Cours de Structure machine (1ère année MI) - Série de TD N°2 (2014-2015)

Séance de TD n°5 (Semaine du dimanche 09 au jeudi 13 mars 2014)

Exo-1 : Déduire, en utilisant le principe de dualité, une formule à partir de l'égalité a suivante :
$(x+\bar{x}.y)+z = x+y+z$

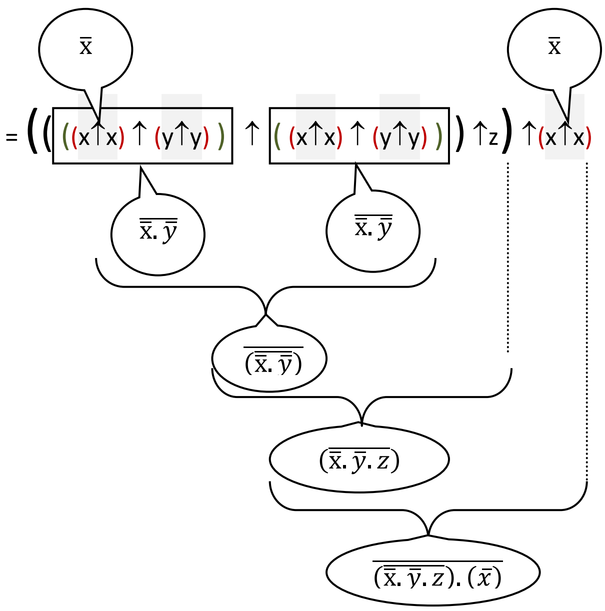
Réponse : $(x+\bar{x}.y)+z = x+y+z$ peut être écrite comme ceci $(x+(\bar{x}.y))+z = x+y+z$
sa formule duale est : $(x.(\bar{x}+y)).z = x.y.z$

Exo-2 : Opérateur NAND
A - Démontrer que l'opérateur NAND n'est pas associatif. Indication : Utilisez le symbole ↑ pour représenter l'opérateur NAND.

Réponse : on se propose de montrer que **(x↑y)↑z** est différent de **x↑(y↑z)**
Il suffit de trouver un contre exemple. Pour (x,y,z)=(0,0,1)
la valeur de (x↑y)↑z = $\overline{\overline{x.y}.z}$ = $\overline{\overline{0.0}.1} = \overline{\bar{0}.1} = \overline{1.1} = \bar{1} = 0$
la valeur de x↑(y↑z) = $\overline{x.\overline{(y.z)}}$ = $\overline{0.\overline{(0.1)}} = \bar{0} = 1$
On voit bien qu'il existe au moins une situation où (x↑y)↑z ≠ x↑(y↑z)

B - soit la fonction $F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x$, exprimez cette fonction uniquement en utilisant l'opérateur NAND.

Réponse : $F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x$
= $\overline{(\overline{\bar{x}.\bar{y}.z + x})}$
= $\overline{(\overline{\bar{x}.\bar{y}.z}).(\bar{x})}$
= $((\bar{x}.\bar{y})$↑z) ↑$\bar{x}$
= $((\overline{\bar{x}.\bar{y}}$↑$\overline{\bar{x}.\bar{y}}))$↑z) ↑$\bar{x}$
= $\overline{(\overline{\bar{x}.\bar{y}.z}).(\bar{x})}$
= $(\overline{\bar{x}.\bar{y}.z})$↑$\bar{x}$
= $(\overline{\overline{\bar{x}.\bar{y}}}$↑z) ↑$\bar{x}$



Attention, cette solution est la plus compliquée. En réalité, en appliquant le théorème d'inhibition, on aurait pu simplifier l'équation de F comme suit :

$$F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\bar{y}.z}$$

Donc il s'agit de trouver une formule à base de NAND équivalent à: $x + \bar{y}.z$

$F(x,y,z) = \bar{y}.z + x$
= $\overline{(\overline{\bar{y}.z + x})}$
= $\overline{(\overline{\bar{y}.z}).(\bar{x})}$

ce qui donne : ((y↑y)) ↑ z) ↑ (x↑x)

Exo-3 Trouver l'équation de la fonction définie par la table de vérité suivante : ⇨
Indication : Rappelez-vous la formule suivante :
F(x,y,z)=$\sum_{i=0}^{7} v_i m_i$ avec *m i* : les mintermes et *vi* les valeurs de vérité de *F* correspondant à chaque terme *mi*.

	x	y	z	F_2(x,y,z)
m_0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	1
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	1
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	1

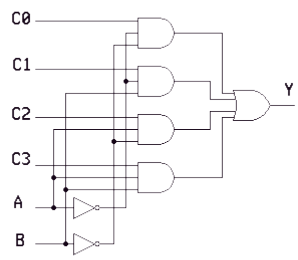
Réponse : *F(x,y,z)*= $m_3 + m_5 + m_6 + m_7$

Je rappel les expressions des minternes:

Mintermes	Termes associés
m_0	$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$
m_1	$\bar{x}.\bar{y}.z$
m_2	$\bar{x}.y.\bar{z}$
m_3	$\bar{x}.y.z$
m_4	$x.\bar{y}.\bar{z}$
m_5	$x.\bar{y}.z$
m_6	$x.y.\bar{z}$
m_7	$x.y.z$

ce qui fait : *F(x,y,z)*= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$

Exo-4 Donnez l'équation de sortie du circuit suivant : ⇨



Réponse : $Y = A.B.C3 + A.\bar{B}.C2 + \bar{A}.B.C1 + \bar{A}.\bar{B}.C0$

Exo-5 Ecrivez sous sa forme canonique disjonctive la fonction suivante : $F_1(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x + z$ puis donnez sa table de vérité.

Réponse : $F_1(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x + z$

$= \bar{x}.\bar{y}.z + x(y+\bar{y}) + (x+\bar{x})z$

$= \bar{x}.\bar{y}.z + xy + x\bar{y} + xz + \bar{x}z$

$= \bar{x}.\bar{y}.z + xy(z+\bar{z}) + x\bar{y}(z+\bar{z}) + xz(y+\bar{y}) + \bar{x}z(y+\bar{y})$

$= \bar{x}.\bar{y}.z + xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

$= \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

$F_1(x,y,z) = m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

Séance de TD n°6 (Dimanche 16 au jeudi 20 mars)

Exo-6 : On définie un opérateur OU exclusif (ou XOR) par la formule suivante: $a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$

A - Trouvez : à quoi correspondent : $0 \oplus x$, $x \oplus 0$ et $x \oplus x$
Que déduisez-vous par rapport à la commutativité et l'idempotence?

Réponse :

$$0 \oplus x = \bar{0}.x + 0.\bar{x} = 1.x = x$$
$$x \oplus 0 = \bar{x}.0 + x.\bar{0} = x.1 = x$$
$$x \oplus x = \bar{x}.x + x.\bar{x} = 0$$

Par rapport à la commutativité on ne peut rien déduire. En effet, on trouve que $0 \oplus x = x \oplus 0$ mais cela ne suffit pas pour dire que l'opérateur ⊕ est commutatif.

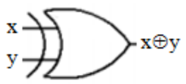
Cela dit si on se réfère à la définition de l'opérateur ⊕. On pourrait facilement démontrer qu'il est commutatif:

$$a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b} = \bar{b}.a + b.\bar{a} = b \oplus a$$

Par contre le fait de trouver que $x \oplus x = 0$ montre clairement que l'opérateur ⊕ n'est pas idempotent!

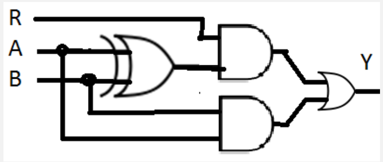
Je rappelle que l'idempotence est la propriété qui fait qu'en composant une variable avec elle même donne la variable. (x *opérateur* x) = x. Par exemple "x.x=x".

B - Voici le symbole représentant le XOR:



Donnez le schéma logique (logigramme) de l'équation suivante: Y = (A ⊕ B).R + A.B

Réponse :



Exo-7: Trois interrupteurs **I_1**, **I_2** et **I_3** commandent l'allumage de 2 lampes **L_1** et **L_2** suivant les conditions suivantes :

- Dès qu'un ou plusieurs interrupteurs sont activés, la lampe L_1 doit s'allumer.
- La lampe L_2 ne doit s'allumer que si au moins 2 interrupteurs sont activés.

A - Donnez la table de vérité des fonctions régissant l'allumage des lampes L_1 et L_2.

Réponse :

Mintermes	I1	I2	I3	L1	L2
m_0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	1	0
m_2	0	1	0	1	0
m_3	0	1	1	1	1
m_4	1	0	0	1	0
m_5	1	0	1	1	1
m_6	1	1	0	1	1
m_7	1	1	1	1	1

B- Déduisez les équations de L1 et L2 (sous forme canonique disjonctive)

Réponse :

$L_1 = m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7$

$$L_1 = \bar{I}_1.\bar{I}_2.I_3 + \bar{I}_1.I_2.\bar{I}_3 + \bar{I}_1.I_2.I_3 + I_1.\bar{I}_2.\bar{I}_3 + I_1.\bar{I}_2.I_3 + I_1.I_2.\bar{I}_3 + I_1.I_2.I_3$$

$L_2 = m_3+m_5+m_6+m_7$

$$L_2 = \bar{I}_1.I_2.I_3 + I_1.\bar{I}_2.I_3 + I_1.I_2.\bar{I}_3 + I_1.I_2.I_3$$

C - Simplifiez ces équations

Réponse : Afin de ne pas surcharger l'écriture, je vais poser $x=I_1$, $y=I_2$ et $z=I_3$

$$L_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.y.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$$
$$L_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.(z+\bar{z}) + x.\bar{y}.(z+\bar{z}) + x.y.(z+\bar{z})$$
$$L_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$$
$$L_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y + x.(\bar{y}+y)$$
$$L_1 = \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y + x = \bar{x}.\bar{y}.z + (x + \bar{x}.y)$$
$$= \bar{x}.\bar{y}.z + x + y = (x + \bar{x}.\bar{y}.z) + y = (x + \bar{y}.z) + y$$
$$= x + (y + \bar{y}z) = x + y + z = I_1.I_2.I_3$$

$L_2 = \overline{I_1}.I_2.I_3 + I_1.\overline{I_2}.I_3 + I_1.I_2.\overline{I_3} + I_1.I_2.I_3$

$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

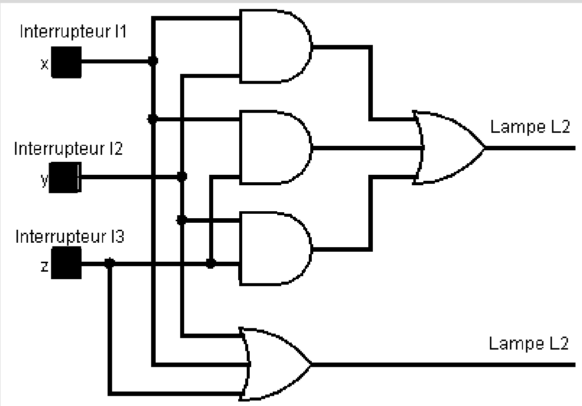
$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy(\bar{z} + z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy =$

$= \bar{x}yz + x(\bar{y}z + y) = \bar{x}yz + x(y + \bar{y}z) = \bar{x}yz + x(y + z)$

$= \bar{x}yz + xy + xz = (xz + \bar{x}yz) + xy = xy + xz + yz$

D - Dessinez le logigramme correspondant à L_1 et L_2.

Réponse :



Exo.8 Donnez des expressions plus simples des fonctions suivantes:

$$F_1 = (x.\bar{y} + z).(x + \bar{y}).z$$
$$F_2 = (a + b + c).(\bar{a} + b + c) + a.b + b.c$$
$$F_3 = \bar{a}.b.c + a.c + (a + b).\bar{c}$$

Réponse :

$$F_1 = (x.\bar{y} + z).(x + \bar{y}).z =$$
$$= (x.\bar{y}z + z.z).(x + \bar{y}) = (x.\bar{y}z + z).(x + \bar{y})$$
$$= (x\bar{y}z + xz + \bar{y}z) = xz(1 + \bar{y}) + \bar{y}z = xz + \bar{y}z$$
$$= (x + \bar{y})z$$

$$F_2 = (a + b + c).(\bar{a} + b + c) + a.b + b.c$$
$$= (a\bar{a} + ab + ac + b\bar{a} + bb + bc + c\bar{a} + cb + cc)$$
$$+ ab + bc$$
$$= ab + ac + \bar{a}b + b + \bar{a}c + c + bc$$
$$= ab + \bar{a}b + ac + \bar{a}c + b + c(1 + b)$$
$$= (a + \bar{a})b + (a + \bar{a})c + b + c = b + c + b + c$$
$$= b + c$$

$F_3 = \bar{a}.b.c + a.c + (a + b).\bar{c}$
$=(a + \bar{a}.b)c + a\bar{c} + b\bar{c} = (a + b)c + a\bar{c} + b\bar{c}$
$= ac + bc + a\bar{c} + b\bar{c} = a(c + \bar{c}) + b(c + \bar{c}) = a + b$

Séance de TD n°7 (dimanche 06 au jeudi 10 avril)

Exo9 Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction F_1 décrite par la table de vérité suivante ⟹

x	y	$F_1(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Réponse :

y x	0	1
0	1	1
1	1	

g1

g2

$g1 = \bar{x}$
$g2 = \bar{y}$

Exo10 Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction F_2 décrite par la table de vérité suivante ⟹

x	y	z	$F_2(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Réponse :

yz x	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

g1

g2

$g1 = \bar{x}\bar{y}$
$g2 = xy$

$F_2(x,y,z) = g1+g2$
$F_2(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + xy$

Exo11 Simplifier par la méthode de Karnaugh les fonctions F_3 et F_4 décrites par les formules suivantes :

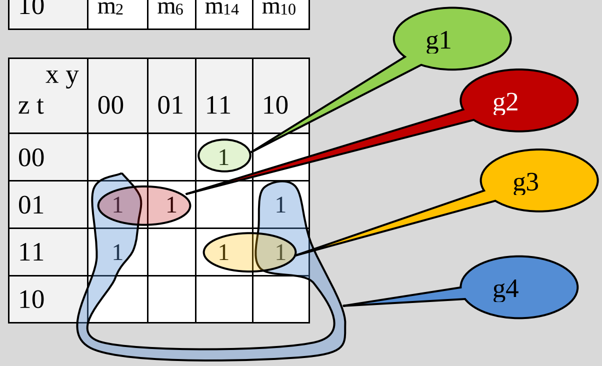
$$F_3(x,y,z,t) = \sum(1,3,5,9,11,12,15)$$

$$F_4(x,y,z,t,u) = \sum(1,3,5,9,12,15,20,21,23,30,31)$$

Réponse :

$$F_3(x,y,z,t) = \sum(1,3,5,9,11,12,15)$$

x y / z t	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

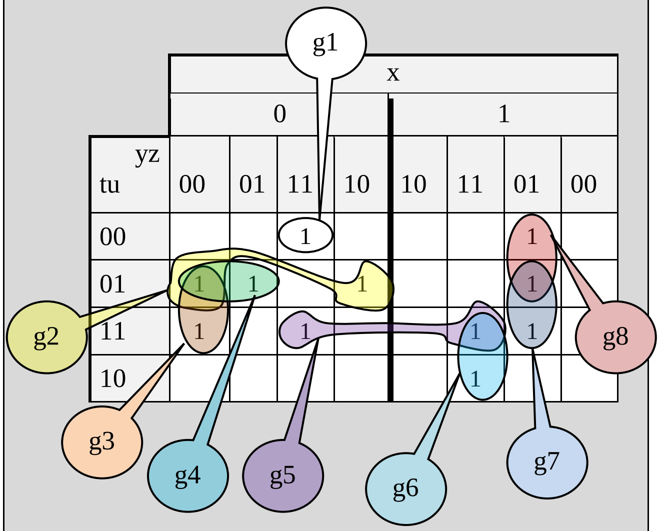


g1 = $xy\bar{z}\bar{t}$
g2 = $\bar{x}\bar{z}t$
g3 = xzt
g4 = $\bar{y}t$

$F_3(x,y,z,t)$ =g1 +g2+g3+g4
$= xy\bar{z}\bar{t}+\bar{x}\bar{z}t+xzt+\bar{y}t$

Réponse :

$$F_4(x,y,z,t,u) = \sum(1,3,5,9,12,15,20,21,23,30,31)$$



g1 = $\bar{x}yz\bar{t}\bar{u}$ g2= $\bar{x}\bar{z}\bar{t}u$ g3 = $\bar{x}\bar{y}\bar{z}u$
g4 = $\bar{x}\bar{y}\bar{t}u$ g5= $yztu$ g6= $xyzt$
g7= $x\bar{y}zu$ g7= $x\bar{y}z\bar{t}$

$$F_4(x,y,z,t,u) = g1 + g2 + g3 + g4 + g5 + g6 + g7 + g8$$
$$= \bar{x}yz\bar{t}\bar{u} + \bar{x}\bar{z}\bar{t}u+\bar{x}\bar{y}\bar{z}u + \bar{x}\bar{y}\bar{t}u+yztu + xyzt+ x\bar{y}zu +x\bar{y}z\bar{t}$$