x) = \left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b\right)e^x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (4.32) *on a :*

$$(4.32) \Rightarrow (6ax+2b)e^x = (x+2)e^x.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6a = 1, \\ 2b = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (4.32) *est*

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3+x^2\right)e^x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x)+y_p(x) \\ &= (Ax+B)e^x + \left(\frac{1}{6}x^3+x^2\right)e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est une solution générale de (4.32).

- **Si le second membre est du type :** $(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Si $f(x) = \mathbf{e}^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- On pose : $y_p = \mathbf{e}^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (4.22) .
- On pose : $y_p = x\mathbf{e}^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique (4.22).

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré n et

$$n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}.$$

Exemple 4.18 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 4y = \cos x. \tag{4.35}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0, \tag{4.36}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0. \tag{4.37}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, *l'équation* (4.37) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 2i, \overline{r} = -2i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (4.36) *est*

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (4.35) *:*

On a : $f(x) = \cos x$

Comme i *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (4.37), *donc on cherche la solution particulière* y_p *de* (4.35) *sous la forme :*

$$y_p(x) = h\cos x + k\sin x, h \text{ et } k \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = -h\sin x + k\cos x,$$

et

$$y_p''(x) = -h\cos x - k\sin x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (4.35) *on a :*

$$\begin{aligned}(4.35) \quad &\Rightarrow \quad (-h\cos x - k\sin x) + 4(h\cos x + k\sin x) = \cos x,\\ &\Rightarrow \quad 3h\cos x + 3k\sin x = \cos x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3h = 1, \\ 3k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{3}, \\ k = 0. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (4.35) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{3}\cos x$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x,\, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (4.35).

Exemple 4.19 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = \sin 3x. \tag{4.38}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 9y = 0, \tag{4.39}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0. \tag{4.40}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(9) = -36 < 0$, *donc l'équation* (4.40) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 3i, \overline{r} = -3i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (4.39) *est*

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x,\, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (4.38) *:*

On a : $f(x) = \sin 3x$.

Comme $3i$ *est une racine de l'équation caractéristique* (4.40), *donc on cherche la solution particulière* y_p *de l'équation* (4.38) *sous la forme :*

$$y_p(x) = x(h\cos 3x + k\sin 3x)e^{0x} = hx\cos 3x + kx\sin 3x,\, h \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y_p'(x) = (3kx + h)\cos 3x + (k - 3hx)\sin 3x,$$

et

$$y_p''(x) = (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (4.38) *on a :*

$$\begin{aligned} (b) \quad &\Rightarrow \quad (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x + 9(hx\cos 3x + kx\sin 3x) = \sin 3x, \\ &\Rightarrow \quad 6k\cos 3x + (-6h)\sin 3x = \sin 3x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{r} 6k = 0, \\ -6h = 1. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = 0, \\ h = \frac{-1}{6}. \end{array} \right.$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (4.38) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{6} x \cos 3x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A \cos 3x + B \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (4.38).

Principe de superposition :

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière y_p est donnée par :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

et y_{p_2} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Exemple 4.20 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \tag{4.41}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \tag{4.42}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{4.43}$$

On a : $\triangle = (-5)^2 - 4(6) = 1$, *les racines de l'équation (4.43) sont :* $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (4.42) *est :*

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (4.41) *:*

D'après le principe de superposition des solutions, pour trouver une solution particulière de l'équation (4.41) *, il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}, \tag{4.44}$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}. \tag{4.45}$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_1} *de l'équation* (4.44) *:*

On a : $f_1(x) = 2e^{3x}$.

Comme 3 *est une racine de multiplicité* 1 *(racine simple) de l'équation caractéristique* (4.43)*, on cherche une solution particulière de l'équation* (4.44) *sous la forme :*

$$y_{p_1}(x) = \lambda x e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y'_{p_1}(x) = \lambda e^{3x} + 3\lambda x e^{3x},$$

et

$$y''_{p_1}(x) = 6\lambda e^{3x} + 9\lambda x e^{3x},$$

on remplace y_{p_1}, y'_{p_1} *et* y''_{p_1} *dans l'équation* (4.44) *, on obtient :*

$$\begin{aligned}(4.44) \quad &\Rightarrow \quad y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \\ &\Rightarrow \quad \lambda e^{3x} = 2e^{3x},\end{aligned}$$

d'où $\lambda = 2$. *Donc la solution particulière de l'équation* (4.44) *est*

$$y_{p_1}(x) = 2xe^{3x}.$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_2} *de l'équation* (4.45) *:*

On a : $f_2(x) = e^{4x}$.

Comme 4 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (4.43)*, on cherche une solution particulière de* (4.45) *sous la forme :*

$$y_{p_2}(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y'_{p_2}(x) = 4ke^{4x} \ ,$$

et

$$y''_{p_2}(x) = 16ke^{4x}$$

on remplace y_{p_2}, y'_{p_2} *et* y''_{p_2} *dans l'équation* (4.45) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(4.45) \ &\Rightarrow \ 16ke^{4x} - 20ke^{4x} + 6ke^{4x} = e^{4x} \\ &\Rightarrow \ 2ke^{4x} = e^{4x}\end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{2}$. *Donc* y_{p_2} *la solution particulière de l'équation* (4.45) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (4.41).

4.5 Exercices

Exercise 4.21 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$xy' - y - 3 = 0.$$

$$yy' - (\sin x - \cos x)\, y = 0.$$

Exercise 4.22 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$x^2y' - xy + y^2 = 0.$$

$$xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

Exercise 4.23 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$xy' - x - y = 0.$$

$$xy' - y - (x+1)\, e^x = 0.$$

Exercise 4.24 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$y' - xy - xy^3 = 0.$$

$$y' - xy - e^x y^2 = 0.$$

Exercise 4.25 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$xy' - y^2 + (2x+1)\, y - x^2 - 2x = 0.$$

avec : $y_p = x$ *est une solution particulière.*

$$y' + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x - \cos x = 0.$$

avec : $y_p = \sin x$ *est une solution particulière.*

Exercise 4.26 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$y'' + 4y' + 3y = 3x^2 + 3.$$

$$y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x)\, e^x.$$

$$y'' + 4y = (\cos 2x)\, e^{3x}.$$

$$4y'' + 4y' + 5y = (\sin x)\, e^{\frac{-1}{2}x}.$$

$$y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x + 4x^3.$$

Exercise 4.27 *Résoudre le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = xe^x, \\ y\,(0) = 1 \ \textit{et} \ y'\,(0) = 2. \end{cases}$$

Chapitre 5

Fonctions de plusieurs variables

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les concepts fondamentaux de l'Analyse des fonctions de plusieurs variables. On va généraliser les notions de limite, dérivabilité et intégrabilité, bien connues dans le cas des fonctions d'une seule variable. Nous rechercherons dans ce chapitre une formalisation mathématique théorique de ces concepts.

5.2 Limite, continuité et dérivées partielles d'une fonction.

5.2.1 Produit scalaire, norme euclidienne et distance dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.1 *Si $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur **produit scalaire** par :*

$$< X, Y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Définition 5.2 *On appelle **norme euclidienne** de X (ou longueur de X)*

$$||X|| =< X, X >^{\frac{1}{2}}= \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on appelle la distance entre deux vecteurs

$$d(X, Y) = ||X - Y||.$$

Théorème 5.1 *La norme vérifie :*
1) $||X|| = 0$ si et seulement si $X = 0$.
2) $||X|| > 0$ si et seulement si $X \neq 0$.
3) $||\lambda X|| = |\lambda| . ||X||$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ (inégalité triangulaire).

Propriété :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad |\|X\| - \|Y\|| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont :
1) $\|X\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.
2) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Définition 5.3 *X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux lorsque :*

$$< X, Y >= 0.$$

Définition 5.4 *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.*

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$: *est appelé la boule ouverte de centre a et de rayon r.*

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$: *est appelé la boule fermée de centre a et de rayon r.*

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| = r\}$: *est appelé la sphère de centre a et de rayon r.*

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si : $\forall X$,$Y \in D$, l'ensemble des réels $\|X - Y\|$ est borné.

Remarque 5.1 *Dans le cas où $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $r = 1$ on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.*

5.2.2 Fonctions de plusieurs variables

Définition 5.5 *Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'appelle fonction de n variables.*

$$\begin{array}{lcl} f: \quad D \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, ..., x_n), \end{array}$$

où D est l'ensemble de définition de f.

$\{f(x)/x \in D\}$ *est appelé l'image de f.*

$\{(x, f(x))/x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *est appelé graphe de f.*

Exemple 5.2 *La fonction f suivante :*

$$\begin{array}{lcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^3 + xy + y^2 + 2}{1 + x^2 + y^2} \end{array}$$

est définie sur $D = \mathbb{R}^2$.

Exemple 5.3 *La fonction g suivante :*

$$\begin{array}{llll} g: & D \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{array}$$

est définie sur le disque $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Définition 5.6 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions :*

$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_2) \text{ et } x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$$

définies sur un intervalles ouvert contenant respectivement a_1 et a_2.

Remarque 5.2 *Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.*

(les notions se généralisent sans difficultés aux espaces de dimensions supérieures à deux).

Limites d'une fonction

Définissons la notion d'une limite d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables. Supposons que la fonction est définie en tout point $M(x,y)$ suffisamment proche de $M_0(a,b)$.

Définition 5.7 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & z = f(x,y), \end{array}$$

où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que f admet la limite L quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$, si $f(x,y)$ est aussi voisin que l'on veut de L dès que le point M est dans un voisinage convenable de M_0. On écrit :

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = L \text{ ou } \lim_{M \to M_0} f(x,y) = L,$$

si pour tout ϵ positif donné il existe un δ positif tel que :

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \text{ si } \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta.$$

Remarque 5.3 *Les propriétés des limites des fonctions de plusieurs variables sont les mêmes que celles des limites des fonctions d'une variable pour les sommes, produits, quotients et composées.*

Fonction continue

Définition 5.8 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y), \end{array}$$

où D_f l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que la fonction f est continue au point $M_0(x_0, y_0)$ si

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ ou } \lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

On dit que la fonction f est continue sur D_f si f est continue en tout point de D_f.

Si f est continue sur D_f, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D_f.

Exemple 5.4 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x + y. \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}^2$ et f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |x + y - x_0 - y_0| \\ &= |(x - x_0) + (y - y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \end{aligned}$$

$|x - x_0|$ tend vers 0 dès que x tend vers x_0 et $|y - y_0|$ tend vers 0 dès que y tend vers y_0.

Exemple 5.5 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = \dfrac{(1 + x^2 + z^2 + y)\sin y}{x^2 + xz + y}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0, y \to 0, z \to 0} f(x, y, z) &= \lim_{x \to 0, y \to 0, z \to 0} \left(\frac{(1 + x^2 + z^2 + y)\sin y}{x^2 + xz + y} \right) \\ &= \lim_{y \to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = 1 \end{aligned}$$

Opérations :

Soient f et g deux fonctions continues en $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$f+g$, $f\,g$, λf, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0, y_0) \neq 0$) sont continues.

De même la composée de fonctions continues est continue.

5.2.3 Dérivées partielles

Définition 5.9 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & z = f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

Supposons la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ définie sur un voisinage de x_0

Si f_x admet une dérivée au point x_0, on dit que cette dérivée est la "dérivée partielle" de f par rapport à x au point (x_0, y_0). On note f'_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée et l'on a :

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

De même, la dérivée de la fonction f_y est la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0), et on la note :

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Si f'_x et f'_y existent au point (x_0, y_0), on dit que f est dérivable au point (x_0, y_0).

On dit que f est de classe C^1 sur D_f si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D_f.

Définition 5.10 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \to & z = f(x,y), \end{array}$$

une fonction des deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On appelle gradient de f en (x_0, y_0), le vecteur noté

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Exemple 5.6 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^3 + xy^2 + y - 3, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Pour déterminer une dérivée partielle de f, il suffit de dériver l'expression de f par rapport à la variable considérée, les autres étant considérées comme des constantes.

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 3x^2 + y^2 & , & \frac{\partial f}{\partial x}(4,5) & = & 73. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2xy + 1 & , & \frac{\partial f}{\partial y}(4,5) & = & 41. \end{array}$$

Exemple 5.7 *Soit*

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & \frac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1) & = & \frac{-1}{2}. \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) & = & \frac{1}{2}. \end{array}$$

5.2.4 Dérivées successives

Définition 5.11 *On définit ensuite les dérivées partielles secondes, si elles existent par dérivation des dérivées premières, on les note :*

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'_{x_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

Dans le cas de deux variables x, y on a :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y). \end{array}$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.

On dit que f est de classe C^k sur D_f si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D_f.

On dit que f est de classe C^∞ sur D_f si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D_f.

Théorème 5.8 ***(Théorème de Schwarz)***

Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Exemple 5.9 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x, y) & & \mapsto & f(x, y) = x^4 y^2, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 y^2) = 12x^2 y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^4 y) = 2x^4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^4 y) = 8x^3 y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 y^2) = 8x^3 y. \end{aligned}$$

5.3 Différentiabilité

Définition 5.12 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x, y) & & \mapsto & f(x, y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On dit que f est différentiable au point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si il existe deux constantes réelles α, λ telles que :

$$\begin{aligned} f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) &= \alpha h_1 + \lambda h_2 + \|(h_1, h_2)\| \, \epsilon(h_1, h_2), \\ \text{avec} \lim_{\|(h_1, h_2)\| \to 0} \epsilon(h_1, h_2) &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 5.10 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y)=x^4+3x^2y, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Plaçons nous au point $(1,-1)$.

$$\begin{aligned} f(1+h_1,-1+h_2)-f(1,-1) &= (1+h_1)^4+3(1+h_1)^2(-1+h_2)-(-2) \\ &= -2h_1+3h_2+\left(6h_1h_2+3h_1^2+4h_1^3+h_1^4+3h_1^2h_2\right) \\ &= -2h_1+3h_2+\|(h_1,h_2)\|\,\epsilon(h_1,h_2). \end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{\|(h_1,h_2)\|\to 0}\epsilon(h_1,h_2)=0$ *où* $\epsilon(h_1,h_2)=\frac{6h_1h_2+3h_1^2+4h_1^3+h_1^4+3h_1^2h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$.

Donc : f est différentiable au point $(1,-1)$ *et sa différentielle est l'application linéaire :*

$$df(1,-1):(h_1,h_2)\rightarrow -2h_1+3h_2$$

On remarque que :

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 4x^3+6xy & , & \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) & = & -2. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 3x^2 & , & \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) & = & 3, \end{array}$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.

Remarque 5.4 *On note la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df:(h_1,h_2)\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2.$$

On note aussi plus simplement :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

5.4 Intégrales doubles

Dans cette section, on donnera uniquement quelques éléments relatifs aux calculs d'intégrales double et triple.

Théorème 5.11 ***(Théorème de Fubini)***

Soient h et k deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, telle que $\forall x \in [a,b] : h(x) \leq k(x)$.

Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } h(x) \leq y \leq k(x)\right\}.$$

Si

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \Omega & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

est une fonction continue, alors f est intégrable sur Ω et on a

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

ce théorème définit l'intégrale double à l'aide de deux intégrales simples.

Remarque 5.5 *Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\int\int_{\Omega} dxdy$ est l'aire de Ω.*

Exemple 5.12 *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2, \end{array}$$

une fonction et $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$ un rectangle.

On va commencer par intégrer cette fonction par rapport à y, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à x, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \int\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy & = & \int_1^2 \left(\int_0^3 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dy\right) dx \\ & = & \int_1^2 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + 2y\right]_0^3\right) dx \\ & = & \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{9}{2}x + 15\right) dx \\ & = & \left[x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 15x\right]_1^2 \\ & = & \frac{115}{4}. \end{array}$$

Ou bien on va commencer par intégrer cette fonction par rapport à x, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à y, on obtient aussi :

$$\begin{array}{rcl} \int\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy & = & \int_0^3 \left(\int_1^2 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dx\right) dy \\ & = & \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + xy^2 + 2x\right]_1^2\right) dy \\ & = & \int_0^3 \left(\frac{3}{2}y + y^2 + \frac{13}{3}\right) dy \\ & = & \left[\frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{13}{3}y\right]_0^3 \\ & = & \frac{115}{4}. \end{array}$$

5.4.1 Changement de variables

Proposition 5.1 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & \Omega \subset V & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction continue sur un compact Ω *inclus dans un ouvert* V *de* $\mathbb{R}^2$ *et soient* D *un compact inclus dans un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\Psi : U \to V$ *est une application bijective et de classe* C^1 *telle que* $\Psi(D) = \Omega$.

On note :

$$(u,v) \to \Psi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

le changement de variables.

Soit $J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ *le jacobien de* Ψ *en un point quelconque de* U.

Alors on a l'égalité :

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv,$$

Passage en coordonnées polaires :

$x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$

La formule s'écrit :

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta.$$

5.5 Intégrales triples

Théorème 5.13 ***(Théorème de Fubini)***

Soient D *un compact de* $\mathbb{R}^2$ *et* h, k *deux applications continues de* D *dans* $\mathbb{R}$. *et*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D, h(x,y) \leq z \leq k(x,y)\right\},$$

un compact de $\mathbb{R}^3$, *et soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \Omega \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

Alors on a :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_{D} \left(\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Remarque 5.6 *(cas particulier)*

Si Ω est défini par :

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, n \leq z \leq m\right\},$$

alors on a :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{n}^{m} \left(\int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz.$$

Exemple 5.14 *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = x^2 + yz, \end{array}$$

une fonction et

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0 \ et \ x + y + 2z \leq 1\right\}.$$

Calculer $\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$ *sur le domaine* Ω .

On a :

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{0}^{1-2z} \left(\int_{0}^{1-x-2z} \left(x^2 + yz\right) dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{0}^{1-2z} \left(-x^3 + \left(1 - \frac{3}{2}z\right) x^2 + \left(2z^2 - z\right) x + \frac{1}{2} z (1 - 2z)^2 \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{12} \right) dz$$

$$= \left[-\frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{12}z \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{96}$$

5.5.1 Changement de variables

Proposition 5.2 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & \Omega \subset V & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & & \mapsto & f(x,y,z), \end{array}$$

une fonction continue sur un compact Ω inclus dans un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ et soient D un compact inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et $\Psi : U \rightarrow V$ est une application bijective et de classe C^1 telle que $\Psi(D) = \Omega$.

On note :

$$(u,v,w) \rightarrow \Psi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)),$$

le changement de variables.

Soit $J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ le jacobien de Ψ en un point quelconque de U.

Alors on a :

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudv.$$

Passage en coordonnées cylindriques :

$x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta, z = z.$

La formule s'écrit :

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho d\rho d\theta dz.$$

Passage en coordonnées sphériques :

$x = \rho\cos\theta\sin\varphi$ et $y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\varphi.$

La formule s'écrit :

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D g(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi,$$

où $g(\rho,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$

5.6 Exercices

Exercise 5.15 *Soient les fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & h(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}. \end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h.

2) Calculer les dérivées partielles de chacune des fonctions f, g et h.

3) Calculer la différentielle de chacune des fonctions sur le domaine de définition f, g et h.

Exercise 5.16 *Soit la fonction f définie comme suit :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & & \mapsto & f(x,y,z) = \dfrac{z-x}{y-x}. \end{array}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et le représenter dans un repère orthonormé.

2) Calculer les dérivées partielle de cette fonction.

3) Calculer la différentielle de f en (x,y,z).

Exercise 5.17 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles de la fonction f en $(0,0)$.

Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle*. Office des publications universitaires, (1986).

[2] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).

[3] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.

[4] J. P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.

[5] M. Mehbali, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[6] J. M. Monier, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5e édition. Dunod, Paris, 2006.