

UNIVERSITE A. MIRA – BEJAIA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

---

INTRODUCTION A LA  
MECANIQUE DES FLUIDES

Cours

---

**Abdelhakim BENSLIMANE**

---

Docteur en Mécanique des Fluides  
Laboratoire Mécanique, Matériaux et Energétique  
Département de Génie Mécanique- Faculté de Technologie  
Université A. MIRA de Bejaia  
[benslimane.ah@gmail.com](mailto:benslimane.ah@gmail.com) ; [abdelhakim.benslimane@univ-bejaia.dz](mailto:abdelhakim.benslimane@univ-bejaia.dz)



Ce document photocopie correspond aux notes de cours de mécanique des fluides dispensé aux étudiants du premier cycle à l'université de Bejaia. Il constitue une introduction à la mécanique des fluides et l'essentiel de ce qu'un étudiant doit savoir. Il fournit les bases nécessaires à la compréhension physique et au calcul des phénomènes en mécanique des fluides.

Dans la préparation de ce cours beaucoup d'ouvrages classiques de la Mécanique des Fluides ont été consultés librement. Toutefois, dans la rédaction proprement dite, des cours dispensés à l'ENGEES et à l'UdS m'ont été d'un grand apport et dont mon passage se lit entre les lignes de ce document. Je remercie au passage, K. Bekkour, P. François, R. Mosé, J. Vasquez, M. Dufresne, A. Wanko, F. Lawniczak, V. Schmitt, Q. Araud, I. Bahlouli, ainsi que toute l'équipe du Département Mécanique du laboratoire Icube (ex IMFS). Je reste toujours reconnaissant envers tous mes anciens enseignants de l'université de Bejaia, qui m'ont donné l'élan intellectuel nécessaire pour réussir dans mon parcours.

Afin d'améliorer la qualité de ce cours nous encourageons toutes les critiques et remarques et nous vous remercions par avance.

A. BENSLIMANE, Décembre 2016



J'essaye d'écrire un texte, un poème  
...J'essaye d'écrire, écrire pour te revoir  
... Mais je ne vois que le noir dans le noir

Karim Bekkour – Les Fantômes de Laura

Et ainsi de suite, et ainsi de suite. Avant d'être oubliés, nous serons changés en kitsch. Le kitsch, c'est la station de correspondance entre l'être et l'oubli.

Milan Kundera - L'insoutenable légèreté de l'être



## Table des matières

<b>I. GENERALITES</b> .....	<b>9</b>
I.1. INTRODUCTION.....	9
I.2. DEFINITIONS.....	9
I.3. PRESSION : .....	12
I.4. STATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES : .....	13
I.5. FORCES DE VOLUME ET FORCES DE SURFACE : .....	13
<b>II. STATIQUE DES FLUIDES</b> .....	<b>15</b>
II.1. INTRODUCTION : .....	15
II.2. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE DES FLUIDES : .....	15
II.3. VARIATION DE LA PRESSION DANS UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE : .....	18
II.4. APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE DES FLUIDES : .....	20
II.5. FORCES DE PRESSION .....	21
<b>III. DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES</b> .....	<b>31</b>
III.1. NOTIONS GENERALES SUR L'ECOULEMENT.....	31
III.2. EQUATION DE CONTINUTE.....	33
III.3. EQUATION DE BERNOULLI.....	37
III.4. APPLICATIONS AUX MESURES DES DEBITS ET DES VITESSES:.....	41
<b>IV. DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS INCOMPRESSIBLES</b> .....	<b>45</b>
IV.1. INTRODUCTION.....	45
IV.2. TENSEUR DES CONTRAINTE DANS UN FLUIDE VISQUEUX.....	45
IV.3. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE .....	48
IV.4. ANALYSE DU MOUVEMENT D'UN ELEMENT DE VOLUME FLUIDE – DEFORMATIONS .....	50
IV.5. EQUATION DE NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE NEWTONIEN .....	52
IV.6. APPLICATIONS .....	53
<b>V. THEOREMES DE TRANSPORT ET EQUATIONS DE BILAN</b> .....	<b>61</b>
V.1. INTRODUCTION.....	61

V.2.	FORMULATION DES THEOREMES DE TRANSPORT .....	61
<b>VI.</b>	<b>COUCHE LIMITE.....</b>	<b>67</b>
VI.1.	INTRODUCTION.....	67
VI.2.	LES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE.....	68
VI.3.	RESOLUTION DES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE.....	73
<b>VII.</b>	<b>ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE.....</b>	<b>81</b>
VII.1.	INTRODUCTION.....	81
VII.2.	ANALYSE DIMENSIONNELLE.....	81
VII.3.	SIMILITUDE.....	87

# I. GENERALITES

## I.1. Introduction

D'une manière générale, la mécanique des fluides étudie les lois physiques régissant l'écoulement des liquides et des gaz et aide à reconnaître les causes et les effets de ces écoulements afin de déterminer leurs paramètres caractéristiques comme le champ de pression ou le champ de vitesse en tenant compte des différentes propriétés du fluide telles que la densité et la viscosité et principalement les relations existant entre elles dans différentes situations.

La mécanique des fluides, comme science, a de nombreuses applications dans différents domaines entre autre : l'aéronavale, l'aéronautique, la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie, etc...

## I.2. Définitions

### I.2.1. *Fluide*

Le physicien distingue classiquement trois états de la matière, solide, liquide et gazeux, en regroupant sous le vocable fluide les gaz et la plupart des liquides. À l'échelle microscopique, ce qui caractérise les fluides, c'est que les molécules ne sont pas bloquées dans leurs orientations relatives; elles ont ce degré de liberté (de désordre) que n'ont pas les molécules dans les solides.

Leurs propriétés communes sont qu'ils n'ont pas de forme propre, c'est-à-dire qu'ils sont dépourvus de rigidité; les forces nécessaires pour engendrer des déformations par glissement et assez lentes sont extrêmement petites. Cette distinction entre solides et fluides n'est pas parfaitement nette, puisqu'on trouve des corps comme les gelées, les peintures, les pâtes, certaines solutions concentrées de polymères, qui manifestent à la fois des comportements de solides (pendant des temps courts) et des comportements de liquides (pendant des temps longs).

En mécanique on appelle fluide un milieu considéré comme continu, à l'échelle macroscopique, sans rigidité, pouvant subir de grandes déformations sous l'action de forces qui peuvent être très faibles.

- Les liquides, incompressibles, assez denses qui épousent la forme des récipients dans lesquels ils sont placés et présentent une surface supérieure plane quand elle est libre entre autre : l'eau, l'alcool, l'huile, le sang, en sont des exemples (à température ambiante).
- Les gaz et les vapeurs, compressibles et indéfiniment expansibles, qui occupent tout le volume qui leur est offert. Citons l'air que nous respirons, la vapeur d'eau ou le dioxyde de carbone qui produit les bulles dans les boissons gazeuses.

Tous les fluides ne sont pas purs liquides ou gaz. On rencontre des fluides où deux ou plusieurs phases peuvent coexister :

- Les dispersions : sont des mélanges de particules très fines. Ce sont souvent des particules colloïdales telles que les argiles. Les dispersions ne sédimentent pas spontanément.
- Les suspensions : sont des mélanges de particules fins ou grossières. Contrairement aux dispersions, les suspensions sédimentent plus ou moins rapidement et peuvent être filtrées mécaniquement.
- Les émulsions : sont des mélanges de fines gouttelettes d'un liquide dans un autre. Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont les bulles de gaz.

Toutes ces substances ont généralement des comportements particuliers dont l'étude relève d'un domaine de la mécanique appelée rhéologie.

### *1.2.2. Masse volumique :*

La masse volumique ( $\rho$ ) est le rapport :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}} \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \text{I.1}$$

Pour les liquides, le volume est pratiquement insensible aux variations de pression.

$$\begin{aligned}\rho_{eau} &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{mercure} &= 13546 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{air} &= 1.205 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

Remarque :

Contrairement aux liquides, les gaz sont fortement compressibles. La variation de masse volumique dépend de la température et de la pression :  $\rho = f(p, T)$ .

*1.2.3. Densité :*

La densité est le rapport de la masse volumique d'un corps à la masse volumique d'un autre corps pris comme référence. Le corps de référence pour les liquides est de l'eau pure à 4°C.

$$\delta = \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{eau}} \quad [-] \quad \text{I.2}$$

*1.2.4. Compressibilité :*

La compressibilité des fluides est la propriété qui traduit la diminution du volume en réponse à un accroissement de la pression.

En général, pour un fluide compressible la masse volumique dépend de la température et de la pression :

$$\rho = f(p, T)$$

- Les gaz sont des fluides fortement compressibles.

Les fluides incompressibles ont la propriété d'avoir leur masse volumique indépendante de toute variation de pression et/ou de température.

$$\rho = \text{constante}$$

- Les liquides contrairement au gaz sont peu voir non compressible (incompressible).

*I.2.5. Viscosité :*

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement (écoulement).

- Fluide parfait : un fluide dont la viscosité n'est pas prise en compte lors de l'étude de son écoulement (non visqueux).
- Fluide réel : un fluide dont la viscosité, cette fois-ci, est prise en compte (fluide visqueux).

Le coefficient de viscosité  $\mu$  appelé viscosité dynamique s'exprime en SI en [Pa.s] = [N.m<sup>-2</sup>.s]. Cette unité porte le nom de Poiseuille [Pl]. On trouve aussi le Poise [Po] avec 1 [Po] = 0.1 [Pl].

On définit la viscosité cinématique  $\nu$  par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [m^2 \cdot s^{-1}] \quad \text{I.3}$$

**I.3. Pression :**

La pression est une notion physique fondamentale, C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. On peut la voir comme une force rapportée à la surface sur laquelle elle s'applique.

$$p = \frac{F}{S} \quad [Pa] \quad \text{I.4}$$

L'unité internationale de pression est le Pascal : 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>. En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne : 1 bar = 10<sup>5</sup> Pa.

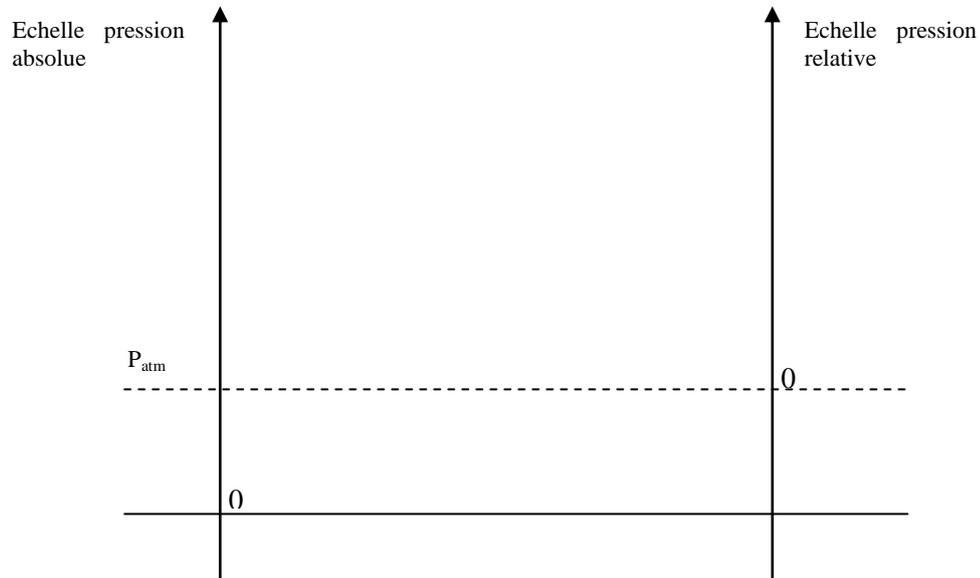
*I.3.1. Pression absolue – pression relative :*

- La pression absolue est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. On en déduit donc que la pression minimale possible est zéro.
- La pression relative se définit par rapport à une pression de référence que l'on choisit le plus souvent égale à la pression atmosphérique.

Avec :

$$p_{absolue} = p_{relative} + p_{atm}$$

I.5



#### I.4. Statique et dynamique des fluides :

La mécanique des fluides a pour objet, d'une part, l'étude des comportements statiques et dynamiques des fluides, et d'autre part l'étude des interactions entre fluides et solides.

- En statique des fluides, le fluide étudié est supposé au repos (sans mouvement). La vitesse en chaque point est nulle. Les grandeurs intensives : pression  $P$ , température  $T$  et masse volumique  $\rho$  restent constantes dans le temps et en chaque point mais bien évidemment peuvent varier d'un point à un autre.
- En dynamique des fluides, le fluide est en mouvement. La vitesse en chaque point du fluide est, par conséquent, fonction non seulement des coordonnées de l'espace mais aussi du temps.

#### I.5. Forces de volume et forces de surface :

Les forces qui agissent sur un volume fini de fluide sont deux types :

- Les forces de volumes,
- Les forces de surfaces.

*I.5.1. Les forces de volume :*

Elles se composent des forces suivantes :

- Les forces de pesanteur provenant de la gravité.
- Les forces d'accélération pure :

Elles proviennent de la variation de la vitesse ( $V$ ) d'une masse ( $m$ ) dans le temps.

$$F_{\text{accélération pure}} = m \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{I.6}$$

- Les forces d'accélération convective :

Elles proviennent de la variation de la vitesse ( $u, v, w$ ) dans l'espace.

$$F_{\text{accélération convective}} = m \left( \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \quad \text{I.7}$$

*I.5.2. Les forces de surface :*

- Les forces de pression :

La pression  $p$  est le rapport entre une force  $F$  agissant perpendiculairement à la surface  $S$  d'un fluide :

$$p = \frac{F}{S}$$

- Les forces de frottement de viscosité :

Nous avons vu précédemment qu'un fluide, dont les particules sont en mouvement relatif, génèrent des forces de frottement dues à la viscosité. La force de frottement s'écrit :

$$F = \mu S \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad \text{I.8}$$

## II. STATIQUE DES FLUIDES

### II.1. Introduction :

La statique des fluides ou ce qu'on appelle communément l'hydrostatique étudie les conditions d'équilibre des liquides au repos. Ce chapitre aborde l'étude de la répartition de la pression, notamment en fonction de la distance verticale, ainsi que les forces qui en résultent.

### II.2. Principe fondamental de la statique des fluides :

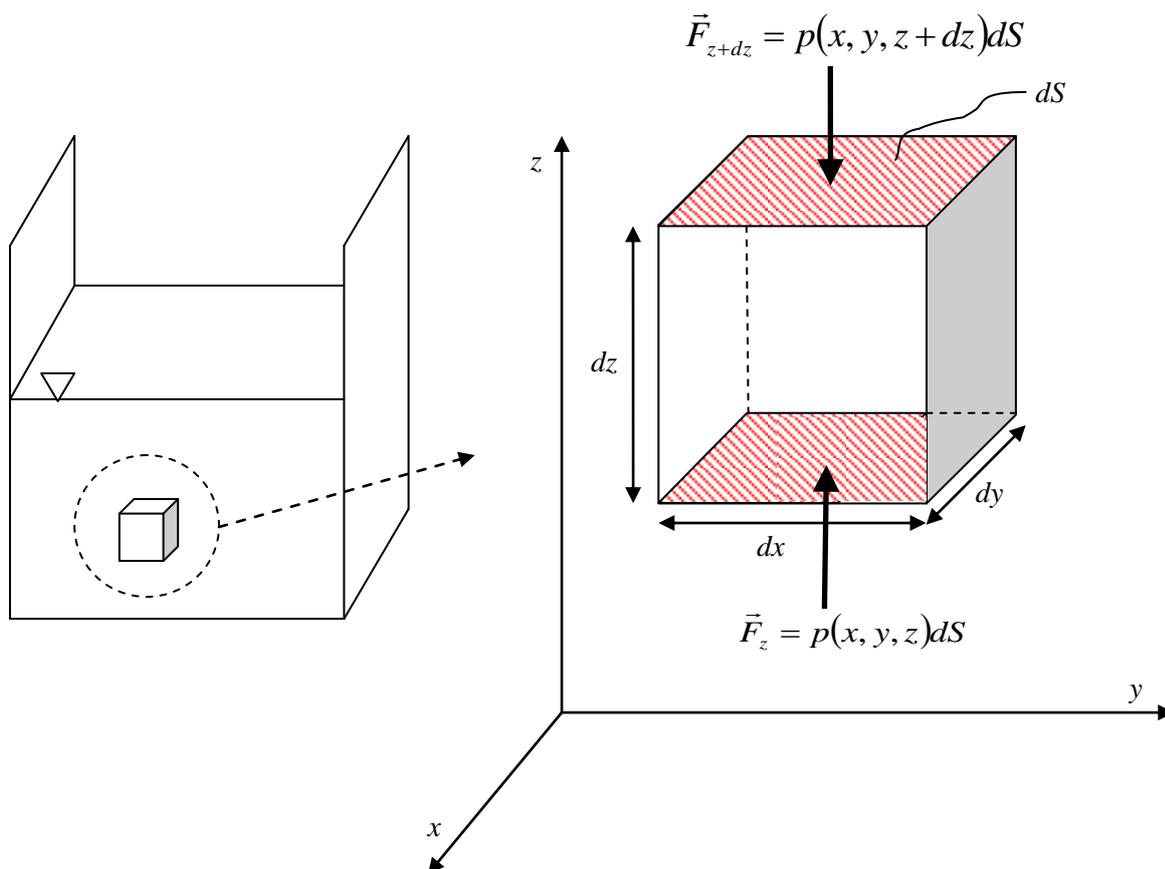


Figure II.1. Pression sur un parallélépipède fluide

Considérons dans le réservoir un fluide au repos. Isolons un volume parallélépipède d'eau (Figure 1)

avec :  $(dV = dx \cdot dy \cdot dz)$ . On suppose un champ de force de volume  $\vec{G}(g_x, g_y, g_z)$ .

On fera la démonstration pour la direction  $z$  et on généralisera aux autres directions  $x$  et  $y$ .

Suivant la direction  $z$  :

- Les forces de volumes sont :

Concernant les forces de volume, il n'en existe qu'une seule : la force de pesanteur. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{F}_{v(z)} = \rho g_z dV \cdot \vec{e}_z \quad \text{II.1}$$

Les forces d'inertie n'existent pas, le fluide est au repos (vitesse nulle).

- Les forces de surface sont :

La pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément. Ces forces s'écrivent de la manière suivante :

$$\vec{F}_{s(z)} = p(x, y, z) dS \cdot \vec{e}_z \quad \text{II.2}$$

$$\vec{F}_{s(z+dz)} = p(x, y, z + dz) dS \cdot (-\vec{e}_z) \quad \text{II.3}$$

D'où :

$$\vec{F}_{s(z)} + \vec{F}_{s(z+dz)} = [p(x, y, z) - p(x, y, z + dz)] dS \cdot (\vec{e}_z) \quad \text{II.4}$$

$$\vec{F}_{s(z)} + \vec{F}_{s(z+dz)} = -[p(x, y, z + dz) - p(x, y, z)] dS \cdot (\vec{e}_z) \quad \text{II.5}$$

$$\vec{F}_{s(z)} + \vec{F}_{s(z+dz)} = -\frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dS \cdot (\vec{e}_z) \quad \text{II.6}$$

$$\vec{F}_{s(z)} + \vec{F}_{s(z+dz)} = -\frac{\partial p}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\vec{e}_z) \quad \text{II.7}$$

L'équation de l'hydrostatique est déterminée en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces. La condition d'équilibre des forces selon  $z$  s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{e}_z + \rho g_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{II.8}$$

D'où :

$$-\frac{\partial p}{dz} + \rho g_z = 0 \quad \text{II.9}$$

De manière analogue on peut écrire l'équation d'équilibre selon les autres directions :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{dx} + \rho g_x = 0 \\ -\frac{\partial p}{dy} + \rho g_y = 0 \\ -\frac{\partial p}{dz} + \rho g_z = 0 \end{cases} \quad \text{II.10}$$

Sous forme vectorielle :

$$\rho \vec{G} + (-\overrightarrow{\text{grad} p}) = 0 \quad \text{II.11}$$

Si l'on se place dans le champ gravitationnel on a :  $\vec{G} = (0, 0, -g)$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{dx} = 0 \\ \frac{\partial p}{dy} = 0 \\ \frac{\partial p}{dz} = -\rho g \end{cases} \quad \text{II.12}$$

C'est trois relations montrent que :

- La pression est indépendante de  $x$  et de  $y$ , la pression ne varie pas dans les directions  $x$  et  $y$ . La pression est constante dans les plans horizontaux.
- La troisième relation traduit le principe fondamental de l'hydrostatique, c'est-à-dire que la pression croît de haut en bas. La pression ne dépend que de  $z$ , on écrit :

$$dp = -\rho g dz \quad \text{II.13}$$

### II.3. Variation de la pression dans un fluide incompressible :

Considérons un réservoir rempli d'un fluide, exposé à la pression atmosphérique. Le fluide est supposé incompressible ( $\rho = cste$ ).

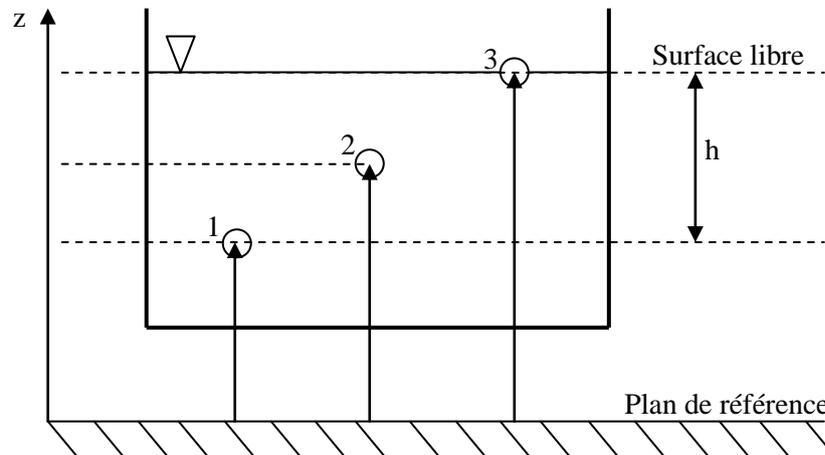


Figure II.2 Variation verticale de la pression

- Calcul de la différence de pression entre les points (1) et (2) :

L'intégration de l'équation fondamentale de l'hydrostatique entre les points (1) et deux (2) s'écrit :

$$p + \rho g z = cste \quad \text{II.14}$$

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = cste \quad \text{II.15}$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (z_1 - z_2) \quad \text{II.16}$$

Cette dernière relation signifie que la variation de pression entre deux niveaux est proportionnelle (linéaire) à la différence de hauteur entre ces deux niveaux, appelée **théorème de Pascal**.

La variation de la pression est proportionnelle à la différence de hauteur entre les deux niveaux. On nomme  $P$  l'énergie potentielle par unité de volume avec :

$$P = p + \rho g z = cste \quad \text{II.17}$$

Une autre écriture consiste à diviser l'équation par ( $\rho g$ ) :

$$\frac{P}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z = cste \quad \text{II.18}$$

La quantité  $P/\rho g$  est la charge piézométrique appelée aussi hauteur piézométrique. Elle a la dimension d'une hauteur [m] et elle est constante dans un liquide au repos.

- Calcul de la différence de pression entre les points (1) et (3) :

Le point (3) est situé à la surface libre du réservoir. La pression en ce même point (3) est égale à la pression atmosphérique, ce qui nous permet d'écrire :

$$p_3 = p_{atm}$$

En écrivant, l'équation fondamentale de l'hydrostatique (EFH) par rapport au plan de référence :

$$p + \rho g z = cste \quad \text{II.19}$$

$$p_1 + \rho g z_1 = p_3 + \rho g z_3 = cste \quad \text{II.20}$$

Soit :

$$p_1 - p_3 = \rho g (z_3 - z_1) \quad \text{II.21}$$

$$p_1 - p_{atm} = \rho g (z_3 - z_1) \quad \text{I.22}$$

Il faut noter que :

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = h \\ z_1 - z_3 = -h \end{cases}$$

Au Final :

$$p_1 - p_{atm} = \rho g h \quad \text{II.23}$$

D'où :

$$p_1 = p_{atm} + \rho g h \quad \text{II.24}$$

La pression  $p_1$  au point (1) est mesurée en pression absolue. Dans la pratique, on préfère utiliser des pressions mesurées en pression relative par rapport à la pression atmosphérique  $p_{atm}$ .

$$p_1^* = p_1 - p_{atm} = \rho g h \quad \text{II.25}$$

La pression  $p_1^*$  au point (1) est mesurée en pression relative. La plupart des instruments de mesure fournissent une pression relative appelée également pression **manométrique**.

**II.4. Application du principe fondamental de la statique des fluides :**

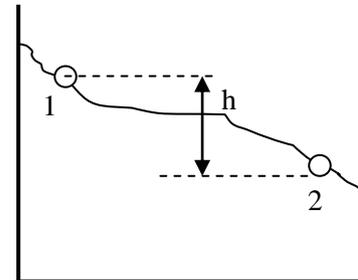
*II.4.1. Surface libre d'un liquide*

La surface libre d'un liquide au repos est plane et horizontale.

$$p_2 - p_1 = \rho gh$$

$$p_{atm} - p_{atm} = \rho gh = 0$$

$$h = 0$$



*II.4.2. Surface de séparation de deux liquides non miscibles*

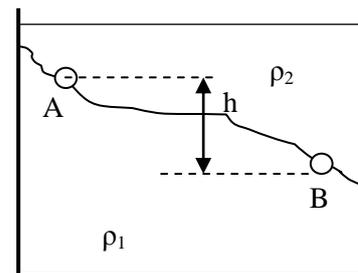
La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est horizontale.

- dans le fluide I :  $p_B - p_A = \rho_1 gh$

- dans le fluide II :  $p_B - p_A = \rho_2 gh$

D'où :  $\rho_1 gh = \rho_2 gh$  ,  $gh(\rho_1 - \rho_2) = 0$

Or :  $g \neq 0$  et  $(\rho_1 - \rho_2) \neq 0$  donc  $h = 0$



*II.4.3. Vases communicants contenant plusieurs liquides non miscibles :*

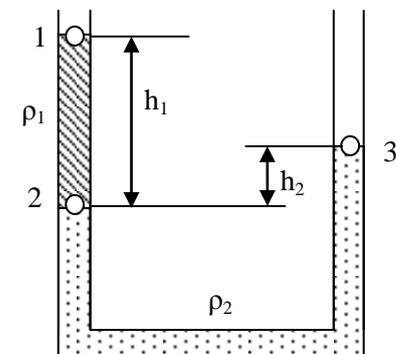
Les dénivellations de deux liquides non miscibles dans des vases communicants sont en rapport inverse de leurs masses volumiques.

$$p_2 - p_1 = \rho_1 gh_1 \text{ et } p_2 - p_3 = \rho_2 gh_2$$

Or :  $p_1 = p_3 = p_{atm}$

D'où :  $\rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2$

Si  $\rho_1 = \rho_2$  Un fluide est à la même hauteur dans un tube en U.

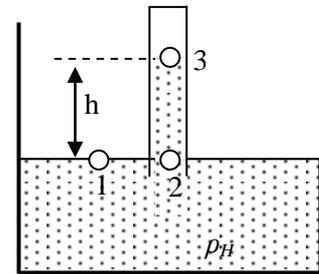


#### II.4.4. mesure de la pression atmosphérique (Torricelli, ~ 1643)

La pression atmosphérique (au niveau de la mer) vaut :

$P_0 = 1.013105 \text{ Pa}$  (i.e. 1.013 bars) soit 76 cm de mercure.

$$P_2 - P_3 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = P_1 = P_2 = P_{atm}$$



#### II.4.5. Transmission des pressions (principe de Pascal)

Une variation de pression en un point d'un fluide incompressible est transmise intégralement en tout autre point.

Points 1 et 2 fixes, fluide incompressible :  $p_2 - p_1 = \rho g h = Cte$

Si  $p_1 \rightarrow p_1 + dp$  de l'invariance de  $(p_2 - p_1 = Cte) \Rightarrow p_2 \rightarrow p_2 + dp$

#### Exemple de la presse hydraulique :

Surpression  $p = F_1/S_1$  transmise en tout point

$$F_2 = p \cdot S_2 = (F_1/S_1) \cdot S_2$$

Or :  $S_2 \gg S_1$

$$F_2 \gg F_1$$

#### II.4.6. "Paradoxe" hydrostatique

A surface de fond identique (et même hauteur de liquide), la force de pression exercée par un liquide sur le fond du récipient est indépendante de la forme du récipient.

## II.5. Forces de pression

### II.5.1. Théorème d'Archimède

Un corps solide complètement immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du fluide déplacé. Cette résultante est appelée poussée d'Archimède. Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

- Le raisonnement est toujours valable si le corps n'est que partiellement immergé. Dans ce cas la poussée est égale au poids en fluide du volume effectivement immergé.

Soit une surface fermée formant un corps solide de masse volumique  $\rho_s$ , de volume total  $V$  et de volume immergé  $V_{\text{immergé}}$ , se trouve immergée entièrement ou partiellement ( $V_{\text{immergé}} \leq V$ ) dans un liquide au repos de poids volumique  $\rho$ . Les forces verticales qui agissent sur le corps sont :

- Le poids du solide :  $\rho_s g V$
- La poussée d'Archimède :  $\rho g V_{\text{immergé}}$

### II.5.2. Equilibre des corps immergés

Un corps est en équilibre si le poids  $P$  et la force d'Archimède sont égaux, opposés et situés sur la même ligne verticale. Dans le cas contraire, il en résulte un mouvement.

Appelons  $G$  le centre de gravité d'un corps flottant et  $A$  le centre de poussée de ce même corps immergée complètement ou partiellement. Le point  $M$ , situé à l'intersection de la verticale passant par le point  $A$  et de l'axe de symétrie du solides, est appelé métacentre et  $dm$  est la distance métacentrique.

- $G$  est en dessous de  $A$  : C'est l'équilibre stable. En inclinant légèrement le corps, celui-ci est soumis à un couple de redressement qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale.
- $G$  est au-dessus de  $A$  : C'est l'équilibre instable. En effet, en inclinant dans ce cas légèrement le corps celui-ci est soumis à un couple déstabilisant qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il retrouve son équilibre stable.

### II.5.3. Forces de pression sur les parois

Les forces hydrostatiques sur une surface proviennent des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface. Le calcul des forces hydrostatiques sur une surface quelconque immergée dans l'eau, consiste à déterminer les trois caractéristiques suivantes :

- L'intensité de la force qui s'applique sur la surface  $dF = p \cdot dS = \rho g h \cdot dS$

- La direction de la force
- Et son point d'application (centre de poussée).

II.5.3.1. Force de pression sur une paroi plane inclinée

On s'intéresse aux surfaces planes de forme quelconque entièrement immergée dans l'eau. La figure suivante représente à gauche la surface immergée et à droite une vue A-A de cette surface.

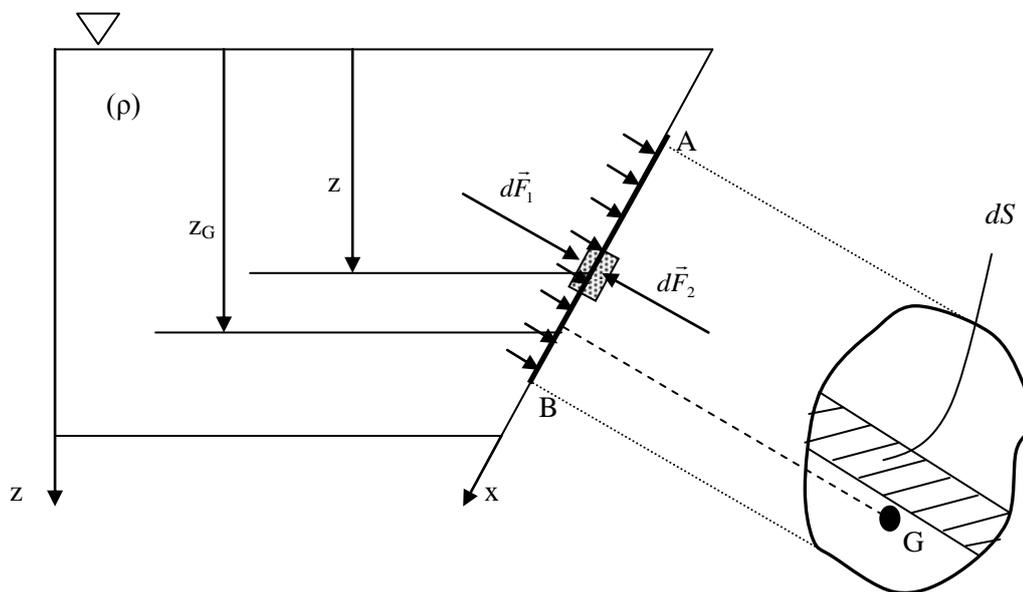


Figure II.4 Force de pression sur un élément de paroi

Soit la surface plane  $AB$  inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de masse volumique  $\rho$ . Le point  $G(x_G, y_G)$  est le centre de gravité de la section.

Etablissons l'expression de la force  $F$  résultante des forces exercées par le fluide sur la surface  $AB$ . Considérons pour cela la force élémentaire  $d\vec{F}$  s'exerçant sur un élément de surface  $dS$ .

$$dF = dF_1 - dF_2 \tag{II.26}$$

$$dF = (\rho g z + p_{atm}) dS - p_{atm} dS \tag{II.27}$$

$$dF = \rho g z \cdot dS \tag{II.28}$$

Avec  $\rho g z$  la pression relative à l'ordonnée  $z$ .

$$F = \int_{S_{AB}} \rho g z \cdot dS = \int_{S_{AB}} \rho g x \sin(\alpha) \cdot dS = \rho g \sin(\alpha) \int_{S_{AB}} x \cdot dS \quad \text{II.29}$$

Avec :  $\int_{S_{AB}} x \cdot dS = x_G S_{AB}$  représente le moment statique de la surface  $S_{AB}$  par rapport à l'axe  $ox$ .

Et comme :  $x_G \sin(\alpha) = z_G$

Au final l'expression de  $F$  s'écrit :

$$F = \rho g \cdot z_G S \quad \text{II.30}$$

$z_G$  : profondeur du centre de gravité de la paroi immergée,

$S$  : surface de la paroi immergée.

La résultante des forces de pression exercée par un liquide au repos sur une paroi plane quelconque, est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base la surface de la paroi et pour hauteur la profondeur du centre de gravité de la surface immergée.

### II.5.3.2. Position du point d'application de la force $F$

Le point d'application de la force résultante des pressions  $C (x_c, y_c)$  est appelé : centre de poussée. La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires ( $dS$ ) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$M_{/o}(F) = \int_S x dF = x_c F \quad \text{II.31}$$

$$x_c F = \int_{S_{AB}} x dF = \int_{S_{AB}} \rho g x^2 \sin(\alpha) dS = \rho g \sin(\alpha) \int_{S_{AB}} x^2 dS \quad \text{II.32}$$

Avec :  $\int_{S_{AB}} x^2 dS = I_{yy}$  représente le moment d'inertie de la surface  $AB$  par rapport à l'axe  $oy$ .

$$\rho g \sin(\alpha) x_G S_{AB} x_c = \rho g \sin(\alpha) I_{yy} \quad \text{II.33}$$

$$x_C = \frac{I_{yy}}{x_G S_{AB}} \quad \text{II.34}$$

L'utilisation du théorème de Huygens nous permet d'écrire :  $I_{yy} = I_{GG} + S_{AB} x_G^2$

$$x_C = \frac{I_{GG}}{x_G S_{AB}} + x_G \quad \text{II.35}$$

D'une autre manière :

$$z_C = \frac{I'_{GG}}{z_G S_{xAB}} + z_G \quad \text{II.36}$$

Avec :  $I'_{GG}$  le moment d'inertie de la surface  $S_{xAB}$  .  $S_{xAB}$  la projection de  $S_{AB}$  sur l'axe oz.

### II.5.3.3. Force de pression sur paroi plane horizontale

Considérons une paroi de largeur unitaire et de surface  $S$  immergée horizontalement à une profondeur  $z$ . Les pressions (relatives) aux points (1) et (2) sont égales :  $p = p_1 = p_2 = p_G$

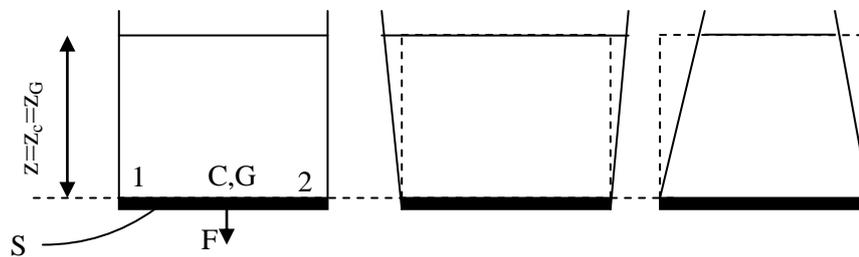


Figure II.5. Forces de pression sur une paroi plane horizontale.

Si on calcule l'intensité de la force résultante sur la paroi horizontale :

$$F = \rho g \cdot z_G S = \rho g V \quad \text{II.37}$$

Remarque :

- La force F est évidemment égale au poids de la colonne d'eau au-dessus de la paroi.
- Le point d'application, C, est confondu avec le centre de gravité G de la surface.
- Quelle que soit la forme des réservoirs, s'ils sont remplis du même liquide ( $\rho$ ), jusqu'à la même hauteur  $z$ , alors les fonds de même surface,  $S$ , sont soumis à la même force de pression.

II.5.3.4. Force de pression sur une paroi à surface gauche

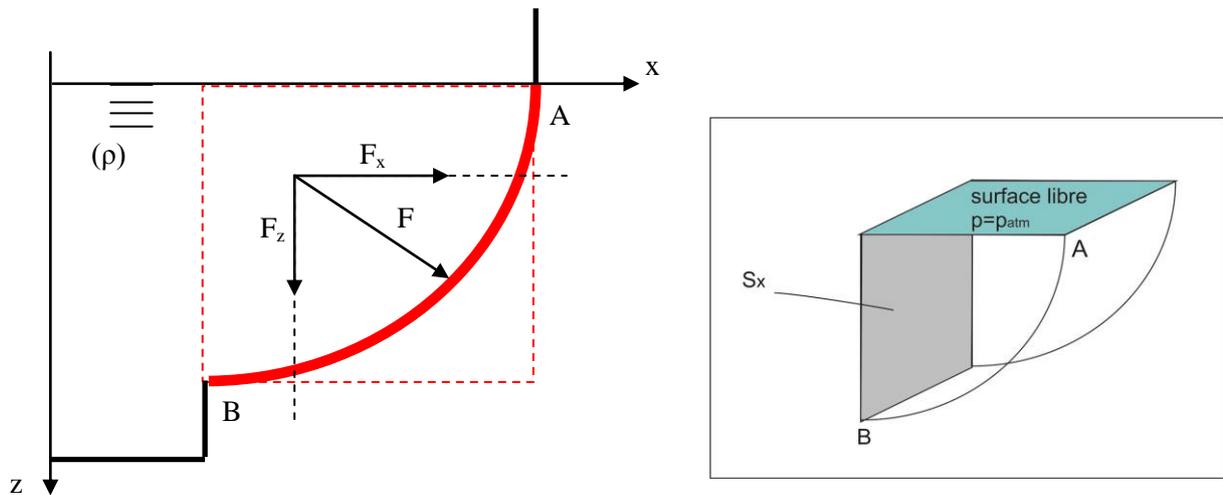


Figure II.6 Force de pression hydrostatique sur un élément de surface gauche.

Le calcul de la force résultante  $F$  sur une paroi gauche  $AB$  consiste à écrire  $F$  sous forme de deux composante suivant les axes  $x$  et  $z$ , respectivement, sous la forme :

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_z \vec{e}_z \tag{II.38}$$

La projection  $F_x$  sur la direction horizontale  $Ox$  est égale à la poussée hydrostatique s'exerçant sur la projection  $S_x$  de la surface  $S_{AB}$  sur le plan vertical perpendiculaire à  $Ox$ .

$$F_x = \rho g z_G S_x \tag{II.39}$$

$S_x$  : projection de la surface  $S_{AB}$  sur un plan vertical. Où  $F_x$  passe par le centre de poussée calculée par rapport à cette surface  $S_x$ .

La projection  $F_z$  sur la direction verticale  $Oz$  de  $F$  est égale en grandeur, au poids d'une colonne de liquide verticale limitée vers le bas par la surface  $S$  et vers le haut par le plan de la surface libre.

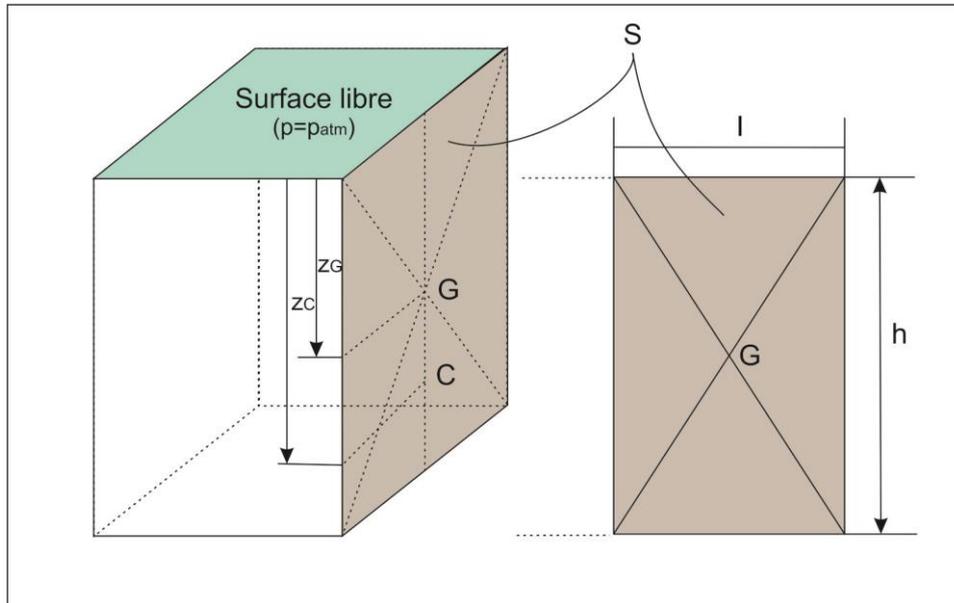
$$F_z = \rho g V \tag{II.40}$$

$V$  : le volume de la colonne verticale de liquide limitée par la surface  $S$  et la surface libre. Où  $F_z$  passe par le centre de gravité de cette colonne liquide.

## II.5.3.5. Applications

## a- Surface plane verticale

Déterminer la résultante des forces des forces hydrostatique pression agissant sur une plaque plane rectangulaire verticale. Puis calculer son point d'application (centre de poussée).



Calcul de la force résultante :

$$F = \rho g \cdot z_G S \quad \text{II.41}$$

Avec :

$$\begin{cases} z_G = \frac{h}{2} \\ S = h \cdot l \end{cases} \quad \text{II.42}$$

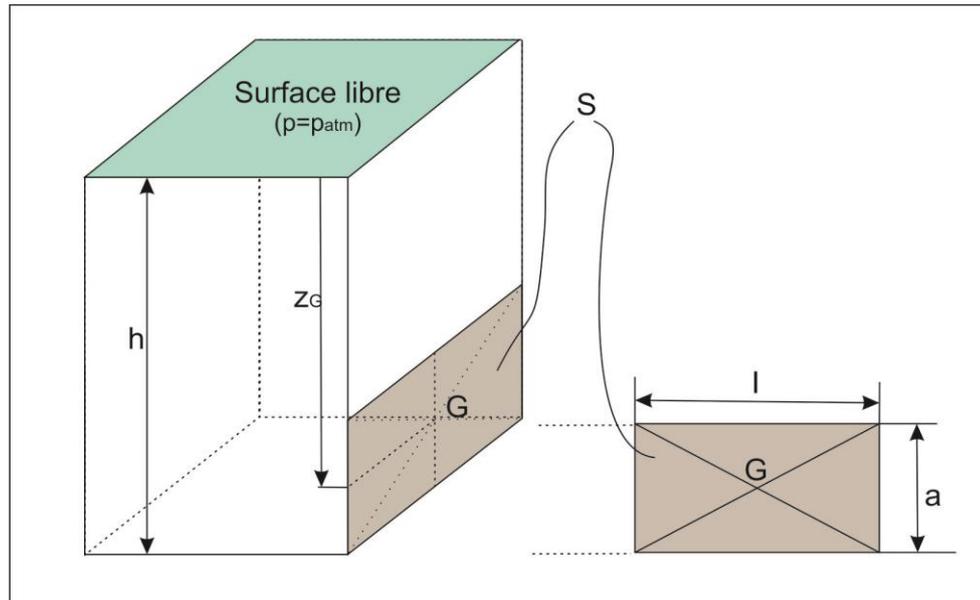
$$F = \frac{1}{2} \rho g \cdot l \cdot h^2 \quad \text{II.43}$$

Le centre de poussée :

$$z_C = z_G + \frac{I_{GG}}{z_G S} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{lh^3}{12}}{\frac{h}{2} \cdot hl} \quad \text{II.44}$$

$$z_C = \frac{2}{3} h \quad \text{II.45}$$

## b- Vanne rectangulaire



Dans cet exemple, comme pour le précédent, il est à déterminer la résultante des forces des forces hydrostatique pression agissant sur une vanne rectangulaire verticale. Puis de calculer son point d'application (centre de poussée).

Calcul de la force résultante :

$$F = \rho g \cdot z_G S \quad \text{II.46}$$

Avec :

$$\begin{cases} z_G = h - \frac{a}{2} \\ S = a \cdot l \end{cases} \quad \text{II.47}$$

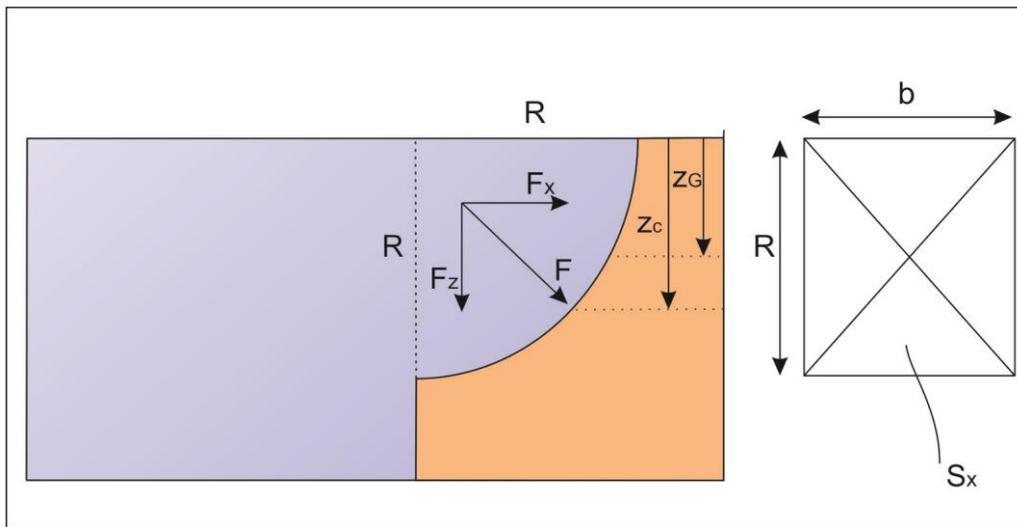
$$F = \frac{1}{2} \rho g \cdot \left( h - \frac{a}{2} \right) a \cdot l \quad \text{II.48}$$

Le centre de poussée :

$$z_c = z_G + \frac{I_{GG}}{z_G S} = h - \frac{a}{2} + \frac{\frac{l \cdot a^3}{12}}{\left( h - \frac{a}{2} \right) \cdot a \cdot l} \quad \text{II.49}$$

$$z_c = h - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12 \left( h - \frac{a}{2} \right)} \quad \text{II.50}$$

c- Paroi cylindrique



Calcul de la force résultante F :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \quad \text{II.51}$$

Pour le calcul de F, on passe par le calcul de :

$F_x$  : résultante des forces de pression s'appliquant sur la projection de la paroi sur l'axe vertical, et

$F_z$  : le poids du fluide au-dessus de la surface concernée.

$$F_x = \rho g z_G S_x \quad \text{II.52}$$

$S_x$  : projection de la surface cylindrique sur l'axe vertical

$z_G$  : profondeur du centre de gravité de  $S_x$

$$F_x = \rho g \frac{R^2}{2} \cdot b \quad \text{II.53}$$

La composante verticale s'écrit :

$$F_z = \rho g V = \rho g \frac{\pi R^2}{4} \cdot b \quad \text{II.54}$$

D'où F est donnée par :

$$F = \rho g R^2 b \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16}} \quad \text{II.55}$$

# III. DYNAMIQUE DES FLUIDES

## PARFAITS INCOMPRESSIBLES

### III.1. Notions générales sur l'écoulement

#### III.1.1. Régime permanent

L'écoulement du fluide est dit permanent ou encore stationnaire si les composantes du vecteur vitesse sont indépendantes de la variable temps  $t$  (les composantes sont constantes dans le temps), en chacun des points de la conduite. D'une autre manière, la dérivée des grandeurs physiques par rapport au temps est nulle ( $\partial/\partial t = 0$ ). Il est dit non-permanent ou encore instationnaire si cette condition n'est pas réalisée.

#### III.1.2. Trajectoire et lignes de courant

Trajectoire: On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupées successivement entre deux instants.

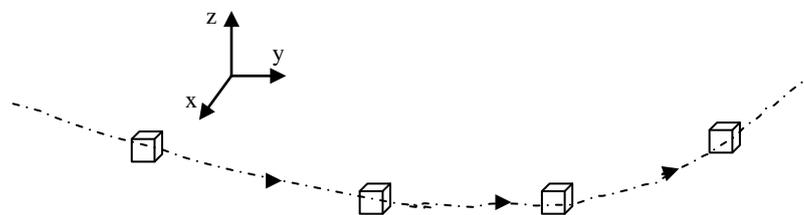


Figure III.1 Trajectoire d'une particule fluide

Ligne de courant: C'est la courbe tangente en tout point de l'espace au vecteur vitesse, à un instant donné.

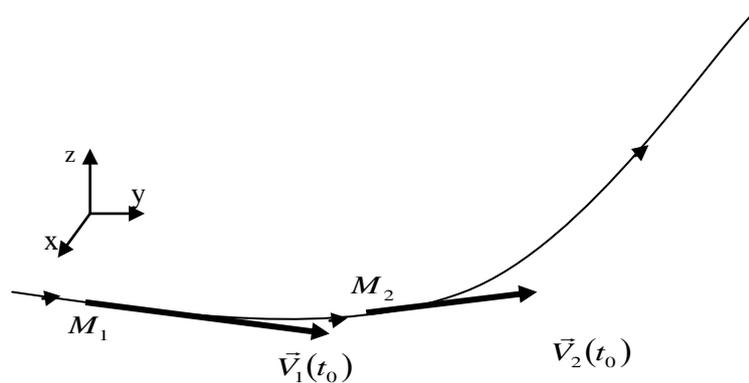


Figure III.2 Ligne de courant d'une particule fluide

Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé.

En écoulement permanent, la trajectoire et la ligne de courant sont confondues.

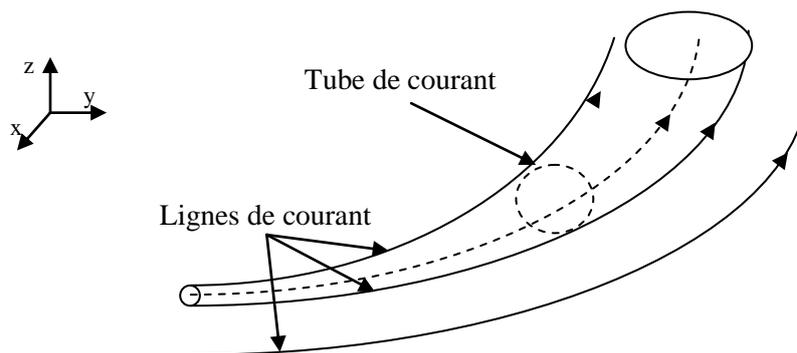


Figure III.3 Tube de courant

### III.1.3. Représentation eulérienne et représentation lagrangienne

- Représentation lagrangienne

Le mouvement de la particule fluide peut être défini par ses coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , tout le long de la trajectoire - représentation de Lagrange. En d'autres termes, la méthode revient à suivre une particule en écoulement.

La méthode de Lagrange s'avère dans la plupart des cas délicate et peu employée, car il n'est pas facile de suivre les particules.

- Représentation eulérienne

Dans ce cas, le mouvement de la particule fluide peut être défini par la vitesse des particules qui passent en un point donné de l'espace - méthode d'Euler. La description eulérienne consiste donc à définir les grandeurs physiques en des points fixes.

Nous nous plaçons dans ce qui suit en représentation eulérienne, la vitesse  $\vec{V}$  est déterminée par ses composantes  $u, v, w$ .

Pendant une durée  $dt$ , la distance parcourue par la particule s'exprime, en projection sur les axes, par :

$$\begin{cases} dx = udt \\ dy = vdt \\ dz = wdt \end{cases} \quad \text{III.1}$$

D'où :

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{III.2}$$

L'équation de la ligne de courant est obtenue avec la résolution de l'équation différentielle.

### III.2. Equation de continuité

Soit un tube de courant dans lequel l'écoulement peut être considéré comme unidimensionnel (1D).

- Le fluide est incompressible ( $\rho = cste$ ).
- L'écoulement est permanent ( $\partial/\partial t = 0$ ).

Visualisons par la pensée,  $dS_1$  et  $dS_2$  deux sections transversales droites, situées aux abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , respectivement.

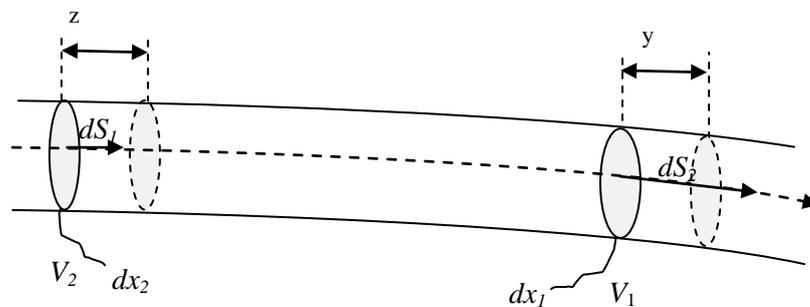


Figure III.4 Tube de courant

On notera  $V_1$  et  $V_2$  les vitesses du fluide sur les sections respectives  $dS_1$  et  $dS_2$ . Durant le temps  $dt$  le fluide qui traverse  $dS_1$  et  $dS_2$  avance respectivement de  $dx_1 = V_1 dt$  et  $dx_2 = V_2 dt$ .

Dans l'hypothèse d'un fluide incompressible, et lorsque le régime est permanent, d'après le principe de conservation de masse la masse du fluide qui traverse une section du tube par unité de temps ( $dm/dt = cste$ ) est constante. C'est-à-dire que la masse  $dm_1$  qui traverse la section  $dS_1$  pendant un laps de temps  $dt$  est égale à la masse  $dm_2$  qui traverse la section  $dS_2$  pendant le même laps de temps  $dt$ .

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = cste \quad \text{III.3}$$

Pendant un temps  $dt$  les masses qui traversent, respectivement,  $dS_1$  et  $dS_2$  :

$$\begin{cases} dm_1 = \rho(dS_1 \cdot dx_1) = \rho \cdot dS_1 \cdot V_1 dt \\ dm_2 = \rho(dS_2 \cdot dx_2) = \rho \cdot dS_2 \cdot V_2 dt \end{cases} \quad \text{III.4}$$

On peut avoir :

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot dS_1 V_1 = \rho \cdot dS_2 V_2 = dq_m \quad \text{III.5}$$

Avec :

$$dq_m = \frac{dm}{dt} \quad \left[ \frac{kg}{s} \right] \quad \text{III.6}$$

$dq_m$  est le débit massique qui traverse le tube de courant.

On peut aussi écrire, puisque ( $dm = \rho dV$ ) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \frac{dV}{dt} = dS_1 \cdot V_1 = dS_2 \cdot V_2 = dQ_v \quad \text{III.7}$$

C'est l'équation de continuité d'un écoulement de fluide incompressible.

Avec :

$$dQ_v = \frac{dV}{dt} \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad \text{III.8}$$

$dQ_v$  est le débit volumique qui traverse le tube de courant.

Dans la cas de l'hypothèse du fluide parfait ou fluide non-visqueux ( $\mu = 0$ ), la vitesse est uniforme sur toute la section de la conduite, donc l'équation de continuité peut s'écrire après intégration :

$$Q_v = S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 = cste \quad \text{III.9}$$

Cette relation montre que le produit de la section par la vitesse est constant tout au long d'une conduite.

Puisque ( $\rho = dm/dV$ ) :

$$dq_m = \rho \cdot dQ_v \quad \text{III.10}$$

### III.2.1. Generalisation

Imaginons un parallélépipède de volume élémentaire  $dV$  tel que : ( $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ).

A l'instant  $t$  le parallélépipède contient une masse de fluide égale à :

$$dm_t = \rho dV = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{III.11}$$

Après un laps de temps  $dt$  cette masse devient :

$$dm_{t+dt} = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{III.12}$$

D'une part, la variation de masse durant cet instant est de :

$$dm_{t+dt} - dm_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{III.13}$$

D'une autre part, si nous nous intéressons à la variation de la masse fluide traversant les différentes faces du parallélépipède pendant la durée  $dt$ , c'est-à-dire la différence de masse entre ce qui rentre et ce qui sort pendant le temps  $dt$ . Nous pouvons procéder de la sorte :

#### Suivant l'axe x :

On définit le débit massique suivant  $x$ :

$$q_{massiquex} = \rho \cdot Q_{volumiquex} = \rho u \cdot dy \cdot dz \quad \text{III.14}$$

La différence de masses fluide entrant par la face de gauche et sortant par la face de droite pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donnée par :

$$\left( \rho u \cdot dy \cdot dz - \left[ \rho V_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy \cdot dz \right) dt = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad \text{III.15}$$

Suivant l'axe y :

$$\left( \rho v \cdot dx \cdot dz - \left[ \rho V_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx \cdot dz \right) dt = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad \text{III.16}$$

Suivant l'axe z :

$$\left( \rho w \cdot dx \cdot dy - \left[ \rho V_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dx \cdot dy \right) dt = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad \text{III.17}$$

La variation totale de masse de fluide dans l'élément de volume  $dV$  pendant un temps  $dt$  est égale à la masse de fluide qui entre par les différentes faces dans ce volume à laquelle on soustrait la masse de fluide sortante par les autres faces, on a :

$$-\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad \text{III.18}$$

D'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad \text{III.19}$$

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{III.20}$$

Sous autre forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{III.21}$$

- Fluide incompressible :

- Si le fluide est incompressible,  $\rho = cste$  :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{III.22}$$

- Écoulement permanent :

- Si l'écoulement est permanent,  $(\partial/\partial t = 0)$  :

$$\operatorname{div}(\rho\vec{V}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \text{III.23}$$

### III.3. Equation de Bernoulli

Soit le système fermé contenu à l'instant  $t$  entre  $x_1$  et  $x_2$ . A  $t + \Delta t$  entre  $x_1 + l_1$  et  $x_2 + l_2$ .

- Fluide incompressible, parfait en écoulement permanent

Si on applique le principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W \quad \text{III.24}$$

Avec :  $\Delta E_c$  la variation de l'énergie cinétique,  $\Delta E_p$  la variation de l'énergie potentielle de pesanteur

et  $W$  le travail de pression.

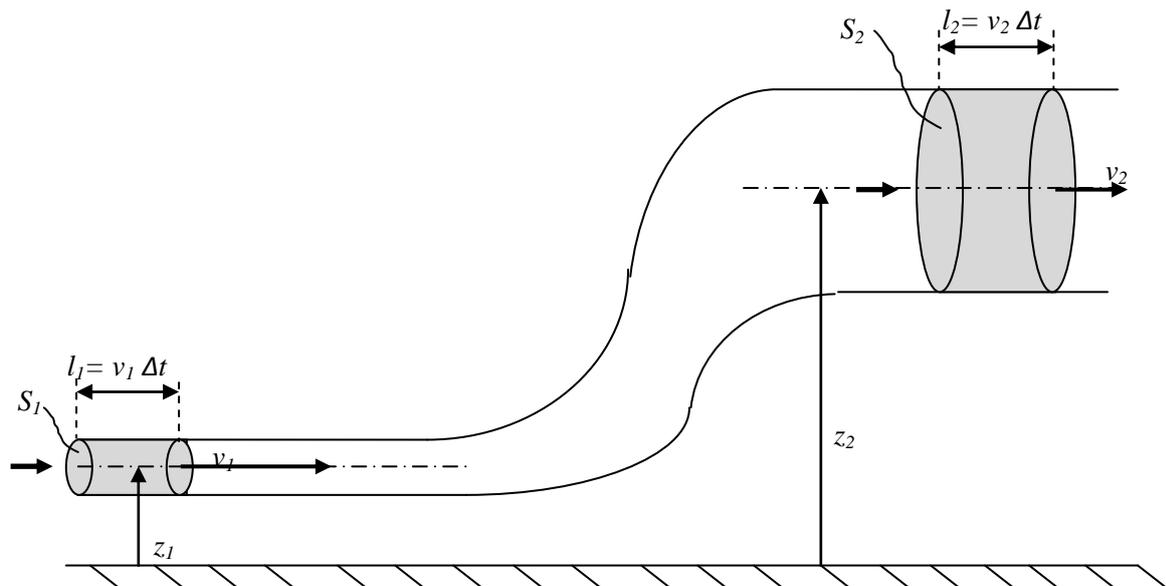


Figure III.5 Écoulement dans un tube de courant



*III.3.1. Enoncé du théorème de Bernoulli sans échange de travail*

En écoulement stationnaire, dans un tube de courant parcouru par un liquide parfait, la charge totale est constante en tout point.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = cste \quad \text{III.34}$$

L'équation de Bernoulli est valable en tout point du fluide incompressible en mouvement permanent.

*III.3.2. Equation de Bernoulli avec échange de travail*

Dans un écoulement, l'énergie mécanique totale par unité de volume de fluide, peut être modifiée d'une section à l'autre en introduisant dans le circuit une machine hydraulique.

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail  $\Delta W$  pendant une durée  $\Delta t$ .

La puissance  $P$  échangée est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [J/s] \equiv [W] \quad \text{III.35}$$

Si  $P > 0$  : la machine fournit de l'énergie au fluide (pompe) ;

Si  $P < 0$  : la machine extrait de l'énergie au fluide (turbine).

Ainsi l'expression de l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 + \frac{P}{Q_v} \quad \text{III.36}$$

*III.3.3. Equation de Bernoulli pour les fluides réels*

Nous avons vu que pour le cas d'un fluide réel et en régime permanent, d'autres forces interviennent, notamment les forces dues au frottement, qui font apparaître une dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique.

Le long d'une ligne de courant, l'énergie mécanique diminue du fait de l'augmentation de l'énergie thermique ; on appelle ce phénomène la perte de charge due aux frottements dans un liquide. Après intégration entre deux points sur la même ligne de courant l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 + \Delta h_{tot} \quad \text{III.37}$$

$\Delta h_{tot}$  : la perte de charge totale entre le point (1) et (2)

$$\Delta h_{tot} = \Delta h_l + \Delta h_s \quad \text{III.38}$$

La perte de charges totale n'est que la somme de la perte de charge linière  $\Delta h_l$  et la perte de charge singulière  $\Delta h_s$  .

- la perte de charge linéaire  $\Delta h_l$  : représentant l'énergie perdue entre les deux points,
- la perte de charge singulière  $\Delta h_s$  : intervient lorsque l'écoulement uniforme est localement perturbé.

### III.3.3.1. Expression de la perte de charge linéaire

Compte tenu des difficultés pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, la perte de charge sera traduite par une équation empirique du type :

$$\Delta h_l = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{III.39}$$

$\lambda$  est un coefficient de perte de charge. Il est sans dimension et est fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi.  $L$  est la longueur de la conduite,  $D$  le diamètre,  $v$  la vitesse moyenne dans la conduite.

- En régime laminaire  $Re < 2000$

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent. La vitesse est très faible et l'état de surface de la paroi n'intervient pas dans le calcul du coefficient  $\lambda$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{III.40}$$

Le nombre de Reynolds est donné par :

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} \quad \text{III.41}$$

□ Ecoulement turbulent ( $\text{Re} > 2000$ ).

Le coefficient de perte de charge est donné par la relation de Blasius :

$$\lambda = 0.316 \text{Re}^{-0.25} \quad \text{III.42}$$

### III.3.3.2. Expression de la perte de charge singulière

La perte de charge singulière, localisée dans une section de la conduite, est provoquée par un changement de direction et d'intensité de la vitesse. Une telle non-uniformité de la vitesse peut être provoquée par :

- un branchement de section de la conduite,
- un changement de direction (coude),
- un branchement ou raccordement,

Comme pour les pertes de charge linéaire, les pertes de charges singulières se traduisent par la relation :

$$\Delta h_s = \sum \zeta \frac{v^2}{2g} \quad \text{III.43}$$

$\zeta$  est le coefficient de perte de charge singulière.

## III.4. Applications aux mesures des débits et des vitesses:

### III.4.1. Le tube de pitot

Le tube de Pitot, représenté ci-dessus, permet de mesurer la vitesse (ou le débit) d'un fluide dans une canalisation de section  $S$ .

Le fluide circulant dans la canalisation est animé d'une vitesse  $v$  et possède une masse volumique  $\rho$  alors que le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique  $\rho_0$ .

- Le fluide est incompressible ( $\rho = cste$ ) et parfait ( $\mu = 0$ ).
- L'écoulement est permanent ( $\partial/\partial t = 0$ )

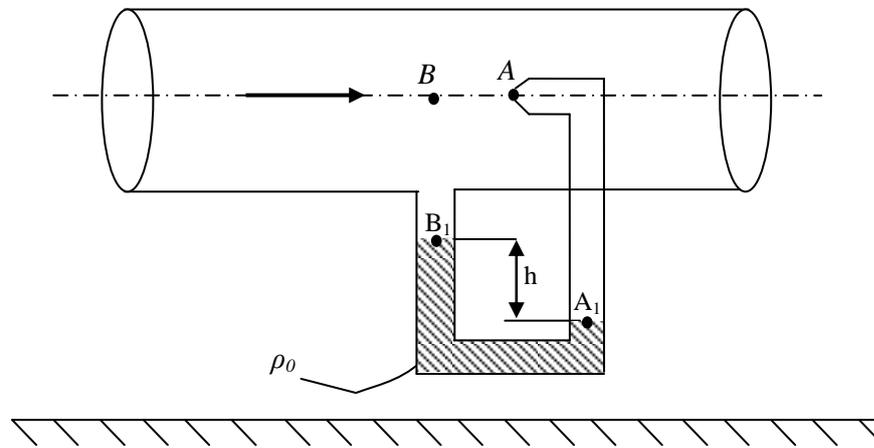


Figure III.6 Tube de Pitot

Nous pouvons donc appliquer la relation de Bernoulli sous la forme:

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + z + \frac{p}{\rho g} = cste \quad \text{III.44}$$

- L'ouverture A est dirigée face au jet et constitue un point d'arrêt (la vitesse du fluide en A est nulle,  $v_A = 0$ ).
- $z_A = z_B$
- $v_{A_1} = v_A = v_{B_1} = 0$
- La vitesse dans le tube est nulle (pas de mouvement), ce qui nous laisse écrire en appliquant le principe fondamental de la statique des fluides dans cette partie du système :

$$\begin{cases} p_{A_1} - p_{B_1} = \rho_0 g h \\ p_{B_1} - p_B = \rho g (z_B - z_{B_1}) \\ p_{A_1} - p_A = \rho g (z_A - z_{A_1}) \end{cases} \quad \text{III.45}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} \quad \text{III.46}$$

$$p_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + p_B \quad \text{III.47}$$

$$p_{A_1} - \rho g(z_A - z_{A_1}) = \rho \frac{v_B^2}{2} + p_{B_1} - \rho g(z_B - z_{B_1}) \quad \text{III.48}$$

$$v_B = \sqrt{2gh \cdot \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)} \quad \text{III.49}$$



# IV. DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS

## INCOMPRESSIBLES

### IV.1. Introduction

Lorsqu'une particule fluide est soumise à un système de forces non équivalent à zéro, elle se met en mouvement, et on applique sur elle les lois de la mécanique classique.

Sur un élément de volume, les forces appliquées sont :

- Forces de volume proportionnelles au volume
- Forces de pression proportionnelles aux surfaces et normales à ces surfaces
- Forces d'inertie proportionnelles à l'accélération
- Forces de frottement dues à la viscosité

### IV.2. Tenseur des contrainte dans un fluide visqueux

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des contraintes tangentielles dues à la viscosité (frottements).

En un point M d'une surface  $dS$ , la force de surface s'exprime comme :

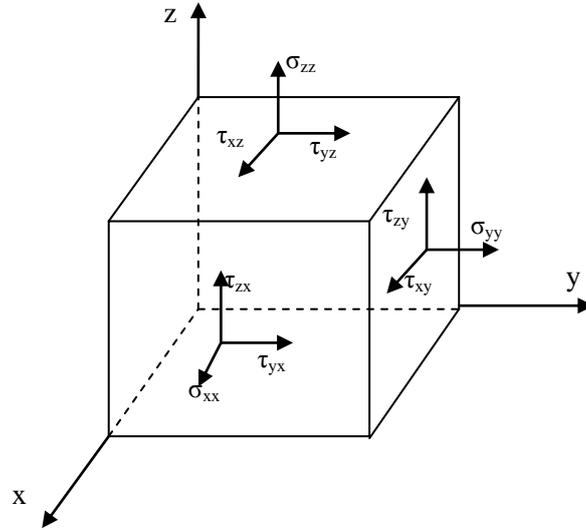
$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS \quad \text{IV.1}$$

Où  $\vec{T}_n$  est la contrainte qui s'exerce sur la surface de normale  $\vec{n}$ .

Considérons maintenant une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z \quad \text{IV.2}$$

$$\vec{T}_n dS = \vec{T}_x dS_x + \vec{T}_y dS_y + \vec{T}_z dS_z = (n_x \vec{T}_x + n_y \vec{T}_y + n_z \vec{T}_z) dS \quad \text{IV.3}$$



D'où :

$$\vec{T}_n = n_x \vec{T}_x + n_y \vec{T}_y + n_z \vec{T}_z \quad \text{IV.4}$$

Considérons une surface perpendiculaire à l'axe x. La normale à cette surface est :  $\vec{n} = \vec{e}_x$

La contrainte exercée sur cette surface est alors notée :  $\vec{T}_x$  et peut se décomposer comme suite :

$$\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z \quad \text{IV.5}$$

On remarque que la contrainte exercée sur la surface se décompose en une composante normale et deux composantes tangentielles. On peut de même considérer la surface perpendiculaire à l'axe y.

On a ainsi la contrainte :

$$\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z \quad \text{IV.6}$$

Et pour la surface  $\perp$  à l'axe z la contrainte s'exprime :

$$\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z \quad \text{IV.7}$$

En développant, on obtient :

$$\vec{T}_n = \begin{cases} (n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \vec{e}_x \\ (n_x \tau_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{yz}) \vec{e}_y \\ (n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \sigma_{zz}) \vec{e}_z \end{cases} \quad \text{IV.8}$$

Ce qui revient à effectuer le produit d'une matrice par la normale :

$$\vec{T}_n = \begin{pmatrix} \vec{T}_x \\ \vec{T}_y \\ \vec{T}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad \text{IV.9}$$

$$\vec{T}_n = \bar{\bar{T}} \vec{n} \quad \text{IV.10}$$

Avec :  $\bar{\bar{T}}$  tenseur des contraintes au point M. Ce tenseur des contraintes peut alors se décomposer en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur de trace nulle :

$$\bar{\bar{T}} = \alpha \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}' \quad \text{IV.11}$$

$$\bar{\bar{T}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{IV.12}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} = \alpha + \sigma'_{yy} \\ \sigma_{zz} = \alpha + \sigma'_{zz} \end{cases} \quad \text{IV.13}$$

Avec :  $\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0$  et d'où :  $\alpha = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}Tr(\bar{\bar{T}})$

Cette décomposition permet alors de reformuler la contrainte :

$$\vec{T}_n = \bar{\bar{T}} \vec{n} = \alpha \bar{\bar{I}} \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \vec{n} \quad \text{IV.14}$$

Il paraît alors deux termes dans l'expression de la force :

$$dF = \vec{T}_n dS = \bar{\bar{T}} \vec{n} dS = \underbrace{\alpha \bar{\bar{I}} \vec{n} dS}_{\substack{\text{pression} \\ \text{hydrostatique}}} + \underbrace{\bar{\bar{T}}' \vec{n} dS}_{\substack{\text{contraintes} \\ \text{de viscosité}}} \quad \text{IV.15}$$

- Le premier terme correspond évidemment à une force purement normale à la surface qu'on peut facilement identifier à la force de pression hydrostatique ou ( $\alpha = -p$ ).
- Le second terme rend compte spécifiquement des forces dues à la viscosité, c'est le tenseur des contraintes visqueuse.

$$dF = \frac{-p\bar{n}dS}{\text{pression hydrostatique}} + \frac{\bar{T}'\bar{n}dS}{\text{contraintes de viscosité}} \quad \text{IV.16}$$

### IV.3. Principe Fondamental de la Dynamique

De la même façon que l'on a établi l'équation fondamentale de la statique des fluides, nous allons établir l'équation fondamentale de la Dynamique en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément de volume fluide en mouvement.

Soit un système d'axes (O, x, y, z) et un volume de fluide élémentaire ( $dV=dx.dy.dz$ ). Il nous faut donc faire le bilan des forces s'exerçant en surface et en volume.

$$dF = dm \frac{d\vec{v}}{dt} = dF_s + dF_v = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{IV.17}$$

La dérivée particulaire est donnée par :  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$

Avec :

$$\begin{cases} dF_v = \rho dV \vec{g} \\ dF_s = dF_{sx} \vec{e}_x + dF_{sy} \vec{e}_y + dF_{sz} \vec{e}_z \end{cases} \quad \text{IV.18}$$

Intéressons-nous à la composante suivant y, chacune des 6 faces est soumise à une contrainte dont une des trois composantes contribue à  $dF_{sy}$  dans la direction de  $\vec{e}_y$ . On aura :

$$dF_{sy} = [(\tau_{xy})_{x+dx} - (\tau_{xy})_x] \cdot dydz + [(\sigma_{yy})_{y+dy} - (\sigma_{yy})_y] \cdot dx dz + [(\tau_{yz})_{z+dz} - (\tau_{yz})_z] \cdot dx dy \quad \text{IV.19}$$

Pour un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} (\tau_{xy})_{x+dx} = (\tau_{xy})_x + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} dx \\ (\sigma_{yy})_{y+dy} = (\sigma_{yy})_y + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} dy \\ (\tau_{yz})_{z+dz} = (\tau_{yz})_z + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} dz \end{cases} \quad \text{IV.20}$$

Ce qui conduit à :

$$dF_{sy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dx dy dz \quad \text{IV.21}$$

$$dF_{sy} = \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dV \quad \text{IV.22}$$

Et par analogie, suivant les autres axes :

$$dF_{sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV \quad \text{IV.23}$$

$$dF_{sz} = \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dV \quad \text{IV.24}$$

Ce qui peut s'écrire comme :

$$d\vec{F}_s = \vec{\nabla} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} dV = \vec{\nabla} \vec{T} dV \quad \text{IV.25}$$

Par conséquent :

$$dF = dF_s + dF_v = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{IV.26}$$

$$dF = \vec{\nabla} \vec{T} dV + \rho \vec{g} dV = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{IV.27}$$

$$\vec{\nabla} \vec{T} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{IV.28}$$

Au final :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \vec{T}' + \rho \vec{g} \quad \text{IV.29}$$

**C'est l'équation fondamentale de la dynamique (équation locale).**

En posant,  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , la projection de l'équation de la dynamique sur les 3 axes du repère cartésien donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right) - \rho g \end{aligned} \right. \quad \text{IV.30}$$

#### IV.4. Analyse du mouvement d'un élément de volume fluide – Déformations

Au sein de l'écoulement, chaque particule fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Afin d'analyser ces changements, considérons 2 points appartenant à la même particule fluide :

$M(x,y,z)$  et  $M'(x+dx,y+dy,z+dz)$

Soient  $v_M(u,v,w)$  la vitesse au point  $M$ , et  $v_{M'}(u',v',w')$  la vitesse au point  $M'$ . Exprimons  $v_{M'}$  en fonction de  $v_M$  et de  $dr=MM'$

$$v_{M'} = v(r+dr) + dv \quad \text{IV.31}$$

Avec  $dv$  l'accroissement de vitesse.

Alors :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{IV.32}$$

Avec :

$$\overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ est le tenseur des taux de déformation}$$

Or, quel que soit le tenseur, il est toujours possible de le décomposer en deux, pour en faire la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{IV.33}$$

$$\overline{\overline{\text{grad}\vec{v}}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\omega}} \quad \text{IV.34}$$

$\overline{\overline{D}}$  tenseur des taux de déformations pures (élongation + déformation angulaire).

$\overline{\overline{\omega}}$  tenseur des taux de rotations pures.

On peut en effet remarquer que :

$$\overline{\overline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{IV.35}$$

Par conséquent :

$$\overline{\overline{\omega}} d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{IV.36}$$

Finalement :

$$\vec{v}(r + dr) = \vec{v}(r) + \overline{\overline{D}} d\vec{r} + \overline{\overline{\omega}} \wedge d\vec{r} \quad \text{IV.37}$$

Ou bien :

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}_M + \overline{\overline{D}}MM' + \Omega \wedge MM' \quad \text{IV.38}$$

On dit que l'écoulement est irrotationnel lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotations pures :  $\overline{\overline{\omega}} = 0$

#### IV.5. Equation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien

Par définition, les fluides newtoniens sont ceux pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes de viscosité  $\overline{\overline{T}}$  dépendent linéairement des composantes du tenseur des taux de déformation pure  $\overline{\overline{D}}$ .

Considérons les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{D}}$  :  $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

On rappelle que ce tenseur est symétrique.

On admettra alors que pour un fluide isotrope, les éléments tensoriels de  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{D}}$  sont liés par la relation suivante :

$$\overline{\overline{T}} = 2\mu\overline{\overline{D}} + \mu'(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz})\delta_{ij} \quad \text{IV.39}$$

Avec :  $\mu$  la viscosité du fluide,  $\mu'$  viscosité de dilatation souvent négligée et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

Dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\overline{\overline{T}} = 2\mu\overline{\overline{D}} \quad \text{IV.40}$$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\overline{\overline{T}} + \rho\vec{g} \quad \text{IV.41}$$

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + 2\mu\vec{\nabla}\overline{\overline{D}} + \rho\vec{g} \quad \text{IV.42}$$

Par conséquent :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + 2\mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g} \quad \text{IV.43}$$

C'est l'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible, ou équation de Navier-Stokes (équation locale).

En posant,  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , la projection de l'équation de Navier-Stokes sur les 3 axes du repère cartésien donne :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{cases} \quad \text{IV.44}$$

Les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité sont les 4 équations simultanées nécessaires pour résoudre les problèmes de la mécanique des fluides à 4 inconnues, à savoir les composantes de la vitesse ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) et la pression  $p$ . Néanmoins la résolution de ce système requiert des conditions aux limites. La condition d'adhérence à la paroi doit être satisfaite, c'est à dire que les composantes normales et tangentielles de la vitesse à la paroi doivent être nulles. Nous allons voir ce que cela implique dans notre système d'équations.

## IV.6. Applications

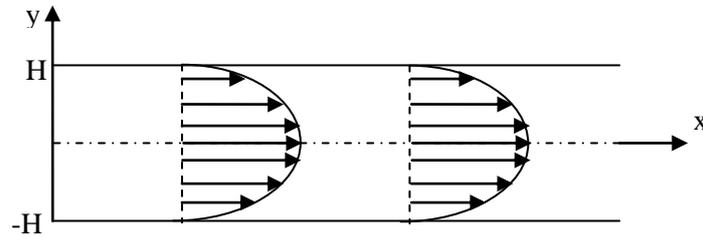
### IV.6.1. Ecoulement laminaire entre deux plans parallèles

On étudie le cas d'un fluide incompressible en écoulement permanent et bidimensionnel entre deux plaques planes et parallèles distantes de  $2H$ . Pour un écoulement unidirectionnel - on a pris ici la direction selon  $x$  -  $\vec{V}(u, 0, 0)$ ,

- Ecoulement permanent  $\partial u / \partial t = 0$ ,

- Écoulement uniforme (établi), la vitesse  $u$  est indépendante de la direction  $x$

$$(\partial u / \partial x = 0)$$



Les équations de Navier-Stokes, pour cet écoulement unidirectionnel se résume à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \end{cases} \quad \text{IV.45}$$

On note  $u = f(y)$  et  $p = f(x)$  car  $u$  et  $p$  ne dépendent, respectivement, que de  $y$  et  $x$ .

En intégrant deux fois la première équation on obtient :

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad \text{V.46}$$

Avec  $C_1$  et  $C_2$  les deux constantes d'intégration, obtenues en utilisant les différentes conditions aux limites.

Si on pose d'une manière générale :

$$\begin{cases} y = H \rightarrow u = 0 \\ y = -H \rightarrow u = 0 \end{cases} \quad \text{IV.47}$$

On obtient :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) (y^2 - H^2) = \frac{H^2}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \left( \frac{y^2}{H^2} - 1 \right) \quad \text{IV.48}$$

En tenant compte de la condition aux limites :  $y = 0 \rightarrow u = u_{\max}$

$$u(y) = u_{\max} \left( \frac{y^2}{H^2} - 1 \right) \quad \text{IV.49}$$

Avec :

$$u_{\max} = \frac{H^2}{2\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad \text{IV.50}$$

Le profil de pression est donné par :

$$\left( \frac{dp}{dx} \right) = -u_{\max} \frac{2\mu}{H^2} \quad \text{IV.51}$$

$$p(x) = -\frac{2\mu u_{\max}}{H^2} x + p_0 \quad \text{IV.52}$$

En effet, la pression décroît linéairement avec  $x$ .

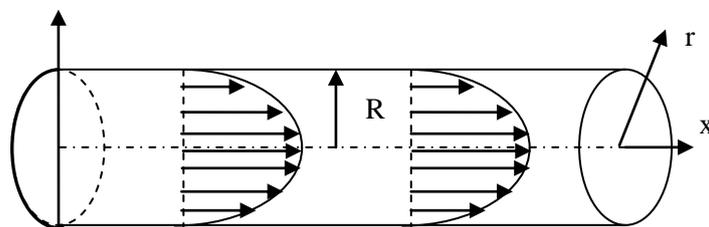
Le débit volumique est donné par :

$$Q_v = \iint u(y) dS = \int_{-H}^H u(y) dy \quad \text{IV.53}$$

$$Q_v = -\frac{2}{3\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) H^3 \quad \text{IV.54}$$

#### IV.6.2. Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

Un écoulement laminaire, incompressible et permanent dans une conduite droite et cylindrique de section circulaire est appelé écoulement de Hagen- Poiseuille. Cet écoulement peut être considéré comme étant axisymétrique par rapport au centre de la conduite.



On va passer en coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ ; la vitesse  $\vec{V}(v_x, v_r, u_\theta)$  se réduit encore à

$$\vec{V}(v_x, 0, 0).$$

Equations de continuité en coordonnées cylindriques est donné par:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \cdot r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{IV.55}$$

Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho \cdot r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad \text{IV.56}$$

Les équations de Navier-Stokes, pour cet écoulement unidirectionnel se résume à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \text{IV.57}$$

On note  $v_x = f(r)$  et  $p = f(x)$  car  $v$  et  $p$  ne dépendent, respectivement, que de  $r$  et  $x$ .

La première équation peut être réécrite :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) \quad \text{IV.58}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = r \frac{1}{\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \quad \text{IV.59}$$

En intégrant, on obtient :

$$\left( r \frac{dv_x}{dr} \right) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) r^2 + C_1 \quad \text{IV.60}$$

Ou :

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad \text{IV.61}$$

En intégrant une deuxième fois :

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad \text{IV.62}$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} r=0 & \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} v_x(r) = v_{\max} \quad (v_x(r) \text{ est finie}) \\ r=R & \rightarrow v_x(R) = 0 \end{cases} \quad \text{IV.63}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) R^2 \end{cases} \quad \text{IV.64}$$

$$v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) (r^2 - R^2) \quad \text{IV.65}$$

$$v_x(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \quad \text{IV.66}$$

Or par symétrie,  $v_x(0) = v_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right)$  ceci conduit au profil de vitesse suivant :

$$v_x(r) = v_{\max} \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \quad \text{IV.67}$$

Le profil de vitesse est donc parabolique.

Le débit volumique  $Q$  traversant la section est défini par :

$$Q = \int_0^R v_x(r) (2\pi r dr) \quad \text{IV.68}$$

$$Q = \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) 2\pi r dr \quad \text{IV.69}$$

$$Q = \frac{\pi}{128\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) D^4 \quad \text{IV.70}$$

Avec  $D$  le diamètre de la conduite  $D=2R$ .

La vitesse moyenne  $V_{moy}$  est donnée par :

$$V_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{\pi}{128\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) D^4 \quad \text{IV.71}$$

$$V_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{1}{8\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) R^2 \quad \text{IV.72}$$

$$V_{moy} = \frac{1}{2} v_{\max} \quad \text{IV.73}$$

Le profil de pression est donné par :

$$\left( \frac{dp}{dx} \right) = -v_{\max} \frac{4\mu}{R^2} \quad \text{IV.74}$$

$$p(x) = -\frac{4\mu v_{\max}}{R^2} x + p_0 \quad \text{IV.75}$$

En effet, la pression décroît linéairement avec  $x$ .

Pour une longueur de conduite  $L$ , on a :

$$p_L = -\frac{4\mu v_{\max}}{R^2} L + p_0 \quad \text{IV.76}$$

$$\frac{p_L - p_0}{L} = -\frac{4\mu v_{\max}}{R^2} \quad \text{IV.77}$$

Si  $\frac{\Delta p}{L} = \frac{p_L - p_0}{L - 0} = \frac{dp}{dx} = Cst$  on a

$$p(x) = -\frac{\Delta p}{L} x + p_0 \quad \text{IV.78}$$

La chute de pression (ou perte de charge)  $\Delta p$  entre la section d'entrée et la sortie de la conduite séparées d'une distance  $L$ , est donnée par :

$$\left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{8\mu V_{moy}}{R^2} = \frac{32\mu V_{moy}}{D^2} \quad \text{IV.79}$$

La chute de pression dans une conduite est provoquée par les forces de viscosité ce qui signifie que la perte de charge est régulière ou linéaire,  $\Delta h_1$  ; on écrit alors:

$$\Delta h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu L V_{moy}}{\rho g D^2} \quad \text{IV.80}$$

$$\Delta h_l = \frac{32\mu L V_{moy}}{\rho g D^2} \frac{\frac{V_{moy}^2}{2}}{\frac{V_{moy}^2}{2}} = \frac{64\mu L}{\rho g D^2 V_{moy}} \frac{V_{moy}^2}{2} = \frac{64}{\frac{\rho D V_{moy}}{\mu}} \frac{L}{D} \frac{V_{moy}^2}{2g} \quad \text{IV.81}$$

$$\Delta h_l = \left( \frac{64}{\text{Re}} \right) \left( \frac{L}{D} \right) \left( \frac{V_{moy}^2}{2g} \right) = \lambda \left( \frac{L}{D} \right) \left( \frac{V_{moy}^2}{2g} \right) \quad \text{IV.82}$$

Avec : Re est le nombre de Reynolds pour une conduite circulaire. On appelle  $\lambda$  le coefficient de frottement ou de perte de charge. Ces résultats sont valables seulement pour un écoulement laminaire dans conduite circulaire.



# V. THEOREME DE TRANSPORT ET EQUATIONS DE BILAN

## V.1. Introduction

Jusqu'à présent, les principes de conservation de masse et de quantité de mouvement pour des systèmes fluides ont été exprimés pour un volume infinitésimal en utilisant une formulation des équations dite locale. Pour beaucoup d'applications, une résolution complète des équations de bilan locales n'est pas réalisable.

Dans ce qui va suivre une autre écriture des équations de bilan sera présentée une formulation dite globale ou intégrale sur un volume de contrôle.

Cette multitude de formulation est au début perçue comme une complexité supplémentaire de la mécanique des fluides, mais à l'usage, elle s'avère fort pratique car cela permet une meilleure compréhension physique et une résolution plus simple des problèmes.

## V.2. Formulation des théorèmes de transport

En Mécanique des Fluides, l'évolution des grandeurs matérielles est analysée à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines fluides macroscopiques. Le transport de ces grandeurs dans l'écoulement est explicité en suivant le mouvement; il est par conséquent nécessaire d'établir l'expression de la dérivée particulière d'une intégrale volumique.

### V.2.1. Volumes et surfaces de contrôle

Un volume de contrôle est un volume imaginaire sur lequel on procède au bilan intégral d'une grandeur physique comme la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie. On appelle surface de contrôle l'enveloppe d'un volume de contrôle.

### V.2.2. Formulation du cas général

Soit un volume de contrôle  $V$  limité par une surface  $S$ . Soient  $f(\vec{x}, t)$  une fonction scalaire continue et dérivable et  $I(t)$  son intégrale sur le volume  $V$  :

$$I(t) = \iiint_V f(\vec{x}, t) dV \quad \text{V.1}$$

Le taux de variation dans le temps de l'intégrale  $I(t)$  est donné par :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_V f(\vec{x}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad \text{V.2}$$

Où  $\vec{v}$  désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et  $\vec{n}$  la normale extérieure.

Le second membre du théorème de transport peut être mis sous la forme d'une intégrale de volume. Il suffit d'utiliser la formule de Green-Ostrogradski :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_V f(\vec{x}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(f \cdot \vec{v}) dV \quad \text{V.3}$$

On obtient:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f dV = \iiint_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \cdot \vec{v}) \right] dV \quad \text{V.4}$$

Le second membre peut être réécrit en utilisant l'identité :  $\text{div}(f \cdot \vec{v}) = f \cdot \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$

En introduisant aussi la dérivée particulaire :  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$

On écrira alors :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f dV = \iiint_V \left[ \frac{df}{dt} + f \text{div}(\vec{v}) \right] dV \quad \text{V.5}$$

### V.2.3. Cas particuliers

Examinons le cas particulier où  $f(\vec{x}, t)$  est une fonction scalaire constante  $f(\vec{x}, t) = 1$ , dans ce cas précis l'intégrale  $I(t)$  représente le volume du domaine considéré :

$$I(t) = \iiint_V dV = V(t) \quad \text{V.6}$$

Le taux de variation du volume de contrôle n'est que la dérivée particulière  $\frac{dI(t)}{dt}$  soit :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) dV \quad \text{V.7}$$

La divergence de la vitesse locale du fluide représente donc le taux de variation relative du volume de la particule fluide.

On dit qu'un écoulement de fluide est isovolume ou incompressible si le taux de variation volumique est nul en tout point et on écrit :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{V.8}$$

Examinons le cas maintenant le cas où  $f(\vec{x}, t)$  est la masse volumique  $\rho(\vec{x}, t)$  du fluide, dans ce cas l'intégrale  $I(t)$  représente la masse du domaine fluide considéré :

$$I(t) = M(V) = \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV \quad \text{V.9}$$

La masse du domaine est conservée au cours du mouvement ce qui nous laisse écrire :

$$\frac{d}{dt} M(V) = \iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad \text{V.10}$$

Dans le cadre de l'hypothèse de continuité cette expression reste vraie sur un volume infinitésimal. On en déduit le principe de conservation de la masse sous sa forme locale ou bien ce que nous avons déjà appelé plus haut **équation de continuité** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{V.11}$$

#### V.2.4. Principe de bilan

Les lois générales de la mécanique des fluides s'appuient sur le principe commun de l'analyse de bilan appelées souvent loi de conservation. Ce principe exprime qu'une grandeur physique est soit

invariante (d'où le vocable loi de conservation), soit varie d'une manière définie en fonction des influences extérieures (d'où le vocable loi de bilan).

Remarquons d'abord que les grandeurs physiques astreintes à suivre des lois de bilan sont des grandeurs extensives (masse, quantité de mouvement, énergie, nombre de molécules d'une espèce particulière...). Il s'agit donc de grandeurs matérielles dont on évalue la quantité intégrale sous la forme d'une intégrale matérielle:

$$I(t) = \iiint_V \rho f dV \quad \text{V.12}$$

dont nous savons calculer la dérivée particulaire. Les lois de bilans sont donc des relations entre la variation dans le mouvement de  $I(t)$  et les mécanismes physiques qui génèrent ces variations.

Les mécanismes physiques qui produisent (sources) ou détruisent (puits) la grandeur matérielle considérée relèvent de deux classes bien distinctes:

- des sources (ou puits), effectivement distribuées à l'intérieur du domaine  $V_m$  mais commandées par un système extérieur (c'est le cas des forces de volume comme source de quantité de mouvement),
- des sources distribuées sur la frontière  $S$  du volume de contrôle et commandées par le matériau situé hors de  $V$  (c'est le cas des forces de surfaces pour la quantité de mouvement).

On peut donc écrire un bilan sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \Sigma dV + \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS \quad \text{V.13}$$

où  $\Sigma$  est la densité volumique des sources internes et  $\vec{\varphi}$  le flux (vecteur ou tenseur) surfacique des sources externes. En appliquant le théorème de la divergence au dernier terme de la relation et le théorème de transport, on peut écrire:

$$\iiint_V \rho \frac{df}{dt} dV = \iiint_V [\Sigma + \text{div}(\vec{\varphi})] dV \quad \text{V.14}$$

### V.2.5. Equation de bilan de masse

La masse d'un système matériel étant conservative, les termes sources  $\Sigma$  et les flux  $\vec{\varphi}$  sont identiquement nuls. L'équation de conservation de la masse est obtenue en écrivant les formulations pour  $f \equiv 1$ . Cette équation a déjà été établie plus haut :

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad \text{V.15}$$

### V.2.6. Equation de bilan de quantité de mouvement

La quantité de mouvement totale contenue dans le volume de contrôle  $V$  est donnée par l'intégrale suivante :

$$I(t) = \iiint_V \rho \vec{v} dV \quad \text{V.16}$$

Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'est autre que la loi de Newton qui s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = F_{ext} \quad \text{V.17}$$

où  $F_{ext}$  est la résultante des forces extérieures exercées sur le volume  $V$ . La force totale exercée sur le volume  $V$  est la somme des contributions des forces à distance (ou volumiques) qui s'exercent en tout point du domaine et qui peuvent être représentées par une intégrale de volume et des forces de contact (ou surfaciques) représentées par une intégrale de surface correspondant au flux du tenseur des contraintes  $\sigma$  à travers la surface  $S$  du volume de contrôle.

$$F_{ext} = \iiint_V \rho \vec{g} dV + \iint_S \overline{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad \text{V.18}$$

Ce qui permet 'établir la forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV + \iint_S \overline{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad \text{V.17}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV + \iint_S \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} dS \quad \text{V.18}$$

Ce qui peut être écrit :

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \iiint_V \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV + - \iiint_V \overline{\overline{\text{div}(p)}} dV + \iiint_V \overline{\overline{\text{div}(\sigma')}} dV \quad \text{V.19}$$

Ou encore :

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \iint_S (\rho \vec{v} \vec{v}) \vec{n} dS = \iiint_V \rho \vec{g} dV + - \iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \overline{\overline{\sigma'}} \cdot \vec{n} dS \quad \text{V.20}$$

# VI. COUCHE LIMITE

## VI.1. Introduction

Dans les écoulements à grande vitesse autour d'obstacle ou près d'une paroi, le nombre de Reynolds de l'écoulement est le plus souvent très grand, ce qui fait que l'écoulement peut être considéré à l'échelle macroscopique comme étant dans un régime turbulent et les effets de la viscosité sont négligeables. Toutefois, près d'une paroi solide, la condition d'adhérence implique que la vitesse doit tendre rapidement vers 0.

Si on définit un nombre de Reynolds local à l'aide de la vitesse réelle (et non d'une échelle de vitesse), celui-ci tend également vers 0, ce qui veut dire que très localement, dans le voisinage de la paroi, l'écoulement est dans un régime laminaire et les effets de viscosité deviennent prédominants.

Cette zone de faible épaisseur accolée à la paroi s'appelle une couche limite.

Cette notion a été proposée par Prandtl en 1905 :

- près d'une paroi solide, il existe une couche de très faible épaisseur dans laquelle les forces de viscosité sont prédominantes ;
- loin des parois, l'écoulement peut être considéré comme turbulent ou non visqueux.

Cette décomposition permet de traiter un grand nombre de problème en découplant les effets à grande échelle (liés à la turbulence) et ceux intervenant à petite échelle près d'une paroi (et faisant jouer un rôle crucial à la viscosité du fluide).

Considérons maintenant l'écoulement d'un fluide sur une paroi plane. Si ce fluide est parfait, il va glisser sur la paroi sans que la présence de celle-ci perturbe l'écoulement (voir Fig. VI.1 ci-dessous).

Cette situation ne correspond pas à l'expérience physique ; en réalité, on observe la situation suivante : le fluide réel adhère à la paroi ( $u = 0$  en  $y = 0$ ) puis sa vitesse augmente progressivement à mesure que la distance à la paroi augmente pour atteindre finalement, à une distance  $y = \delta$  de la paroi, une valeur

dite “vitesse extérieure”, semblable à la vitesse d’un fluide parfait - de viscosité nulle donc -s’écoulant sur cette même paroi.

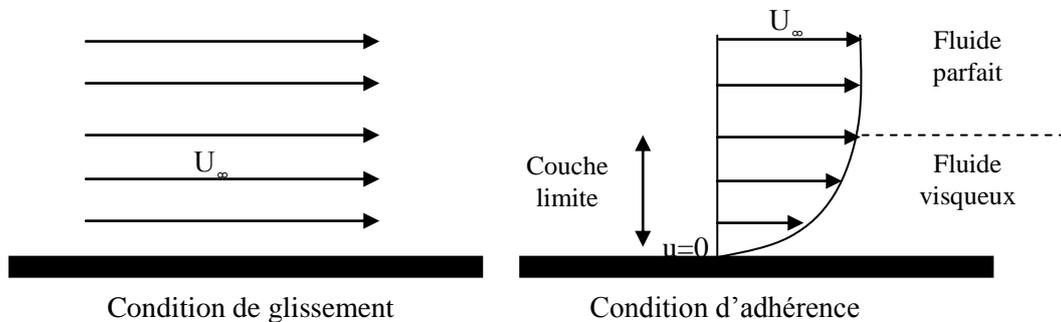


Figure VI.1 Écoulement d’un fluide parfait et d’un fluide visqueux sur une plaque plane

## VI.2. Les équations de la couche limite laminaire

Dans le cas d’un fluide newtonien en écoulement bidimensionnel, incompressible et permanent, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Equations de Navier- Stokes) s’écrivent comme suit :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{VI.1}$$

Equations de quantité de mouvement

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad \text{VI.2}$$

Le fait que l’épaisseur de la couche limite soit petite devant les autres dimensions caractéristiques de l’écoulement permet de faire des approximations dans l’équation de Navier-Stokes.

On admet aussi que:

- la vitesse de l’écoulement extérieur est d’ordre  $U_\infty$

- la longueur caractéristique est d'ordre  $L$
- l'épaisseur caractéristique est d'ordre  $\delta$  ( $\delta$  : épaisseur de la couche limite), avec  $\delta \ll L$
- le gradient de la pression est d'ordre  $\rho U_\infty^2$
- $v \ll u$  ainsi que  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

VI.2.1. Normalisation des termes qui figurent dans les équations de Navier- Stokes:

$$\begin{cases} u^* = \frac{u}{U_\infty} & x^* = \frac{x}{L} \\ v^* = \frac{v}{V} & y^* = \frac{y}{\delta} \\ p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2} \end{cases} \quad \text{VI.3}$$

$V$  : une vitesse de normalisation suivant la direction transversale que l'on déterminera plus tard.

Les dérivées partielles de l'équation de continuité s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad \text{VI.4}$$

D'où l'équation de continuité :

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{VI.5}$$

Pour que cette équation soit satisfaite, ses deux termes doivent être du même ordre de grandeur:

$$\frac{U_\infty}{L} \equiv \frac{V}{\delta} \quad \text{VI.6}$$

On peut donc déduire l'ordre de grandeur de la vitesse transversale :

$$V \cong \frac{U_\infty}{L} \delta \quad \text{VI.7}$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^2}{L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ \frac{U_\infty^2 \delta}{L} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^2 \delta}{L} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{U_\infty^2}{\delta} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu \frac{U_\infty \delta}{L^3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \nu \frac{U_\infty}{\delta L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \end{cases} \quad \text{VI.8}$$

En divisant la première équation par  $\frac{U_\infty^2}{L}$  et la deuxième par  $\frac{U_\infty^2}{\delta}$  on aura :

$$\begin{cases} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\nu L}{U_\infty \delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ \delta^2 \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\nu \delta^2}{U_\infty L^3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \end{cases} \quad \text{VI.9}$$

Dans un tel cas d'écoulement, l'accroissement de la vitesse axiale est plus important suivant y que suivant x.

$$\text{Par conséquent: } \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{Avec: } \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Il en résulte que le premier terme visqueux de la première équation est négligeable devant le deuxième:

$$\frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{\nu L}{U_\infty \delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad \text{VI.10}$$

L'existence du terme  $\frac{\delta^2}{L^2} \ll 1$  fait que tout son premier membre tend vers zéro.

Les coefficients de l'inégalité ci-dessous (VI.10) sont du même ordre de grandeur

$$\frac{\nu}{U_\infty L} \frac{L^2}{\delta^2} \cong \frac{\nu L}{U_\infty \delta^2} \cong 1$$

avec  $\frac{\nu}{U_\infty L} \cong \frac{\delta^2}{L^2}$  est très faible devant l'unité.

On en déduit que les deux termes visqueux de l'équation (VI.8) sont nuls.

Puisque  $\frac{\nu}{U_\infty L} \cong \frac{\delta^2}{L^2}$  ce qui nous permet d'écrire :

$$\delta \cong \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} \cong \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad \text{VI.11}$$

Ainsi pour que l'approximation  $\frac{\delta}{L} \ll 1$  soit vraie, on doit avoir le nombre de Reynolds basé sur la distance  $L$  suffisamment grand, ce qui explique pourquoi on classe les écoulements de couche limite comme des écoulements à grands nombres de Reynolds.

Cependant, si l'on se place à une abscisse  $x$  quelconque, on peut toujours considérer que la plaque s'arrête là, et que sa longueur est  $x$ . L'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  n'en est évidemment pas affectée. Aussi, avec un abus d'écriture, on définit le « nombre de Reynolds local  $\text{Re}_x$  » par :

$$\delta(x) \cong \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{VI.12}$$

En régime laminaire le nombre de Reynolds est  $\text{Re}_x \leq 5 \cdot 10^5$

### VI.2.2. Equations de la couche limite - équations de Prandtl (1904)

Les équations réduites de Navier-Stokes s'écrivent en non dimensionnel comme suit :

$$\begin{cases} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu L}{U_\infty \delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \end{cases} \quad \text{VI.13}$$

Les équations de mouvement pour la couche limite laminaire ont alors pour expression:

Equations de quantité de mouvement

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{VI.14}$$

On en déduit que dans une couche limite, la pression ne varie que suivant la direction de l'écoulement

$$p = p_{\infty}(x).$$

A l'extérieur de la couche limite le fluide se comporte comme étant un fluide parfait, en raison de l'absence de frottement visqueux nous pouvons appliquer la relation de Bernoulli pour écrire l'égalité suivante :

$$p_{\infty} + \rho gh + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = cst \quad \text{VI.15}$$

$$p_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = cst \quad \text{VI.16}$$

$$\frac{dp_{\infty}}{dx} + \rho U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = 0 \quad \text{VI.17}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_{\infty}}{dx} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \quad \text{VI.18}$$

En remplaçant dans l'équation de quantité de mouvement, on aura les équations de la couche limites suivantes :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{VI.19}$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{VI.20}$$

Et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y = 0 & \rightarrow & u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty & \rightarrow & u = U_{\infty} \end{cases} \quad \text{VI.21}$$

On va s'intéresser dans la suite de ce cours à l'analyse des solutions de cette équation et à l'obtention de telles solutions, exactes (dans certains cas particuliers) ou approchées (dans le cas général).

### VI.3. Résolution des équations de la couche limite

L'obtention d'une solution des équations de couche limite suppose la résolution analytique du système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires muni des conditions aux limites appropriées. On ne sait pas résoudre ce problème dans le cas général et on se contente donc de solutions approchées. En outre, leur résolution numérique complète est extrêmement ardue. Cependant, sous certaines conditions de nature expérimentale, des simplifications sont possibles qui permettent de faciliter grandement la résolution du problème où il est possible de déterminer des solutions "quasi-exactes" des équations de la couche limite.

#### VI.3.1. Solution de Blasius

L'écoulement sur une plaque plane, c'est-à-dire à vitesse extérieure constante, représente l'exemple de la couche limite le plus simple. C'est le cas de Blasius.

- En dehors de la couche limite, l'écoulement est uniforme, sans gradient de vitesse :

$$U_{\infty} = \text{Cst}$$

- Ce qui implique à partir de l'équation d'Euler que  $\frac{dp_{\infty}(x)}{dx} = 0$

Les équations de couche limite sont donc:

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{VI.22}$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{VI.23}$$

C'est le problème dont la solution a été obtenue par Blasius. Comme l'écoulement est incompressible,

le champ de vitesse est déterminé par une fonction de courant,  $\psi$ , telle que  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ .

L'équation de continuité est alors satisfaite. La similitude de la solution requiert que:

$$\frac{u}{U_\infty} = g(\eta) \quad \text{VI.24}$$

$\eta$  est un paramètre sans dimension construit à partir de  $x$  et de  $y$  :

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad \text{où} \quad \delta(x) = \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \text{VI.25}_{a,b}$$

Pour exprimer les différents termes de l'équation de quantité de mouvement, il nous faut d'abord exprimer la fonction de courant  $\psi$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = u \delta(x) = U_\infty \cdot \delta(x) \cdot g(\eta) \quad \text{VI.26}$$

La fonction de courant est nécessairement de la forme :

$$\psi = U_\infty \cdot \delta(x) \cdot G(\eta) \quad \text{VI.27}$$

Avec :

$$g(\eta) = G'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad \text{VI.28}$$

D'où :

$$u = U_\infty G'(\eta) \quad \text{VI.29}$$

Exprimons ensuite la composante  $v$  de la vitesse :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U_\infty \left[ \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} G(\eta) + \delta(x) \frac{\partial G(\eta)}{\partial x} \right] = -U_\infty \left[ \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} G(\eta) + \delta(x) \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad \text{VI.30}$$

Avec :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{\delta^2(x)} \delta'(x) = -\eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \quad (\text{Théorème de dérivation des fonctions composées}) \quad \text{VI.31}$$

D'où :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U_\infty [\delta'(x)G(\eta) - \eta \delta'(x)G'(\eta)] \quad \text{VI.32}$$

$$v = U_\infty \delta'(x) [\eta G' - G] \quad \text{VI.33}$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{cases} u = U_{\infty} G' \\ v = U_{\infty} \delta' [\eta G' - G] \end{cases} \quad \text{VI.34}$$

Nous devons encore calculer les autres termes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U_{\infty} \frac{\delta'}{\delta} \eta G'' \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U_{\infty}}{\delta} G'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty}}{\delta^2} G''' \end{cases} \quad \text{VI.35}$$

On injecte ensuite ces expressions dans l'équation de quantité de mouvement suivant x et on en déduit :

$$\nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} G''' = -U_{\infty}^2 \frac{\delta'}{\delta} \eta G' G'' + U_{\infty}^2 \frac{\delta'}{\delta} (\eta G' - G) G'' \quad \text{VI.36}$$

$$\nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} G''' = U_{\infty}^2 \frac{\delta'}{\delta} ((\eta G' - G) G'' - \eta G' G'') \quad \text{VI.37}$$

$$\nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} G''' + U_{\infty}^2 \frac{\delta'}{\delta} G G'' = 0 \quad \text{VI.38}$$

$$G''' + U_{\infty} \frac{\delta \delta'}{\nu} G G'' = 0 \quad \text{VI.39}$$

Ceci impose que le coefficient du second terme soit constant  $U_{\infty} \frac{\delta \delta'}{\nu} = \sigma = cst$

Cependant, le choix de la constante  $\sigma$  est arbitraire, et ne modifie pas le résultat final. La convention usuelle, due à Blasius, consiste à prendre :

$$\sigma = \frac{1}{2}$$

L'équation de Blasius s'écrira donc en pratique :

$$2G''' + G G'' = 0 \quad \text{VI.40}$$

Nous avons maintenant en main une équation différentielle à une inconnue  $F(\eta)$  et une seule variable  $\eta$ , qui remplace le système de deux équations aux dérivées partielles à deux inconnues  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$ .

Les **conditions aux limites** associées à l'équation de Blasius sont :

- A la paroi :

$$y=0 \rightarrow \eta=0 \quad \begin{cases} u=0 \rightarrow G'(0) = \frac{u(=0)}{U_\infty} = 0 \\ v=0 \rightarrow G(0) = 0 \end{cases} \quad \text{VI.41}$$

- Loin de la paroi :

$$y \rightarrow \infty \rightarrow \eta \rightarrow \infty \quad u = U_\infty \rightarrow G'(\infty) = 1 \quad \text{VI.42}$$

Au final l'équation de Blasius s'écrit :

$$\begin{cases} 2G''' + GG'' = 0 \\ G(0) = 0, \quad G'(0) = 0 \\ G'(\infty) = 1 \end{cases} \quad \text{VI.43}$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. Elle doit donc être résolue par intégration numérique.

Pour ce faire, on la réécrit sous forme d'un système de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre:

$$\begin{cases} G'(\eta) = F(\eta) \\ F'(\eta) = H(\eta) = G''(\eta) \\ H'(\eta) = -\frac{1}{2}G(\eta)H(\eta) = G''' \end{cases} \quad \text{VI.44}$$

Le système est donc sous la forme :

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} G(\eta) \\ F(\eta) \\ H(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\eta) \\ H(\eta) \\ -\frac{1}{2}G(\eta)H(\eta) \end{pmatrix} \quad \text{VI.45}$$

Le système d'équation peut être intégré numériquement par la "méthode de tir". On débute l'intégration en  $\eta = 0$  avec  $G(0) = 0$  et  $F(0) = G'(0) = 0$ . En suite prendre une valeur pour  $H(0) = G''(0)$ , intégrer numériquement jusqu'à  $\eta \gg 1$  en suite itérer la valeur  $H(0)$  jusqu'à obtenir  $F(\eta) = G'(\eta) \rightarrow 1$  quand  $\eta \gg 1$ .

Les profils de fonction de courant,  $\frac{\psi(\eta)}{U_\infty \delta(x)} = G(\eta)$ , de vitesse,  $\frac{u}{U_\infty} = G'(\eta)$  et de contrainte de cisaillement,  $\frac{\tau \delta(x)}{\mu U_\infty} = G''(\eta)$ , ainsi obtenus sont présentés à la figure VI.2.

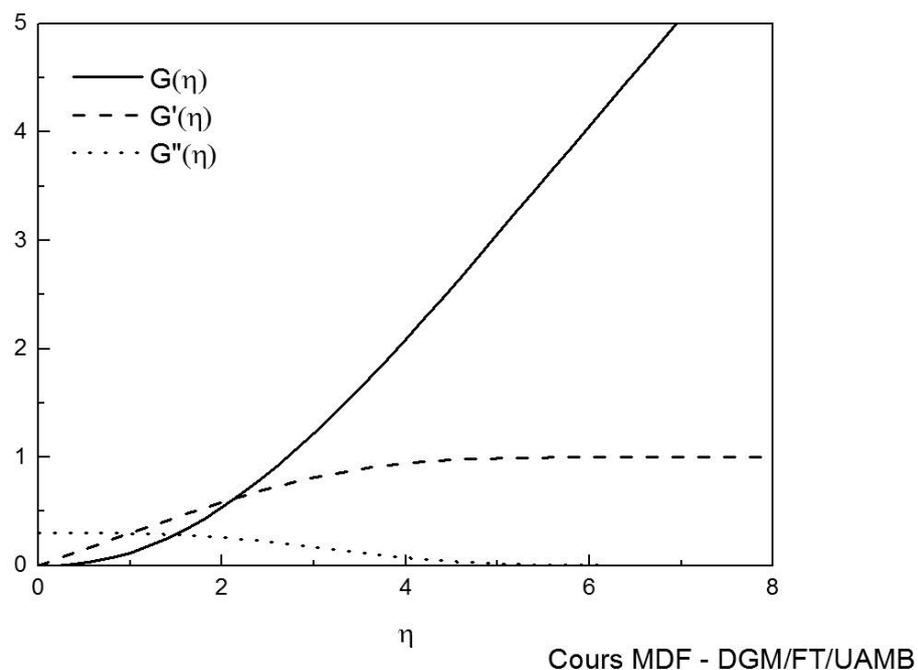


Figure VI.2 Solution de Blasius pour la couche limite avec  $U_\infty$  constant.

$\eta$	G	G'	G''
0	0	0	0,3
0,2	0	0,06	0,3
0,4	0,012	0,12	0,3
0,6	0,036	0,18	0,29964
0,8	0,072	0,239928	0,298561
1	0,119986	0,29964	0,296412
1,2	0,179914	0,358923	0,292855
1,4	0,251698	0,417494	0,287586
1,6	0,335197	0,475011	0,280348
1,8	0,430199	0,53108	0,270951
2	0,536415	0,585271	0,259294
2,2	0,653469	0,637129	0,245385
2,4	0,780895	0,686207	0,22935
2,6	0,918136	0,732077	0,21144
2,8	1,064552	0,774365	0,192027
3	1,219425	0,81277	0,171585
3,2	1,381979	0,847087	0,150661
3,4	1,551396	0,877219	0,12984
3,6	1,72684	0,903187	0,109697
3,8	1,907477	0,925127	0,090754
4	2,092503	0,943278	0,073443
4,2	2,281158	0,957966	0,058075
4,4	2,472752	0,969581	0,044827
4,6	2,666668	0,978547	0,033743
4,8	2,862377	0,985295	0,024745
5	3,059436	0,990244	0,017662
5,2	3,257485	0,993776	0,012258
5,4	3,45624	0,996228	0,008265
5,6	3,655486	0,997881	0,005408
5,8	3,855062	0,998963	0,003431
6	4,054855	0,999649	0,002109
6,2	4,254785	1,000071	0,001254
6,4	4,454799	1,000321	0,00072
6,6	4,654863	1,000466	0,000399
6,8	4,854956	1,000545	0,000213
7	5,055065	1,000588	0,00011

Tableau VI.1 Solutions numériques de l'équation de Blasius

### VI.3.2. Contrainte de cisaillement et coefficient de frottement à la paroi

La contrainte visqueuse locale à la paroi s'écrit :

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_\infty}{\delta(x)} G''(0) = \frac{\mu U_\infty}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} G''(0) \quad \text{VI.46}$$

$$\tau_p = \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{\frac{1}{2}} U_\infty^{\frac{3}{2}} G''(0) \quad \text{VI.47}$$

La valeur numérique de  $G''(0)=0.3$  d'où :

$$\tau_p = 0.3 \cdot \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{\frac{1}{2}} U_\infty^{\frac{3}{2}} \quad \text{VI.48}$$

Le coefficient adimensionnel de frottement local s'écrit alors :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 0.6 \cdot \left( \frac{\mu}{U_\infty \rho x} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.6 \text{Re}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{VI.49}$$

### VI.3.3. Epaisseur de la couche limite

Par convention l'épaisseur de la couche limite  $\delta(x)$  est définie par :

$$\frac{u(\delta)}{U_\infty} = 0.99 \quad \text{VI.50}$$

D'autre part :  $\frac{u(\eta)}{U_\infty} = G'(\eta)$

Posons :  $\eta_\delta = \frac{\delta_{0.99}}{\delta(x)}$

$$\frac{u(\eta_\delta)}{U_\infty} = G'(\eta_\delta) = 0.99 \quad \text{VI.51}$$

La résolution numérique de l'équation de Blasius donne :  $\eta_\delta = 5$ , d'où :

$$\delta_{0.99} = 5\delta(x) \quad \frac{\delta_{0.99}}{x} = 5 \cdot \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{VI.52}_{a,b}$$



# VII. ANALYSE DIMENSIONNELLE ET SIMILITUDE

## VII.1. Introduction

Dans cette partie on regardera deux sujets complémentaires: l'analyse dimensionnelle et la similitude.

L'analyse dimensionnelle est une méthode qui s'intéresse à l'obtention d'équations décrivant des phénomènes à partir de la simple supposition que ceux-ci peuvent être caractérisés par certaines variables. Le résultat d'une analyse dimensionnelle est l'obtention de groupes sans dimensions équivalents au système dimensionnel. Cette opération réduit le nombre de variables décrivant le problème.

La similitude, est une méthode de travail très utilisée en ingénierie permettant l'étude de problèmes sur la base d'expérimentation et de comparaison. Elle est souvent appliquée lorsqu'on ne peut pas effectuer un essai en grandeur nature. Dans ce cas, on fait une étude sur maquette et la similitude permet d'extrapoler les résultats vers le cas où l'objet réel, appelé le prototype.

## VII.2. Analyse dimensionnelle

Les objectifs spécifiques de l'analyse dimensionnelle sont:

1. Réduire des variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique
2. Faciliter l'échange d'information entre des modèles à échelles différentes
3. Diminuer le nombre d'expériences à réaliser

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'obtention de paramètres sans dimension.

Ces méthodes reposent sur un système cohérent d'unités. En mécanique des fluides, on utilise le système Masse, Longueur et Temps (MLT) ou le système Force, Longueur et Temps (FLT).

On dit qu'un système d'unités est cohérent avec un groupe d'équations quand celles-ci sont satisfaites dans chaque cas particulier.

### VII.2.1. Dimension fondamentales

Le système international d'unités définit sept unités fondamentales, associées justement aux sept grandeurs de base que nous avons utilisées pour écrire l'équation aux dimensions d'une grandeur. Ces unités sont définies par un phénomène particulier. Elles sont rappelées dans le tableau 1.

Grandeur	Dimension	SI	Symbole
Longueur	Mètre	m	L
Masse	Kilogramme	kg	M
Temps	Seconde	s	T
Température	Kelvin	K	$\theta$
Intensité électrique	ampère	A	I
Intensité lumineuse	candela	cd	J
Quantité de matière	mole	mol	N

Tableau VII.1 Les dimensions fondamentales

### VII.2.2. Homogénéité dimensionnelle

Tester l'homogénéité d'une expression est un critère permettant d'éliminer des résultats dont on sait qu'ils sont nécessairement faux.

Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.

Le critère de pertinence s'énonce ainsi :

Une expression non homogène est nécessairement fautive.

On peut énoncer les conséquences suivantes :

- On ne peut additionner que les termes ayant la même dimension.

- L'argument d'une fonction transcendante (sin, cos, tan, exp, ln, ch, sh, th) doit être sans dimension.

On manipule les dimensions à l'aide des règles suivantes :

- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs.
- La dimension de  $A^r$  est égale à  $[A]^r$ , ou  $r$  est un nombre sans dimension.

Exemple :

L'équation de Bernoulli et dimensionnellement homogène, en effet :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \tag{VII.1}$$

$$H = L + \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-2}T^{-2}} + \frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} = L + L + L \tag{VII.2}$$

### VII.2.3. Méthode de Rayleigh

On peut exprimer une variable ( $n$ ) en fonction de  $n$  paramètres ( $y_i$ ) en utilisant l'analyse adimensionnelle :

$$[n] = [y_1]^a [y_2]^b \dots [y_n]^s \tag{VII.3}$$

Avec :  $a, b, s$  sont des coefficients à déterminer.

Exemple d'application :

Variables	Symboles	Dimensions
Chute de pression par unité de longueur	$\Delta p/L$	$M.L^{-2}.T^{-2}$
Diamètre de la conduite	$D$	$L$
Vitesse moyenne du fluide	$U_{moy}$	$L.T^{-1}$
Viscosité dynamique	$m$	$M.L^{-1}.T^{-1}$
Masse volumique	$\rho$	$M.L^{-3}$
Rugosité	$\epsilon$	$L$

Tableau VII.2 Variables du problème

Dans cet exemple nous allons nous intéresser à l'étude de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite rectiligne.

Les variables retenues et leurs dimensions sont listées dans le tableau ci-dessus.

En observant que le diamètre  $D$ , la vitesse de débit  $U_{\text{moy}}$ , la viscosité  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$  du fluide et la rugosité ne peuvent dépendre de la longueur  $L$  de la conduite, on peut écrire a priori que le gradient linéique de pression doit s'exprimer en fonction des autres variables:

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, \varepsilon, D, U_{\text{moy}}) \quad \text{VII.4}$$

Développons la fonction  $f$  en série de puissance du type:

$$\frac{\Delta p}{L} = \rho^a \mu^b \varepsilon^c U_{\text{moy}}^d D^e \quad \text{VII.5}$$

Cette équation doit être dimensionnellement correcte, c'est-à-dire que dans l'équation aux dimensions:

$$(ML^{-2}T^{-2}) = k(ML^{-3})^a (ML^{-1}T^{-1})^b (L)^c (LT^{-1})^d (L)^e \quad \text{VII.6}$$

Les exposants de chaque dimension fondamentale doivent être égaux. Par conséquent :

$$\begin{cases} [M] \rightarrow 1 = a + b \\ [L] \rightarrow -2 = -3a - b + c + d + e \\ [T] \rightarrow -2 = -b - d \end{cases} \quad \text{VII.7}$$

On a trois équations à cinq inconnues !!!

Grandeurs privilégiées : le diamètre, la masse volumique et la vitesse.

Les grandeurs secondaires : la viscosité et la rugosité

De ce fait, on exprime :  $a, d, e$  en fonction de  $b, c$

$$\begin{cases} a = 1 - b \\ e = -1 - c - b \\ d = 2 - b \end{cases} \quad \text{VII.8}$$

$$\frac{\Delta p}{L} = k \rho^{1-c} \mu^b \varepsilon^c U_{\text{moy}}^{2-b} D^{-1-c-b} \quad \text{VII.9}$$

$k$  : est un paramètre sans dimension

$$\frac{\Delta p}{L} = k \frac{\rho U_{moy}^2}{D} \left( \frac{\mu}{\rho U_{moy} D} \right)^b \left( \frac{\varepsilon}{D} \right)^c \quad \text{VII.10}$$

Au final, on voit apparaître le nombre de Reynolds et la rugosité relative. On pourra donc écrire:

$$\frac{\Delta p}{L} = k \frac{\rho U_{moy}^2}{D} f(\text{Re}, \varepsilon^*) \quad \text{VII.11}$$

Avec :  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{D}$  la rugosité relative (adimensionnelle)

#### VII.2.4. Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham

Le travail de Aimé Vaschy sur les lois de similitude en physique a été présenté en 1892 dans Annales Télégraphiques 19 (1892), 25-28 Deux années auparavant, dans les préliminaires de son ouvrage: Traité d'électricité et de magnétisme, il explique la réduction du nombre de paramètres lorsqu'on regroupe des quantités physiques pour générer des nombres adimensionnels

Selon le théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème  $\pi$ ), dans un problème comprenant  $n$  grandeurs physiques où il y a  $m$  dimensions fondamentales, on peut réécrire ces grandeurs physiques en  $(n-m)$  paramètres adimensionnels indépendants.

##### VII.2.4.1. Enoncé

Soient  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  les différentes grandeurs physiques: comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc. Entre toutes ces quantités, il y a une relation de la forme:

$$\phi(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 0 \quad \text{VII.12}$$

Si  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$  représentent les quantités adimensionnelles parmi les quantités physiques  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , on peut alors écrire une équation de la forme:

$$f(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{n-m}) = 0 \quad \text{VII.13}$$

Ou :

$$\pi_1 = f(\pi_2 + \dots + \pi_{n-m}) = 0 \quad \text{VII.14}$$

## VII.2.4.2. Méthodologie

Pour effectuer une analyse dimensionnelle, on doit considérer les étapes suivantes:

1. Dresser la liste de toutes les quantités physiques  $A_i$  et leur dimension correspondante.
2. Écrire la fonction :  $\phi(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 0$
3. Choisir les variables répétitives. Ces variables doivent contenir toutes les  $m$  dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle détermine l'échelle, une autre, parce qu'elle détermine les conditions cinématiques; il faut une variable liée avec la masse ou les forces du système. Exemple: on peut retenir  $D$ ,  $v$  et  $\rho$  comme variables fondamentales.
4. Écrire les paramètres  $\pi$  en fonction des exposants inconnus:

$$\pi_1 = v^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = (LT^{-1})^{x_1} (L)^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} (ML^{-1}T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

S'assurer que toutes les quantités  $A_i$  sont incluses dans les groupes  $\pi_i$ .

5. Écrire les équations des paramètres  $\pi$  pour les exposants; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension.
6. Résoudre les équations simultanément.
7. Remplacer les exposants trouvés ( $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , ...) dans les expressions de  $\pi$  (étape 4) pour obtenir les paramètres  $\pi$  sans dimension.
8. Déterminer la fonction:  $f(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{n-m}) = 0$   
S'assurer que tous les paramètres  $\pi_i$  sont indépendants les uns des autres.
9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimension connus (Re, Fr, Eu,...).

## VII.2.4.3. Application

Dans un écoulement externe sur une plaque plane, l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  dépend de la distance  $x$ , la vitesse  $U$ , la viscosité  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  du fluide.

$$\phi(\delta, x, U_\infty, \mu, \rho) = 0$$

VII.15

Le nombre de variables est 5. Le nombre de produits Pi doit être 2 et ils ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \pi_1 = \rho^a x^b \mu^c \delta = M^0 L^0 T^0 \\ \pi_2 = \rho^a x^b \mu^c U_\infty = M^0 L^0 T^0 \end{cases} \quad \text{VII.16}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\delta}{x} \\ \pi_2 = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} \end{cases} \quad \text{VII.17}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham implique :

$$f(\pi_1, \pi_2) = f\left(\frac{\delta}{x}, \text{Re}_x\right) = 0 \quad \text{VII.18}$$

D'où :

$$\frac{\delta}{x} = f(\text{Re}_x) \quad \text{VII.19}$$

Ce qui correspond au résultat de la théorie présentée dans le chapitre précédent.

### VII.3. Similitude

Alors que l'étude expérimentale est le plus souvent nécessaire, les essais en vraie grandeur (par exemple d'un barrage, d'une construction portuaire, de navire en bassin de carène, d'une turbine ou d'un avion, etc) sont rares et très coûteux, et ne sont possible que dans un nombre limité de cas. C'est pourquoi on fait souvent recours aux modèles aux échelles réduites (appelés *maquettes*) du système en vraie grandeur (appelé *prototype*) à étudier.

Pour que les résultats obtenus expérimentalement sur maquette puissent être extrapolés au prototype, un nombre des principes de similitude doit être respectés. Pour mettre en évidence ces principes on écrit d'abord les équations de Navier–Stokes, ainsi que les conditions aux limites et initiales, sous une forme adimensionnelle. Ainsi, nous employons les symboles avec astérisque pour désigner les grandeurs sans dimensions.

On pose :

$$\begin{cases} u = Uu^* & x = Dx^* & p = \rho U^2 p^* \\ v = Uv^* & y = Dy^* & t = \frac{U}{D} t^* \\ w = Uw^* & z = Dz^* \end{cases} \quad \text{VII.20}$$

Les équations de Navier-Stokes s'écriront :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{\text{Fr}} \end{cases} \quad \text{VII.21}$$

Les équations résultantes sont sans dimensions et ne font intervenir que deux nombres sans dimensions qui dépendent de l'écoulement. Cela traduit alors le fait que tout écoulement n'est défini que par les valeurs de nombres sans dimensions qui lui caractérisent.

$$\begin{cases} \text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu} \\ \text{Fr} = \frac{U^2}{g D} \end{cases} \quad \text{VII.22}$$

Fr est appelé nombre de Froude, et l'on reconnaît le nombre de Reynolds Re.

Notons que les conditions aux limites s'appliquent aux frontières du système, donc liées à la géométrie du système, et les conditions initiales expriment l'état du système à l'instant initial.

Pour que deux écoulements relatifs respectivement à la maquette et au prototype soient semblables, il faut qu'ils soient décrits par la même équation dynamique ci-dessus. Les variables réduites étant sans dimension, il suffit d'avoir l'égalité des nombres de Reynolds et l'égalité des nombres de Froude entre la maquette et le prototype

VII.3.1. *Nombre adimensionnel classique en mécanique des fluides*

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\rho V^2}{\mu V / L} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$C_x = \frac{F/L^2}{\rho V^2/2} \quad \text{Coefficient de traînée}$$

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{g L} \left( \text{ou } \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g L}} \right) \quad \text{Nombre de Froude}$$

$$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2/2} \quad \text{Nombre d'Euler, ou nombre de pression}$$

$$\text{We} = \frac{\rho V^2/2}{\sigma/L} \left( \text{ou } \text{We} = V \sqrt{\frac{\rho L}{\sigma}} \right) \quad \text{Nombre de Weber}$$



## REFERENCES

ANCEY C., MECANIQUE DES FLUIDES UNE INTRODUCTION A L'HYDRAULIQUE POUR LES INGENIEURS CIVILS, 2016, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE.

BENHAMOUDA R., NOTIONS DE MECANIQUE DES FLUIDES, COURS ET EXERCICES CORRIGES, 2008, CENTRE DE PUBLICATION UNIVERSITAIRE, TUNIS.

CHASSAING P., MECANIQUE DES FLUIDES- ÉLÉMENTS D'UN PREMIER PARCOURS, 2000, CEPADUES EDITIONS.

COMOLET R., MECANIQUE EXPERIMENTALE DES FLUIDES, 1982, MASSON.

GHAZI B., MECANIQUE DES FLUIDES UNE INTRODUCTION A LA DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS INCOMPRESSIBLES, 2015, ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS.

RIDHA A., DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS, 2008, UNIVERSITE DE CAEN

ROBINET J.C., AERODYNAMIQUE FONDAMENTALE, 2013, ARTS & METIERS PARIS TECH.

VAZQUEZ J., HYDRAULIQUE GENERAL, ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

VAZQUEZ J., DUFRESNE M., HYDRAULIQUE A SURFACE LIBRE, 2016, ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

WHITE F.M., FLUID MECHANICS, UNIVERSITY OF RHODE ISLAND, WCB MCGROW-HILL

WINCKELMANS G., ET LEGAT V., MECANIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS I, 2009, ECOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN.