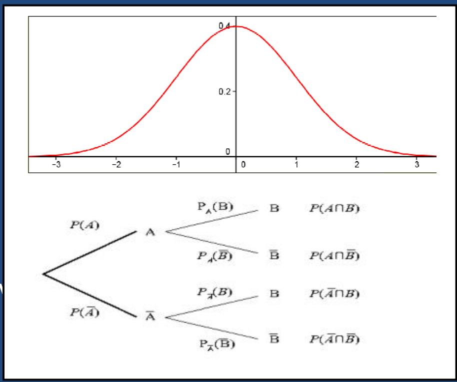
Chapitre I : Analyse combinatoire

Chapitre II : Calcul de probabilités

Chapitre III : Variables aléatoires et loi de probabilités

Chapitre IV : Lois de probabilité usuelles



Polycopié de Cours de Statistique II

(Probabilités)

$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\frac{\lambda^x}{x!}e$

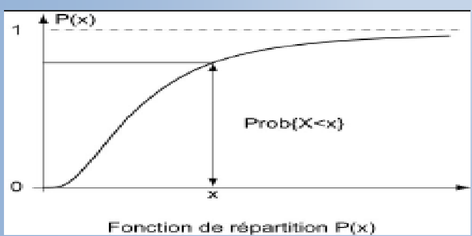
$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$, (où $k = x - 1$)

$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

$P\left({A_i}/{B}\right) = \frac{P\left({B}/{A_i}\right)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P\left({B}/{A_i}\right)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\left({B}/{A_i}\right)P(A}$

Exemple : Si $B = [a, b]$, alors : $P(X \in B) =$

Si $a = b$, alors : $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx =$



Dr. Mohammed Bouznit
Maître de Conférences- Université de Bejaia

Juin 2018

UNIVERSITE DE BEJAIA

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET DES SCIENCES DE GESTION

DEPARTENT DES SCIENCES ECONOMIQUES

Polycopié de Cours de Statistique II (Probabilités)

Réalisé par Dr. Mohammed Bouznit

Maître de conférences classe B

Chapitre I : Analyse combinatoire

1. Introduction

Par convention, l'analyse combinatoire est la théorie mathématique de dénombrement. Elle s'emploie pour dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. En effet, on entend par analyse combinatoire l'ensemble de méthodes, ou techniques, permettant de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une expérience particulière (c'est dire de dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former à partir d'un ensemble d'éléments particuliers). Ces principales méthodes seront présentées ci-dessous :

2. Principe fondamental de dénombrement (PFD)

2.1.Version restreinte

De façon générale, on entend par principe fondamental de dénombrement la technique qui permet de donner le nombre de résultats possibles de deux expériences quelconques. En effet, si une expérience quelconque peut être représentée de ***m*** façons différentes et une autre expérience de***n*** façons différentes, alors le nombre de façons différentes pour représenter à la fois ces deux expériences est le produit de ***m.n***.

Théorème 1 :

Supposons que nous allons réaliser deux expériences quelconques dont le nombre de résultats possibles est **m** et **n** respectivement, alors nous avons **m.n** résultats possibles du moment que ces deux expériences sont prises au même temps.

Exemple 1 :

Une urne contient 4 boules de couleurs différentes dont une boule rouge (R), une boule blanche(B), une boule noire (N) et une boule verte (V). On veut effectuer, avec remise, deux tirages successifs. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Réponse : Le nombre de résultats possibles est donné par des couples de deux boules. C'est-à-dire, RR, RB, RN, RV, BB, BR, BN, BV, NN, NB, NR NV, VV, VR, VB, VN. Autrement dit, nous avons 4 façons différentes pour tirer la première boule et 4 possibilités pour avoir la deuxième boule. En appliquant le principe fondamental de dénombrement, nous avons 4x4 résultats possibles (couples possibles)

Exemple 2 :

Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, où chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés « père et fils », combien y a-t-il de différent choix possibles ?

Réponse : En considérant le choix du père comme la première expérience et ensuite le choix de l'un de ses fils comme la seconde, alors d'après le principe fondamental de dénombrement il y aura (10) (3) =30 choix possibles.

2.2. Principe fondamental généralisé

Lorsqu'il y a plus deux expériences, le PFD peut être généralisé de la manière suivante.

Théorème 2 :

Si nous avons r expériences dont les résultats possibles sont respectivement n_1, n_2, n_3….,n_r, alors nous aurons au total $(n_1)(n_2)..(n_r)$résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemple : Le comité de planification d'un collège est constitué de 3 étudiants de première année, 4 étudiants de deuxième année, 5 étudiants de troisième année et 2 étudiants de quatrième année. Un sous-comité de 4 étudiants, comportant un représentant de chaque classe, doit être choisi. Combien de choix possibles peut-on former un tel sous-comité ?

Réponse : nous pouvons considérer le choix d'un sous-comité comme le résultat combiné de 4 expériences distinctes, chacune consistant à choisir un représentant unique dans l'une des classes. Par conséquent, en appliquant le PFD généralisé, il y a 3.4.5.2=120 possibilités.

3. Principaux types de principe fondamental de dénombrement

3.1.Permutations

3.1.1. Permutations sans répétition : Soit un ensemble de n objets distincts qu'on veut placer à n places distinctes. De combien de manière possibles peut-on faire ceci ?

Réponse :

Places	1	2	……………	n-1	n
Objets	n choix possibles	n-1	…………….	2	1 possibilité

Le tableau ci-dessus fait ressortir que dans la première place, nous pouvons placer un objet parmi n. dans la deuxième place, un objet parmi n-1 restants, et ainsi jusqu'à la $n^{ième}$ place où on peut placer un objet parmi n-(n-1) objets restants.

Exemple 1:

Combien existe-t-il d'arrangements ordonnés des lettres a, b, et c ?

Réponse : à partir de ces lettres, on peut former les arrangements ci-dessous : abc, acb, bac, bca, cab, cba. C'est-à-dire nous avons 6 arrangements possibles, et chaque arrangement est appelé permutation.

Théorème 3:

Le nombre de permutations possibles de $\boldsymbol{n}$ objets, notée $\mathbf{P_n}$ est $\boldsymbol{n}!$, tel que :

$$\boldsymbol{n}! = (n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots..(2)(1)$$

Exemple 2 :

Un cours de théorie de probabilités est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un examen a eu lieu, puis les étudiants sont classés selon leurs notes. On suppose que de deux étudiants obtiennent la même note est exclu.

a) Combien de classement peut-on avoir ?
b) Si les hommes sont classés entre eux uniquement et les femmes entre elles, combien de classements globaux peut-on former ?

Réponse :

a) Comme chaque classement correspond à un certain arrangement ordonné de 10 personnes, de ce fait nous avons dans ce cas (10!)=3628800 permutations possibles.
b) Comme il ya (6!) classements possibles entre les hommes et (4!) classements possibles entre les femmes, alors le nombre total de classements possibles est (6!)(4!)=17280.

3.1.2. Permutations avec répétition : On veut connaitre dans certains cas le nombre de permutations dans un ensemble de $\boldsymbol{n}$ objets quand certains de ces objets sont indistinguables les uns des autres. Pour mieux comprendre ce genre d'expériences, nous prenons l'exemple ci-dessous :

Exemple 1: Combien d'arrangements différents peut-on former avec les lettres « PEPPER »?

Réponse : Tout d'abord, on remarque qu'il existe (6 !) permutations des lettres P_1, E_1, P_2, P_3, E_2, R lorsque les trois lettres P et les deux lettres E sont distinguables les uns des autres. Cependant, dans le cas de l'arrangement PEPPER, du moment qu'on permute les deux lettres P entre elles, un tel arrangement ne change pas. Par conséquent, dans ce cas de figure, il y aura en effet $\frac{6!}{3!2!}$Arrangements possibles de lettres PEPPER.

Théorème 4:

Lorsque on veut classer ***n*** objets parmi lesquels il existe $\boldsymbol{n_1}$,$\boldsymbol{n_2}$, $\boldsymbol{n_3}$……$\boldsymbol{n_r}$ objets indistinguables des uns des autres, de ce fait le nombre de permutations possibles est donnée par la formule suivante :

$$P_n^{n1,n2,\ldots nr} = \frac{n!}{n1!\,n2!\ldots\ldots nr!}$$

Exemple 2:

Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot « PROPORTION »

Réponse : Nous avons 10 lettres dont certaines sont semblables. Les lettres P et R apparaissent deux fois, et la lettre O apparait deux fois. Par conséquent, le classement des différentes lettres est une permutation avec répétition dont le nombre de résultats possibles est donné par: $\frac{10\,!}{2!.2!.3\,!} = 151200$

Exemple 3 : Parmi les 10 participants à un tournoi de jeu d'échec, on compte 4 Russes, 3 Français, 2 Anglais, et 1 Brésilien. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leurs identités, à combien de classements individuels différents une telle liste comprend-elle ?

Réponse : il ya (10 !)/(4 !)(3 !)(2 !)=12600 classements possibles

3.2.Arrangements

3.2.1. Arrangements sans répétitions

On appelle arrangement de ***p*** objets pris parmi un ensemble de ***n*** objets distincts (***p≤n***) tout groupe que l'on peut former en prenant ces objets et en les disposant à ***p*** places déterminées.

Théorème 5 **:**

Le nombre d'arrangements de ***p*** objets parmi un ensemble de ***n*** objets distincts est :

$A_n^p = n!/(n-p)!$.

Remarque : si p=n, alors $A_n^p = P_n = n!$

Exemple :

Avec les lettres du mot « RELATION », combien peut-on former, avec ou sans sens, de mots différents de 5 lettres ?

Réponse : c'est un arrangement sans répétition $A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15120$ mots possibles

3.2.2. Arrangements avec répétition

On appelle un arrangement avec répétition de ***p*** objets distincts toutes dispositions ordonnées de ***p*** objets parmi les n objets où un objet peut apparaitre plusieurs fois.

***Théorème 6*:**

Le nombre d'arrangement avec répétition, notée A_n^p, de ***p*** objets choisis parmi les ***n*** objets est $A_n^p = n^p$

Exemple : Combien de mots différents de 5 lettres peut-on former avec les lettres du mot « COMBIEN » où toutes les lettres peuvent apparaître plusieurs fois ?

Réponse : $A_7^5 = 7^5$ mots possible

3.3. Combinaisons : On appelle combinaison de ***p*** objets pris parmi ***n*** objets distincts, tout groupe que l'on peut former en prenant ***p*** de ces objets sans tenir compte de leur ordre.

Théorème 7 **:**C_n^pest le nombre de combinaisons de ***p*** objets pris parmi ***n*** objets, ou encore le nombre de groupes de taille ***p*** si l'ordre n'est pas considéré significatif (c'est-à-dire l'ordre n'est important).

Exemple 1 :

On veut former un comité comprenant 3 d'un groupe de 20 personnes. Combien y a-t-il de comités possibles ?

Réponse : il s'agit d'une combinaison, alors nous avons $C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = 1140$ comités possibles.

Exemple 2 :

À un examen de statistique, on demande aux étudiants de répondre à six questions sur 10. Combien y a-t-il de différents choix possibles ?

Réponse : $C_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!6!} = 210$

Remarque : $C_n^p = A_n^p / p!$,

Démonstration : $\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!/(n-p)!}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$

Propriété 1: $C_n^p = C_n^{n-p}$ (formule de symétrie)

Démonstration :

Nous avons d'une part: $C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ …..(1).

Et d'autre part, $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ …..(2)

De (1) et (2) on déduit que $C_n^p = C_n^{n-p}$

Propriété 2 (Triangle de Pascal):

Quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n} - 1$, alors nous avons :

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$ tel que $1 \leq p \leq n-1$

Démonstration :

Soient deux entiers n et p tels que $1 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n} - 1$, alors:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)(n-p-1)!}$$

$$= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{p(n-1)!+(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)![p+(n-p)]}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

Etant donnée la formule du triangle de Pascal, le tableau ci-dessous permet de trouver rapidement les différentes combinaisons de p éléments parmi n éléments tels que$1 \leq p \leq n-1$. En effet, la première colonne et la diagonale principale du tableau comportant le 1, alors le reste des cellules du tableau sera rempli en utilisant la formule de Pascal $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ tq. $1 \leq p \leq n-1$.

A titre illustratif, $C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = 4 + 6 = 10$

Tableau 1: Trianlge de Pascal

n \ p	1	2	3	4	5	…	p-1	p
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4+	6	4	1	0	0	0
6	1	5	=10	10	5	1	0	0
…	1	…	…	…	…	…	1	0
n-1	1	C_{n-1}^2 +	C_{n-1}^3	..				1
n	1		$=C_n^3$					

3.4.Théorème de Binôme de Newton

***Théorème* 8:** Si deux nombres réels x et y, alors $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}$[1]

Démonstration de théorème de Binôme de Newton (démonstration par récurrence) :

Pour n=1, l'équation [1] est vraie car :

$\sum_{k=0}^{1} C_1^k \, x^k y^{1-k} = C_1^0 x^0 y^{1-0} + C_1^1 x^1 y^{1-1} = x + y = (x+y)^1$

Dès lors, on suppose que la formule [1] est vraie au rang n(c'est-à-dire,$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}$), et on démontre qu'elle est également vraie au rang (n+1). C'est-à-dire : $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \, x^k y^{n+1-k}$

Premièrement, nous avons $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}] = x[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}] + y[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n-k}] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n+1-k}$ [2]

On pose $h = k+1$, alors la formule [2] devient :

$$(x+y)^{n+1} = \left[\sum_{h=1}^{n+1} C_n^{h-1} \, x^h y^{n-(h-1)}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n+1-k}\right]$$

En remplaçant l'indice h par k, alors la formule ci-dessus devient :

$$(x+y)^{n+1} = \left[\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{h-1} \, x^k y^{n-(k-1)}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n+1-k}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \, x^k y^{n+1-k}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k y^{n+1-k}\right]$$

$= C_n^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}[C_n^{k-1} + C_n^k] \, x^k y^{n+1-k} + C_n^0 y^{n+1}$

D'après le théorème de Pascal $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ tq. $1 \leq k \leq n$, alors :

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \, x^k y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$= C_n^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \, x^k y^{n+1-k} + C_n^0 y^{n+1}$

Par ailleurs : $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = C_n^0 = 1$, d'où :

$(x+y)^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \, x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1}$

Donc : $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \, x^k y^{n+1-k}$

Par conséquent, la formule de binôme de Newton est vraie $n \, \forall \in \mathbb{N}$

Exemple : $(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k \, x^k y^{3-k} = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$

Exercices :

Exercice1 :

De combien de manières peut-on tirer l'une après l'autre, quatre cartes d'un jeu de 20 cartes, et ce dans le cas d'un tarage non exhaustif et un tirage exhaustif.

Réponse :

i) *Tirage non exhaustif :*
On peut tirer chaque carte de 20 manières différentes, alors le nombre de manières pour tirer 4 cartes est : 20.20.20.20=20^4
ii) *Tirage exhaustif : 20.19.18.17*

Execrice2 :

Soient 3 garçons et 2 filles :

i. De combien de façons différentes peuvent-ils prendre sur un banc ?
ii. De combien de façons peuvent-ils s'assoir si les garçons s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles ?
iii. De combien de manières différentes peuvent-ils s'assoir si seulement les filles s'assoient l'une à côté de l'autre.

Réponse :

i. *5! =5.4.3.2.1= 120 façons*
ii. *Il y a deux façons pour distribuer les personnes selon le sexe (GGGFF) et (FFGGG). Donc le nombre de façons possibles est : 2. (3!).(2!)=24*
iii. *Il ya 4 façons de distribuer les personnes selon le sexe, (FFGGG), (GFFGG), (GGFFG), (GGGFF). Donc le nombre de façons possibles est : 4 (3!).(2!)=48*

Exercice 3 :

Soit une urne contient 10 boules. On tire de façon exhaustive trois boules, Quel est le nombre d'échantillons possibles ?

Réponse : il ya 10 façons pour tirer la première boule, et 9 façons pour la deuxième boule et 8 façons pour la troisième boule. Le nombre d'échantillons possibles est 10.9.8=720

Exercice 4 :

Combien de mots à 9 lettres (avec ou sans sens) peut-on former avec les lettres suivantes :

- AEIOLNRST
- FFFFBMMMC

Réponse :

- *C'est une permutation sans répétition : 9!*
- *C'est une permutation avec répétition :* $\frac{9!}{4!3!}$

Exercice 5 :

Combien de nombre à cinq chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dans les cas suivants :

- Sans aucune restriction
- Le nombre est un multiple de 2
- Le nombre est divisible par 5
- Le nombre est impair

Réponse :

- *Sans restriction : l'ordre est important, donc c'est un arrangement de*A_9^5
- *Le nombre est un multiple de 2 :* $A_4^1 A_5^4$
- *Le nombre est divisible par 5 :* $A_1^1 A_8^4$
- *Le nombre est impair :* $A_5^1 A_4^4$

Exercice 6 :

Un cours de théorie des probabilités est suivi par 6 hommes et 4 femmes. Un examen a eu lieu, puis les étudiants sont classés selon leurs notes. On suppose exclu que deux étudiants obtiennent la même note.

1. Combien de classements peut-on avoir ?
2. Si les hommes sont classés entre eux uniquement et les femmes entre elles, combien de classements globaux peut-on avoir ?

Réponse :

1. *Nous avons (10!) classements possibles*
2. *(6!)(4!)*

Exercice 7 :

Un étudiant dispose 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de mathématiques, trois de chimie, deux d'histoire et un de langue. Cet étudiant aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Réponse : il y a (4!)[(4!)(3!)(2!)(1!)]   Permutations possibles

Exercice 8 :

On veut former un comité comprenant 3 des 20 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comites ?

Réponse : il y a C_{20}^{3} *comités possibles*

Exercice 9 :

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots :

1. leur
2. anabase
3. sociologique

Réponse :

1. *il y a (4!), car chaque lettre apparait une seule fois (permutation sans répétition)*
2. *il y a* $\frac{7!}{3!}$ *, car le mot anabase comporte 7 lettre dont a apparait 3 fois (permutation avec répétition)*
3. *il y a* $\frac{12!}{3!2!}$, *(permutation avec répétition)*

Exercice 10 :

Une classe contient 9 garçons et 3 filles,

1. De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?
2. Combien de ces choix comportent au moins une fille ?
3. Combien comportent exactement une fille ?

Réponse **:**

1. C_{12}^{4}
2. $C_3^1 C_9^3 + C_3^2 C_9^2 + C_3^3 C_9^1$
3. $C_3^1 C_9^3$

Chapitre II : Calcul de probabilités (Espace de probabilités)

1. Introduction :

Le présent chapitre tente de présenter les principaux concepts de probabilités, calcul des probabilités et des probabilités conditionnelles. En effet, les probabilités ne peuvent être calculées qu'au cas d'une expérience aléatoire ou non déterministes. A titre illustratif, on lance une pièce de monnaie, il est clair que la pièce de monnaie aura deux possibilités de tomber, soit elle tombe sur une « face » ou sur une « pile ». C'est-à-dire, au départ nous n'avons aucune information sur la manière avec laquelle la pièce de monnaie sera tombée. De ce fait, toute expérience dont les résultats ne sont pas connus à l'avance, même si elle est répétée dans des conditions identiques, est une expérience aléatoire.

2. Ensemble fondamental et événement :

Définition : considérons une expérience dont l'issue n'est pas prévisible, bien que l'issue ne soit pas connue à l'avance, admettant cependant que l'ensemble des issues possibles est connu. Cet ensemble est appelé ensemble fondamental, par convention est noté Ω.

Quelques exemples des expériences aléatoires :

- Si le résultat d'une expérience est la détermination du sexe d'un nouveau-né, alors l'ensemble fondamental $\Omega = \{garçon,\ fille\}$
- Si l'issue de l'expérience est l'ordre d'arrivé à une course entre 7 chevaux ayant les positions de départ 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, alors $\Omega = \{touteslespermutationsde\ (1,2, \dots .7)\}$, soit 7! Au total.
- Si l'expérience consiste à jeter deux pièces de monnaies, alors l'ensemble fondamental est constitué de 4 couples suivant : $\Omega = \{(pille, pile), (face, face), (pile, face), (face, pile)\}$

Par ailleurs, tout sous ensemble E de l'ensemble fondamental Ω est appelé « événement ». De ce fait, un événement est donc un ensemble correspondant aux divers résultats possibles d'une expérience aléatoire. Si un résultat est compris dans l'ensemble E, alors on dit que l'événement E est réalisé.

*Exemple 1 :*Soit une expérience aléatoire avoir un nouveau-né dans une famille, alors l'ensemble fondamental $\Omega = \{g,\ f\}$, tel que g : garçon, f : fille. Le sous ensemble E_1={g} est l'événement l'enfant né est un garçon. E_2={f} est l'événement né est une fille.

Exemple 2 :

Soient $\Omega = \{touteslespermutationsde\ (1,2, \dots .7)\}$ etE ={tous les résultats de Ωqui commencent par 3}, donc E est l'événement que le cheval n°3 gagne la course.

Exemple 3:

Nous avons l'ensemble fondamental $\Omega = \{(p,p),\ (f,f),(p,f),(f,p)\}$tel que, p : pile et f : face.

Soit E=$\{(p,p),(p,f)\ \}$, alors E est l'événement la première pièce de monnaie montre un pile.

2.1.Opération sur les événements

2.1.1. Opération d'union

Soit A et B deux événements de Ω, alors $A \cup B$ sera réalisé si soit A soit B l'est.

Exemple 1: Soient$\Omega = \{g,\ f\}$, A={g}, B={f} , alors $A \cup B$=$\{g,\ f\} = \Omega$

Exemple 2 : Soient $\Omega = \{(p,p),\ (f,f),(p,f),(f,p)\}$, A=$\{(p,p),(f,p)\ \}$, B= E=$\{(p,f)\ \}$, alors $A \cup B = \{(p,p),(f,p),(p,f)\}$

Le nouvel événement $A \cup B$Sera réalisé si au moins l'une des pièces de monnaie montre « pile ». L'événement $A \cup B$ est appelé l'union de l'événement A et l'événement B.

2.1.2. Opération d'intersection :

Soient A et B deux événements de l'ensemble fondamental Ω, le nouvel événement $A \cap B$, appelé intersection de l'événement A et l'événement B, est considéré comme l'ensemble de réalisations qui sont à la fois dans l'événement A et dans l'événement B. Autrement dit, l'événement $A \cap B$ ne sera réalisé qui si A et B le sont à la fois.

Exemple :Soient $A = \{(p,p),(p,f),(f,p)\}$, et $B = \{(f,f),(f,p),(p,f)\}$, alors : l'événement $A \cap B = \{(p,f),(f,p)\}$ est l'événement une pièce de monnaie montre pile et l'autre donne face.

- **Evénement impossible :**

Exemple :

On jette à la fois deux dés équilibrés, alors l'ensemble fondamental est :

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3) \ldots\ldots\ldots..(6,6)\}$, c'est à dire le nombre de résultats possibles de telle expérience est 6x6=36 couples. Par ailleurs, supposant deux événements A et B tel que A : « la somme des deux égale à 7 » et B : « la somme des deux dés égale à 6 ».

Donc, $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1)\}$, $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

L'événement $A \cap B = \emptyset$: c'est-à-dire ne contient aucune réalisation, et par conséquent un tel événement ne peut pas survenir. Celui-ci est appelé l'événement impossible, noté $\emptyset$. De ce fait, si $A \cap B = \emptyset$, alors l'événement A et l'événement B sont mutuellement disjoints (incompatibles).

Remarque :

Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n,$ un ensemble d'événements, alors leur union sera notée par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$et leur intersection par $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$

2.1.3. Opération de complémentarité :

Pour tout événement A, le nouvel événement A^c , ou $(\bar{A})$est l'événement complémentaire. C'est-à-dire l'événement A^cdoit, par définition, contenir tous les points de l'ensemble fondamental Ω qui ne sont pas dans l'ensemble A.

Exemple :

Soit l'événement$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, alors A^c, $\bar{A}$, sera réalisé lorsque la somme des deux dés n'est pas égale à 7.

Remarque : $\overline{\Omega}$=ϕ. Autrement dit, l'événement complémentaire de l'ensemble fondamental est l'ensemble vide (l'événement impossible).

2.1.4. Espace probabilisable et espace probabilisé

Espace probabilisable : On appelle espace probabilisable tout couple $(\Omega, \mathfrak{I})$ tels que Ω est l'ensemble fondamental des événements d'une expérience aléatoire, et $\mathfrak{I}$ est une tribu, de Ω. En effet, $\mathfrak{I}$est une collection de sous-ensembles, de parties, de Ωqui remplie les axiomes suivantes :

- $\Omega \in \mathfrak{I}$
- Si $A \in \mathfrak{I}$, alors $\bar{A} \in \mathfrak{I}$
- Si $A \in \mathfrak{I}$ et $B \in \mathfrak{I}$, alors $A \cup B \in \mathfrak{I}$
- Pour toute famille d'événements A_i, tel que $i = 1, 2 \dots \dots$ alors$\bigcup_i A_i \in \mathfrak{I}$,

Espace probabilisé (*Axiome de Kolmogrov*): On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ dans lequel Ω est l'ensemble fondamental des événements d'une expérience aléatoire, $\mathfrak{I}$ est une tribu d'événements de Ω, et P est une application $\mathfrak{I}$dans [0, 1] ($P: \mathfrak{I} \longmapsto [0, 1]$) telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles $A_1, A_2 \dots . A_n$, on a $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Remarque : n fini

3. Axiomes de probabilités :

3.1. Axiomes : SoientΩun ensemble fondamental d'une expérience aléatoire, et A un événement de Ω, alors il existe une valeur P(A) appelée probabilité de l'événement A où :

Axiome1:$0 \leq P(A) \leq 1$

Axiome2:$P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : Si A et B sont deux événements qui s'excluent mutuellement, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Axiome 4 : Pour toute suite d'événement mutuellement disjoints$E_{1,} E_{2,} E_{3,} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

$(ie. E_{i,} \cap E_{j,} = \emptyset, \forall i \neq j)$, alors :$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$, tel que, P($E_i$) est la probabilité de l'événement E_i.

3.1.Résultats utiles (propriétés élémentaires) :

Soit une suite d'événements $E_{1,}E_{2,}E_{3,}$ … …. où $E_1 = \Omega$et $E_i = \emptyset \forall i > 1$. Comme ces événements sont mutuellement disjoints et $\Omega = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{E_i}$ alors :

$$P(\Omega) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{P(E_i)} = P(\Omega) + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\infty} \mathrm{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathrm{P}(\emptyset) = 0, \text{ car } P(\Omega) = 1$$

Exemple 1 :

On lance une pièce de monnaie, en admettant que pile a autant de chances d'apparaître que face. C'est-à-dire, P({pile}) =P({face}) =1/2

Exemple2 :

On jette un dé équilibré, alors les probabilités $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = 1/6.$

Par ailleurs, la probabilité d'avoir un chiffre pair est : $P(\{2{,}4{,}6\}) = p(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \ 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$

3.2. Quelques théorèmes élémentaires :

***Théorème 9* :**Soient Aet $\bar{A}$ deux événements mutuellement disjoints, et $A \cup \bar{A} = \Omega$, alors :

$$P(\Omega) = 1 = \mathrm{P}(\{A \cup \bar{A}\}) = P(\{A\}) + P(\{\bar{A}\}) \Rightarrow P(\{\bar{A}\} = 1 - P(\{A\}).$$

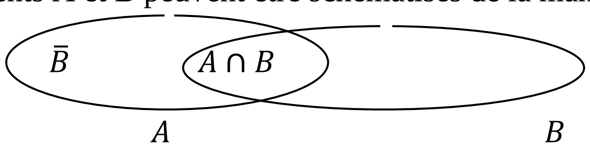
a. $P(\{\bar{A}\} = 1 - P(\{A\})$
b. Si $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P(A)} \leq \mathrm{P(B)}$

Théorème 10 : soient deux événements quelconques A et B, alors :

$$P(\bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Démonstration :

Les deux événements A et B peuvent être schématisés de la manière suivante :



L'événement A peut-être réécrit sous forme de deux événements mutuellement disjoints comme ainsi : $= (\bar{B}) \ \cup (A \cap B\ )$

Selon le *théorème9* ; $(A) = P[(\bar{B}) \ \cup (A \cap B\ )]{=}P(\bar{B}) + \ P(A \cap B)$

D'où $P(\bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

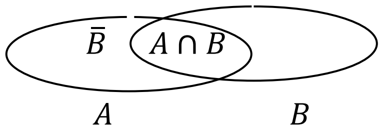
Théorème11 : si$A$ et B sont deux événements quelconques, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration :

L'union de deux événements A et B peut être réécrit de la manière suivante :

Nous avons



- $A \cup B = \bar{B} \cup B$, où les deux événements A et son complémentaire $\bar{A}$ sont mutuellement disjoints.

Selon le *théorème 9*, alors : $P(A \cup B) = P(\bar{B} \cup B) = P(\bar{B}) + P(B)$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

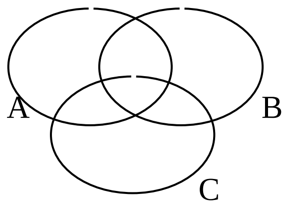
D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple :

Soient A, B et C trois événements quelconques, démontrez que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Démonstration : le schéma des trois événements A, B et C :



Nous avons ; $P(A \cup B \cup C) = P[A \cup (B \cup C)] = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$, (*Théorème 11*)…..[1]

D'autre part :

$$P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \text{ ……[2]}$$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$……. [3]

De [1], [2} et [3] nous déduisons :

$$P(A \cup B \cup C) = P[A \cup (B \cup C)] = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ce que nous cherchons à démontrer.

4. Ensemble fondamental à événements élémentaires équiprobables :

4.1. Méthode de calcul des probabilités :

Pour de nombreuses expériences aléatoires, il est naturel d'admettre que tout élément, ou événement élémentaire, a la même probabilité d'apparaitre.

Exemple 1:

Soit une expérience dont l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1,2, \dots \dots . N\}$. en admettant que $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{N\}) \Rightarrow P(\{i\}) = 1/N$, avec i = 1……..N.

Dès lors, il en résulte que pour tout événement E, alors :

$$P(E) = \frac{lenombredepointsdansE}{nombredepointsdans\Omega} = \frac{le\ nombre\ de\ cas\ favorables\ \text{à}\ la\ \text{réalisation}\ de\ l'\text{événement}E}{nombre\ de\ cas\ possibles\ de\ l'ensemblefondamental}$$

Exemple 2 :

Si deux dés sont jetés à la fois, quelle est la probabilité que la somme de faces soit 7 ?

Réponse : premièrement on suppose que les 36 issues possibles sont équiprobables.

Soit E : « la somme de deux dés donne un 7 »

$E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, alors $P(E) = 6/36 = 1/6$

Exemple 3 :

Soit un bol contenant 6 boules blanches et 5 boules noires. On tire à la fois deux boules au hasard, quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et l'autre noire ?

Réponse : A : « avoir deux boules », donc $P(A) = \frac{C_6^1 C_5^1}{C_{11}^2} = 6/11$

5. Probabilités conditionnelles et Indépendance :

5.1. Probabilités conditionnelles :

Définition : Soient$(\Omega, \Im, P)$, un espace probabilisé et $AetB$ deux événements de $\Im$ (tel que $\Im$est une σ-algèbre, tribu, de Ω), tel que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B réalisé, la quantité notée $P(A/B)$, où $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Exemple 1:

Une pièce de monnaie a été lancée deux fois successif. Si nous supposons que les quatre résultats possibles de l'ensemble fondamental $\Omega = \{(\mathrm{F}, \mathrm{F}), (\mathrm{F}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{F}), (\mathrm{P}, \mathrm{P})\}$ sont équiprobables, quelle est la probabilité conditionnelle que les deux jets amènent « face » sachant que le premier est déjà un « face » ?

Réponse : soient $A = \{(F, F)\}$ l'événement avoir deux fois « face » pour les deux jets et $B = \{(F, F), (F, P)\}$ l'événement le premier jet donne « face ». La probabilité voulue est donnée par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2$$

Tel que $(A \cap B) = \{(F, F)\}$

Exemple 2 :

Une urne contient 10 boules blanches, 5 boules jaunes et 10 boules noires. Une boule est tirée au hasard de l'urne et on l'on constate qu'elle n'est pas de couleur noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ?

Réponse :soit J : »la boule tiré est Jaune », $\bar{N}$: « l'événement la boule tirée n'est pas noire », alors :

$$P\left(J/\bar{N}\right) = \frac{P(J \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{5/25}{15/25} = 1/3$$

Remarque : nous avons $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$ …………[1]

Exemple :

Une urne contient 8 boules rouges et 4 blanches. On tire sans remise 2 boules de l'urne et admettons qu'à chaque étape tous les tirages possibles sont équiprobables. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?

Réponse : on désigne par R1 et R2 respectivement les événements « la première boule tirée est rouge » et « la seconde boule tirée est rouge ». Si la première boule tirée est rouge, il reste alors dans l'urne 7 boules rouges et 4 blanches. Par conséquent, le calcul de probabilité est donné par la formule suivante :

Nous avons : $P\left(\mathrm{R1}/_{R2}\right) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)}$, $\Rightarrow P(R1 \cap R2) = P(R1)P(^{A}/_{R2})$

$P(R1) = 8/12$, $P\left(^{R1}/_{R2}\right) = 7/11$ alors $P(R1 \cap R2) = \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{14}{33}$

5.1.Théorème de multiplication :

L'équation [1] peut également être généralisée dans le cas d'une série d'événements.

Théorème 12 :Soient $A_{1,}A_2, \dots \dots \dots . A_n$ une série d'événements quelconques d'un espace probabilisé, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots . . \cap A_n) = P(A_1)P\left(^{A_2}/_{A_1}\right)P\left(^{A_3}/_{A_1 \cap A_2}\right) \dots \dots . P\left(^{A_n}/_{A_1 \cap A_2 \cap \dots . A_{n-1}}\right)$$

Exemple : Une boite contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire 3 objets de cette boite, quelle est la probabilité pour que ces 3 articles soient défectueux ?

Réponse : le calcul de la probabilité d'avoir trois articles défectueux nécessite la définition de trois événements distincts, à savoir :

A_1: « le premier article tiré est défectueux », alors $P(A_1) = 4/10$

A_2: « le deuxième article tiré est défectueux », alors $P(A_2) = 3/9$

A_3: « le troisième article est défectueux », Alors $P(A_3) = 2/8$

Dès lors, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (\frac{4}{10})\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)$

5.2.Théorème de probabilités totales :

Théorème 13 : Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ forment une partition de l'ensemble fondamental Ω , tels que : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \cup A_n = \Omega$

Soit aussi B un événement quelconque, alors nous avons :

$B \cap \Omega = \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \dots \cup (B \cap A_n)$

Nous avons par ailleurs, $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$, (car $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$), donc :

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots . + P(B \cap A_n)$, en appliquant le théorème de multiplication *(théorème 12*), nous obtenons alors la formule ci-dessous :

$$P(B) = P\left({}^{B}/_{A_1}\right) P(A_1) + P\left({}^{B}/_{A_2}\right) P(A_2) + \cdots + P\left({}^{B}/_{A_n}\right) P(A_n)$$

D'où la formule des probabilités totales est :$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)$,

5.3.Théorème de Bayes :

Théorème 14 **:**Soit $(\Omega, \Im, P)$un espace probabilisé, soient aussi$A_1, A_2, \dots \dots A_n$ un système complet d'événements (telle que $P(A_i) \neq 0$) et $\in \Im$, alors on a :

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)}{P(B)} = \frac{P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)}$$

Exemple :

On considère 3 cartes, de même forme, à jouer. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noire, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième carte porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte est tirée au hasard, en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Réponse : Soient RR, NN, RN sont respectivement les événements, « la carte choisie est entièrement rouge », « entièrement noire » et « une face rouge et l'autre noire ». Ainsi, R est « l'événement la face apparente de la carte tirée est rouge ».

$$P\left({}^{RN}/_{R}\right) = \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} = \frac{P\left({}^{R}/_{RN}\right) P(RN)}{P\left({}^{R}/_{RR}\right) P(RR) + P\left({}^{R}/_{RN}\right) P(RN) + P\left({}^{R}/_{NN}\right) P(NN)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{1\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+0\left(\frac{1}{3}\right)} = 1/3$$

6. Indépendance :

6.1. Indépendance de deux événements

Définition : Soit $(\Omega, \Im, P)$un espace probabilisé, on dit que les deux événements A et B sont indépendants si e seulement si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Exemple :

On lance deux fois une pièce de monnaie, l'ensemble fondamental est :

$\Omega = \{(\mathrm{P}, \mathrm{P}), (\mathrm{P}, \mathrm{F}), (\mathrm{F}, \mathrm{P}), (\mathrm{F}, \mathrm{F})\}$,

On désigne par A: «l'événement le premier jet donne Pile ». D'où $A = \{$(P,P), (P,F)} et $P(A) = 2/4 = 1/2$. L'événement B : « le deuxième jet montre Pile », alors $B = \{(P, P), (F, P)\}$ et $P(B) = 2/4 = 1/2$

L'événement A et l'événement B sont-ils indépendants ?

Nous avons l'événement $A \cap B = \{(P, P)\}$, alors P($A \cap B$)=1/4 ………(i)

Et d'autre part $P(A)P(B) = (1/2)(1/2) = 1/4$…………(ii)

De (i) et (ii) nous déduisons que$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, et de ce fait les deux événements A et B sont indépendants.

Théorème15 : Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)\ \ si\ P(B) \neq 0$
3. $P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)\ \ \ si\ P(A) \neq 0,$

Théorème 16 :Si A et B sont deux événements indépendants, alors $A\ et\ \bar{B}$ le sont aussi (de même pour$\bar{A}\ et\ B$, $\bar{A}\ et\ \bar{B}$)

Démonstration : indépendance entre $\bar{A}\ et\ B$?

Nous avons : A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

La formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

D'où $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \left(1 - P(\bar{A})\right)P(B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$

$P(B) - P(\bar{A} \cap B)$=*P(B)*- $P(\bar{A})P(B)$, *Alors :*

$$P(\bar{A})P(B) = P(B) - P(B) + P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$$

Donc $\bar{A}$ *et B sont deux événements indépendants*

6.1.Indépendance totale de trois événements :

***Théorème 17* :** Trois événements A, B et C sont totalement indépendants (mutuellement indépendants) si et seulement si :

i) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
ii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
iii) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
iv) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

Exercices :

Exercice 1 :

Quatre hommes déposent leurs chapeaux au vestiaire en entrant un restaurant et choisissent au hasard en sortant 1 des 4 chapeaux. Calculer les probabilités suivantes.

i) Aucun des 4 hommes ne prend son propre chapeau.
ii) Exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau

Réponse : *les quatre chapeaux seront numérotés comme ci-dessous :*
1 : chapeau du 1^{ier} *homme ; 2 : chapeau du* 2^{ier} *homme, 3 : chapeau du* 3^{ier} *homme ; 4 : chapeau du* 4^{ier} *homme.*

Donc, le nombre d'issues possibles est : 4! =24. [(1,2,3 ,4), (1, 2, 4, 3), (1, 4, 2, 3), (4, 1,2 , 3), ……, (4,3,2, 1)]

1. *Soit A : « l'évènement aucun des 4 hommes ne prend son propre chapeau »*
   Le nombre d'issues favorables est 9, donc $P(A) = 9/24$
2. *Soit B « l'évènement Exactement 2 des 4 hommes prennent leur propre chapeau*
   Le nombre d'issues favorables est 6, donc $P(B) = 6/24$

Exercice 2 :

Une urne contient 5 boules blanches et 6 boules rouges. On tire 3 boules au hasard en un seul tirage.

i) Quelle est la probabilité pour que le tirage donne 3 boules blanches ?

ii) Quelle est la probabilité pour que le tirage donne 1 boule blanche et 2 boules rouges ?

Réponse :

i) Soit l'événement A : « avoir trois boules blanches », donc $P(A) = \frac{C_5^3}{C_{11}^3}$

ii) Soit B : « avoir 1 boule blanche et 2 boules rouges », alors $P(B) = \frac{C_5^1 C_6^2}{C_{11}^3}$

Exercice 3 :

Un dé truqué de telle façon que la probabilité d'apparaitre pour chacune des faces soit proportionnelle au point marqué sur cette face (par exemple, un 2 deux fois plus probable qu'un 1). On jette le dé une fois. Calculer la probabilité :

i) De chaque événement élémentaire

ii) D'obtenir un point impair ?

iii) D'obtenir un point pair ?

Réponse :

i) Soient les évènements suivants **:**

A_i *: « Obtenir le point i » tel que i=1, 2, 3, 4, 5 et 6*

Nous avons : $P(A_1)+ P(A_2)+ P(A_3)+ P(A_4)+ P(A_5)+ P(A_6)=1$

Ainsi : $P(A_2)=2P(A_1)$

$P(A_3)=3P(A_1)$

$P(A_4)=4P(A_1)$

$P(A_5)=5P(A_1)$

$P(A_6)=6P(A_6)$

Donc : $P(A_1)+ 2P(A_1)+ 3P(A_1)+ 4P(A_1)+ 5P(A_1)+ 6P(A_1)=1 \Longrightarrow 21P(A_1)=1$

$\Longrightarrow P(A_1)=1/21$

$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P(A_4)$	$P(A_5)$	$P(A_6)$
$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

ii) $P(A_1)+P(A_3)+P(A_5)=1/21 + 3/21 + 5/21 = 9/21$

iii) $P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=12/21$

Exercice 4 :

On considère une famille avec deux enfants. On suppose que la venue d'une fille est aussi certaine que celle d'un garçon.

i) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

ii) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'au moins un des enfants est garçon ?

Réponse :

On désigne par f : fille et par g : garçon, alors l'ensemble fondamental des événements : $\Omega = \{f,f),(f,g),(g,f),(g,g)\}$

i) Soient A : « les deux enfants sont des garçons » et B : « l'ainé est un garçon », alors : $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ *où* $A = \{(g,g)\}, B = \{(g,f),(g,g)\}, A\cap B = \{(g,g)\}$

$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{4}\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$

ii) soit C : « au moins un des enfants est garçon », alors $P\left(A/_{C}\right) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}$

$C = \{(g,g),(f,g)(g,f)\}$, $A \cap C = \{(g,g)\}$ *d'où :* $P\left(A/_{C}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Exercice 5 :

Une compagne d'assurance répartit les assurés en 3 classes : personnes à bas risque, risque moyen et haut risque. Ses statistiques indiquent que la probabilité qu'une personne soit impliquée dans un accident sur une période d'un an est respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30. On estime que 20% de la population est à bas risque, 50% à risque moyen et 30 à haut risque.

1. Quelle est la proportion d'assurés qui ont eu un accident ou plus au cours d'une année donnée ?
2. Si un certain assuré n'a pas eu d'accidents l'année passée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?

Réponse **:**

Soient les événements suivants :

A : « Personnes à bas risque », $P(A) = 0{,}20$

B : « Personnes à moyen risque », $P(B) = 0{,}50$

C *: « Personnes à haut risque »,* $P(C) = 0{,}30$

D : « personne impliquée dans un accident », $P\left(D/_{A}\right) = 0{,}05$, $P\left(D/_{B}\right) = 0{,}15$, $P\left(D/_{C}\right) = 0{,}30$

$\overline{D}$ *: « Personne non impliquée dans un accident »,* $P\left(\overline{D}/_{A}\right) = 0{,}95$, $P\left(\overline{D}/_{B}\right) = 0{,}85$, $P\left(\overline{D}/_{C}\right) = 0{,}70$

1. *T : « personnes ayant un accident au moins durant une année »*

   $P(T) = P(A)P\left(D/_{A}\right) + P(B)P\left(D/_{B}\right) + P(C)P\left(D/_{C}\right)$= *(0,20)(0,05)+(0,50)(0,15)+(0,30)(0,30)*

2. $P\left({}^{A}/_{\overline{D}}\right)=\frac{P(A)P\left({}^{\overline{D}}/_{A}\right)}{P(A)P\left({}^{\overline{D}}/_{A}\right)+P(B)P\left({}^{\overline{D}}/_{B}\right)+P(C)P\left({}^{\overline{D}}/_{C}\right)}$

Chapitre III : Variables aléatoires et loi de probabilités

1. Définitions

Définition 1: une variable aléatoire réelle X sur un ensemble fondamental Ωse définit souvent comme une fonction de Ω dans l'ensemble R des nombres réels, tels que l'inverse de chaque intervalle de R doit être un événement de Ω. Autrement dit ,X : Ω → R. Pour tout intervalle [a, b] ⊂ R, l'ensemble {X ∈ [a, b]} = {ω ∈ Ω : X(ω) ∈ [a, b]} est un événement.

Définition 2 : l'ensemble $\{x \in R/\ x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé l'espace de la variable aléatoire X.

Exemple :

On lance successivement deux fois une pièce de monnaie, on définit la variable aléatoire X correspond au nombre de « face » obtenu.

Réponse : l'ensemble fondamental des résultats possibles est :$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$,

Evénements élémentaires	Variable aléatoire X (nombre de face)	Probabilité $P(X = x)$
(P,P)	0	1/4
(P,F)	1	2/4
(F,P)		
(F,F)	2	1/4

Donc les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X, ou l'espace de X, sont les suivantes: $X = \{0,1,2\}$

Remarque :

Si X et Y sont des variables aléatoires définies sur le même ensemble fondamentalΩ, alors les nouvelles variables $X + Y$, $X + k$, kX, et XY sont aussi des variables aléatoires ($k \in R$). Car celle-ci sont des fonctions sur Ωdéfinies comme ci-dessous :

$(X + Y)(\ \omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

$(X + k)(\omega) = X(\omega) + k$.

$(kX)(\omega) = kX(\omega)$.

$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$.

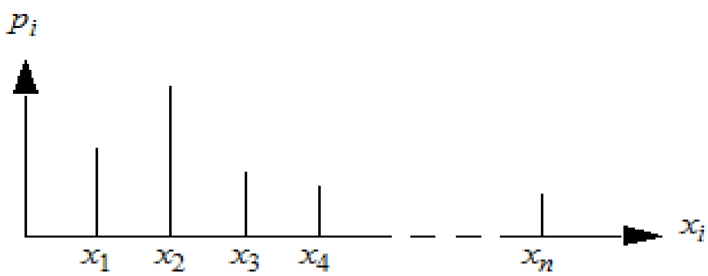
Notation : les notations aux $P(a)$ et $P(a \leq X \leq b)$ seront utilisées pour désigner les probabilités des événements « $X\, prend\, la\, valeura$ » et « $Xcompriseentrelesdeuxvaleursaetb$ »

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.1. Définition : la loi de probabilité d'une variable aléatoire X consiste à déterminer pour toutes les valeurs possibles de X leurs probabilités d'apparition. C'est-à-dire, si X est une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω fini, alors les événements élémentaires de Ω relatifs à X sont définis comme suit : X(ω) = $\{x_1, x_2, \dots \dots x_n\}$. La probabilité pour que l'événement relatif à $x_i$sont réalisées et définies par $P(X = x_i)$=f(x_i). cette dernière est appelée loi de probabilité, ou encore densité de distribution de probabilité. Le tableau ci-dessus résume une telle définition :

Variable aléatoire X	x_1	x_2	.. ..x_i	x_n
Loi de probabilité $P(X = x_i)$ ($ou\ P_i$)	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	.......$P(X = x_i)$	$P(X = x_n)$

En outre, toute loi de probabilité se représente graphiquement par diagramme en bâtons, comme ci-dessous :



Propriétés d'une loi de probabilité $P(X = x_i)$ *:*

i) $P(X = x_i) \geq 0,$

ii) ii) $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

3.Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle :

3.1. **Définition** : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est une application F de R dans [0,1]. Autrement dit, la fonction de répartition F permet de calculer les différentes probabilités d'une varaible aléatoire dont la valeur est inférieure strictement à un seuil donné(x).Mathématiquement parlant, la fonction de répartition, noté F(x), est définie de la manière suivante :

$\boldsymbol{X} : R \ \rightarrow$ [0,1].

$$F(x) = P(X \leq x)$$

3.2.**Propriétés de la fonction de répartition :**

Toute fonction de répartition $F(x)$ doit remplir les critères suivants :

i) $F(x)$ est une fonction croissante, autrement dit si a et $b \in R,$ et $a < b$, alors : $F(a) < F(b)$

ii) $\lim_{x \to +\infty} F(x)$=1

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x)$=0

iv) $F(x)$ est continue à droite.

3.3.**Relation entre fonction de répartition et la probabilité de $\boldsymbol{X}$:**

Les calculs de probabilités relatifs aux différentes valeurs de X peuvent être traités en se basant sur la fonction de répartition.

i) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, tel que $a < b$

Démonstration : on peut écrire $(X \leq b)$ comme l'union de deux événements mutuellement disjoints. C'st à dire,$\{(X \leq b)\} = \{(X \leq a)\} \cup \{(a \leq X \leq b)\}$ alors :

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b) \Rightarrow P(a \leq X \leq \mathrm{b}) = \mathrm{P(X \leq b) - P(X \leq a)}$$

Pour obtenir la probabilité $P(< b)$ en utilisant la propriété de continuité, alors :

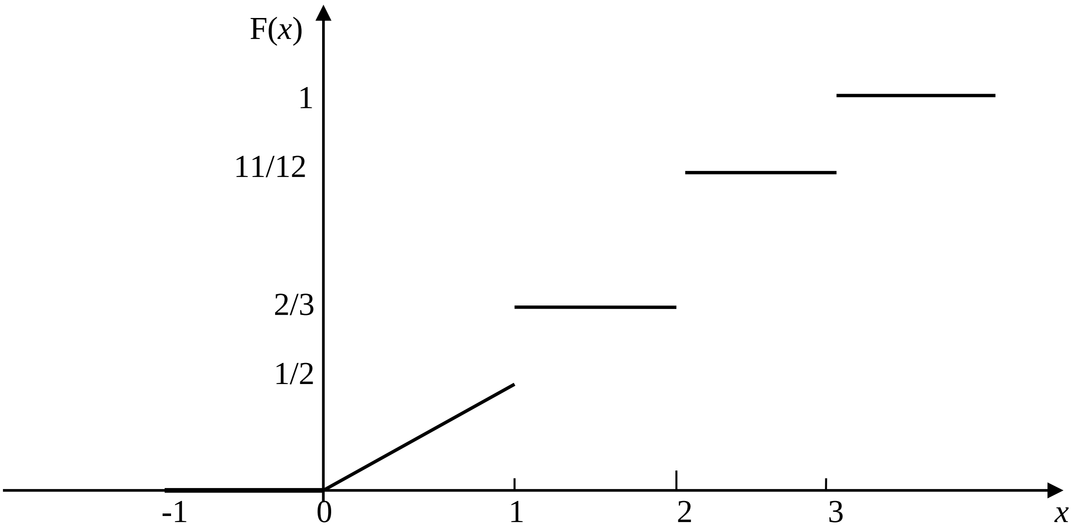
$$P(X < b) = P(\lim_{n\to+\infty}\left\{X < b - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to+\infty} P\{X < b - 1/n\} = \lim_{n\to+\infty} F(b - \frac{1}{n})$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition $F(X)$ est définie par :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

La représentation graphique d'une telle fonction de répartition est la suivante :



En se basant sur la fonction de répartition mentionnée ci-dessus pour calculer les probabilités suivantes :

$$P(X < 3), P(X = 1), P\left(X > \frac{1}{2}\right), P(2 < X \le 4)$$

Réponse :

i) $P(X < 3) = P(\lim_{n\to+\infty}\left\{X < 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to+\infty} F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 11/12$

ii) $P(X = 1 = P(X \leq 1) - P(X < 1) = F(1) - \lim_{n \to +\infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$
$= 1/6$

iii) $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = 3/4$

iv) $P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = 1 - \frac{11}{12} = 1/12$

3.4. Types de variables aléatoires :

3.4.1. Variables aléatoires discrète :

a). Définition : une variable aléatoire X est dite discrète si et seulement si que toutes les valeurs qui peuvent prendre X sont des quantités dénombrables. Sa loi de probabilité est définie par $f(x) = P(X = x)$. Donc si la variable aléatoire discrète X peut prendre les valeurs dénombrables x_1, x_2, x_3 ... alors $f(x_i) = P(X = x_i) \geq 0$ tq. $i = 1,2, ...$

Théorème 18: $\forall X = \{x_1, x_2, x_3 \dots .\}$ *alors* $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

b) Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :

On exprime la fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrète en fonction des valeurs prises par sa loi de probabilité : $F(a) = \sum_{x \leq a} P(x) = P(X \leq a)$

Dans le cas précis où les valeurs possibles de la variable aléatoire sont x_1, x_2, x_3 ... avec

$x_1 < x_2 < x_3$ ... , alors la fonction de répartition est une fonction en escalier.

Exemple : à titre illustratif, on prend l'exemple d'une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$P(X = 1) = \frac{1}{4}, P(X = 2) = \frac{1}{2}, P(X = 3) = \frac{1}{8}, P(X = 4) = 1/8$, donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

3.4.2. **Moments d'une variable aléatoire discrète :**

a) L'Espérance mathématique :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète est l'un des concepts les plus importants dans la théorie des probabilités. Pour une aléatoire discrète X de loi de probabilité $P(X=x)$, l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, se définit par l'expression suivante : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$

En réalité, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs que peut prendre X, et les poids sont les probabilités qui les associées.

Exemple 1 : soit X une variable aléatoire dont les probabilités sont :

$P(X=0)=\frac{1}{2}, P(X=1)=1/2$, alors $E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)=0\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{2}\right)=1/2$

Exemple 2 : on cherche l'espérance $E(X)$de la varaible aléatoire X résultant du lancé d'un dé équilibré

Réponse : $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=1/6$

Alors : $E(X)=1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)+6P(X=6)=7/2$

Exemple 3 **:** ***I*** une variable aléatoire indicatrice pour l'événement A

$$I=\begin{cases}1 \; si\ A\ se\ produit \\ 0 \qquad\qquad sinon\end{cases}$$

Réponse : $P(X=1)=P\{A\}, P(X=0)=1-P\{A\}$ alors :

$E(I)=1P(X=1)+0P(X=0)$= P{A}

b) Espérance mathématique d'une fonction de variable aléatoire :

Théorème19 :

Si X est une variable aléatoire discrète pouvant prendre ses valeurs parmi les valeurs x_i, i≥ 1, avec des probabilités respectives $P(X=x_i)$, alors pour toute fonction réelle g on aura $E\big(g(X)\big)=\sum_i g(x_i)P(X=x_i)$

Exemple : Soit X une variable aléatoire qui prend une des trois valeurs suivantes : -1,0, 1, avec les probabilités respectives : $P(X = -1) = 0{,}2, P(X = 0) = 0{,}5, P(X = 1) = 0{,}3$; calculer $E(X^2)$?

Réponse : $E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(X = x_i)$

$$E(X^2) = (-1)^2(0.2) += (O)^2(0.5) += (1)^2(0.3) = 0{,}5$$

Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors nous avons :

i) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
ii) $E(aX) = aE(X), a \in R$
iii) $E(aX + b) = aE(X) + b, (a, b) \in (R, R)$
iv) $Si\ X \geq 0, alors\ E(X) \geq 0$

Remarque : l'espérance mathématique E(X) est un opérateur linéaire

c) **Variance d'une variable aléatoire discrète :**

Soit X une variable aléatoire discrète, alors la variance de X sera donnée par l'expression suivante :

$V(X) = E[X - E(X)]^2 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Démonstration :

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = \mathrm{E}[\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{XE(X)} + 2(\mathrm{E(X)})^2]$$

$$= E(X^2) - 2\mathrm{E(X)E(X)} + 2(\mathrm{E(X)})^2$$

$$= E(X^2) - (\mathrm{E(X)})^2$$

Exemple : On veut calculer la variance d'une variable aléatoire X relative au nombre obtenu lors du jet d'un dé équilibré.

Réponse : Nous avons les probabilités $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$

Alors : $E(X) = 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + 6P(X = 6) = 7/2$

Et $E(X^2) = 1^2P(X = 1) + 2^2P(X = 2) + 3^2P(X = 3) + 4^2P(X = 4) + 5^2P(X = 5) + 6^2P(X = 6) = 91/6$

Alors la variance : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(\frac{91}{6}\right) - (\frac{7}{2})^2 = \left(\frac{35}{12}\right)$

Propriétés :

i) $\forall\ (a, b) \in (R, R), alors\ V(aX) = a^2V(X)$
ii) $V(aX + b)$=$a^2V(X)$, car $V(b) = 0$
iii) L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
iv) $V(X) \geq 0$

3.4.3. **Variables aléatoires continues :**

a) **Définition** : soit une application $X: \Omega \to R,$ on dit que X est une variable aléatoire continue (parfois dite absolument continue), s'il existe une fonction $f\ \geq 0$ définie pour tout $x \in R$ et vérifiant pour tout B de nombre réel la propriété suivante :

$$P(X \in B) = \int_B\ f(x)dx(x)$$

La fonction f est appelé la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Théorème 20:

Soit X une variable aléatoire continue, alors :

$$P(X \in]-\infty, +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Exemple : Si $B = [a, b]$, alors : $P(X \in B) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Si $a = b$, alors : $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

Par conséquent, pour toute variable aléatoire X, alors :

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2)\ si\ 0 < x < 2 \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

i) Quelle est la valeur de c ?
ii) Calculer $P(X > 1)$?

Réponse :

i) f est une fonction de densité $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$

$$\Rightarrow c[2x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)x^3]_0^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

ii) $P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f\,(x)dx = \frac{3}{8}\int_1^{+\infty}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$

b) Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue :

La relation entre la fonction de répartition $F(x)$ est la fonction de densité $f(x)$d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

D'où : $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Exemple 1 : soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est donnée par :$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$, déterminer la fonction de répartition $F(x)$

Réponse :

i) si $x \in]-\infty, 0] \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

ii) si $x \in]0, +\infty[$: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$

Exemple 2 **:** la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$, Déterminer la fonction de densité ?

Réponse : nous avons $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, alors :

i) $si\ \ x < a : f(x) = F'(x) = 0$

ii) si $a \leq x < b$: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{b-a}$

iii) $si\ \ x \geq b : f(x) = F'(x)$=0

c) Espérance mathématique $E(X)$ et variance $V(X)$d'une variable aléatoire continue :

i) **L'Espérance** : Si X est une variable aléatoire continue ayant pour densité f, alors : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Exemple **:** Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par :

$$f(x) = 2x, \qquad si\ 0 \leq x \leq 1$$

Alors : l'espérance $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx = \frac{2}{3}$

***Théorème 21*:**

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, alors pour toute fonction réelle $g(x)$ on aura : $E\big(g(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

Exemple **:** soit X une variable aléatoire dont la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \text{et } g(x) = e^x$$

Alors : $E(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx = \int_{0}^{1} e^x dx = e - 1$

d) Linéarité de l'espérance :

Théorème 22:

Pour tous réels$a\ et\ b$, nous avons $E(aX + b) = aE(X) + b$

e) Variance d'une variable aléatoire continue $\boldsymbol{V(X)}$:

Soit X une VA continue, alors : $V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple : déterminer la variance de la variable aléatoire X dont la densité :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Réponse : $E(X) = \frac{2}{3}$, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2(2x)dx = \int_{0}^{1} 2x^3 dx = \frac{1}{2}$

D'où : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = ½ - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$

Remarque : $\forall (a, b) \in (R, R)$ alors : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

L'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercices :

Exercice 1 :

On jette trois fois une pièce de monnaie mal équilibrée et telle que $P(F) = 3/4\ et\ P(P) = 1/4$. Soit X la variable aléatoire représentant la plus grande succession de faces que l'on obtient.

- Déterminer la loi de probabilité de X et représenter la graphiquement
- Donner sa fonction de répartition et sa représentation graphique
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X

Exercice 2 :

Un joueur lance deux pièces de monnaie bien équilibrée. Il gagne 10 DA ou 20 DA selon qu'il obtient 1 ou 2 faces. Par contre, il perd 50 DA s'il n'obtient aucune face.

- le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 :

Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose *X* « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

1. Calculer la loi de probabilité de *X*, c'est-à-dire $P(X = k)$ avec $k = 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 4 :

On choisit deux cartes au hasard dans une boite contenant 5 cartes numérotées 1,1, 2, 2, et 3. Soit X la somme et Y le maximum des deux nombres tirés.

- Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et la variable aléatoire Y ?
- Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X+Y ?
- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X, Y et X+Y ?

Exercice 5 : Soit *X* une variable aléatoire dont la fonction de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & si -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Quelle est la valeur de c?
- Quelle est la fonction de répartition de *X, E(X) et V(X) ?*

Chapitre IV : Lois de probabilité usuelles

Le présent chapitre a pour objectif de présenter une liste de lois de probabilités les plus usuelles. En effet, pour chaque loi de probabilité usuelle nous allons donner ses caractéristiques, son non, son symbole, sa loi de probabilité ou sa fonction de densité, ainsi que ses moments. Etant donnée la nature de la variable aléatoire, deux catégories de lois usuelles peuvent être distinguées, à savoir les lois discrètes ou des lois continues.

1. Lois discrètes :

Par convention, en entend par une loi discrète, toute loi de probabilité associée à une variable aléatoire discrète.

a. Loi discrète uniforme :

Définition : soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une loi discrète Uniforme sur l'intervalle $[1, n]$, notée $X \leadsto I_{[1,n]}$, si est seulement si $P(X = x) = 1/n$, et ce pour toute valeur de $x = \{1,2, \dots . n\}$. Cela implique $P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = n)$.

Exemple **:** On lance un dé, alors l'ensemble des résultats possibles est :

$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ 5,\ 6\}, alors P(X = x) = 1/6 \forall = \{1,2, \dots . , n\}$

Il est clair que $n = 6$ points, alors $(X = x) = 1/6$. De ce fait, la variable aléatoire X suit une loi uniforme et on note $\leadsto I_{[1,6]}$ .Autrement dit**,** pour toute partie finie A de Ω, alors :$P(A) = \frac{cardde\ (A)}{cardde\ (\Omega)} = \frac{nombredecasfavorablesdeA}{nombredecaspossibles}$

Moments d'une loi discrète uniforme :

- **L'espérance mathématique$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$:**

$$E(X) = \left(\frac{1}{n}\right)(1) + \left(\frac{1}{n}\right)(2) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)(n) = \left(\frac{1}{n}\right)[1 + 2 + \cdots + n] = \frac{n+1}{2}$$

D'où : $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n+1}{2}$

- **La variance $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})$**

$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, alors :

$E(X^2) = \left(\frac{1}{n}\right)[1 + 4 + 9 + \cdots + n^2] = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Par conséquent, $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$

D'où : $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2 - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}$

b. Loi de Bernoulli, notée $\mathcal{B}(p)$:

Définition : La loi de Bernoulli intervient dans le cas où la variable aléatoire X prend uniquement deux valeurs, appelée par convention succès ou échec. En effet, la loi de Bernoulli de paramètre p est celle associée à une varaible aléatoire discrète dont les valeurs ne peut être que 1 ou 0 avec les probabilités p et $(1-p)$.

On note alors $X \leadsto \mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire la varaible aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Quelques Exemples relatifs aux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli:

- On lance une pièce de monnaie, donc les résultats possibles sont : pile ou face
- Un étudiant passe un examen, il se pourrait qu'il ait ou pas.
- Le test de qualité d'un lot de pièces, des pièces défectueuses ou non défectueuses.
- Une porte fermée ou ouverte.

Pour une telle expérience, on va associer à la variable aléatoire X la valeur 1 pour un succès, et la valeur 0 pour un échec. Alors on note :

$$X = \begin{cases} 1: Suxcès \\ 0: \ échec \end{cases}$$

Si La probabilité d'avoir un succès : $P(X = 1) = p$, alors la probabilité d'avoir un échec est $P(X = 0) = 1 - p = q$. on not alors $X \leadsto \mathcal{B}(p)$

Moments : Les moments d'une variable X qui suit une loi de Bernoulli sont donnés par :

- **L'espérance mathématique $\boldsymbol{E(X)}$** :

$$E(X) = (1)p + (0)(1-p) = p$$

D'où : $E(X) = p$

- **La variance $V(X)$** : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2)p + (0^2)(1-p) - p^2$
$= p - p^2 = p(1-p)$

D'où : $V(X) = pq = p(1-p)$

Exemple :

On lance, une seule fois, dans l'air une pièce de monnaie, les résultats possibles sont ainsi :

$$\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$$

On désigne par $X = \begin{cases} 1: pile \\ 0: face \end{cases}$

Il est clair que la variable aléatoire X suit une de Bernoulli dont $P(X=1) = \frac{1}{2}$ et $P(X=0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc on note $X \leadsto \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

L'espérance mathématique de X : $E(x) = p = \frac{1}{2}$

La variance de X : $V(X) = pq = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

c. Loi binomiale :

Soit X une variable aléatoire discrète dont les résultats possibles sucés ou échec. Si on répète la même expérience n fois, alors on dit que la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on note alors $X \leadsto \mathcal{B}(n,p)$

Remarque : $\sum \mathcal{B}(p) \leadsto \mathcal{B}(n,p)$, c'est dire répéter n fois une loi de Bernoulli va donner une loi binomiale.

La loi de probabilité d'une loi binomiale est définie par la formule ci-après :

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

Oùx : est nombre de succès parmi les n durant les n expériences.

Moments d'une variable sui une loi binomiale :

- **L'espérance :**

Nous savons que $\sum \mathcal{B}(p) \leadsto \mathcal{B}(n,p)$, alors X $\leadsto \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow X = \sum X_i$, tel que $X_i \leadsto \mathcal{B}(p)$

Par conséquent, $E(X) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i)$, (car les $X_i$sont indépendants)

$$= np$$

D'où $$E(X) = np$$

- **La variance :**

$$V(X) = npq = np(1 - P)$$

Exemple :

On veut réaliser une étude clinique sur des malades se présentant à une consultation hospitalière. Pour cette étude, seuls les malades répondant à un ensemble de critères C sont retenus. Des caractéristiques antérieures ont montré que 20% des consultations présentent les critères$C$.

Dix malades viennent consulter le premier jour. Soit Xla variable aléatoire relative au « nombre de malades retenus » c'est-à-dire répondant à l'ensemble des critères C. la variable X alors suit la loi binomiale, c'est-à-dire $X \backsim \mathcal{B}(10;\ 0{,}20)$

La probabilité pour qu'aucun malade ne soit consulté ce jour est égale à :

$$P(X = 0) = C_{10}^{0}(0{,}20)^{0}(0{,}80)^{10} = 0{,}107$$

Par ailleurs, la probabilité pour qu'au moins un malade soit consulté :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}107 = 0{,}803$$

d. Loi géométrique :

La loi géométrique est la loi de la variable X, « loi de nombre d'essais nécessaires », pour qu'un événement de probabilité p apparaisse la première fois après le n^{ième} essai. Les hypothèses étant les mêmes que la loi binomiale, en particulier, la probabilité p reste constante au cours des essais, alors :

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}\ x \in \mathbb{N}^{*}$$

Il y a $(x - 1)$ échecs avant d'obtenir le succès au $x^{ième}$essai.

Moments : $E(X) = \frac{1}{p}$

$V(X) = \frac{1-p}{p^{2}}$,

*Exemple :*Un certain matériel a une probabilité $p = 0{,}02$ constante de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, mis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. La probabilité pour que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au deuxième essai égale à :

$$P(X = 10) = (0{,}02)(1 - 0{,}02)^9 = 0{,}0167$$

Moments : $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}02}$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - 0{,}02}{0{,}02^2}$$

e. Loi de Poisson, notée $P(\lambda)$:

Cette loi a été découverte au début du XIX° par Siméon-Denis Poisson. Cette loi s'applique aux événements rares, c'est dire la probabilité de survenance d'un tel événement est très faible. C'est le cas notamment de contrôle de qualité puisque on suppose que les erreurs sont rares, les risques liés aux crédits…etc. En effet, on dit qu'une une variable aléatoire entière$X$, positive ou nulle, suit une loi de Poisson de paramètre$\lambda > 0$, si et seulement si : $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ où $x \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

La loi de Poisson est une loi de probabilité $\Rightarrow \sum P(X = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$

$\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{+\lambda} = e^0 = 1$, donc la loi de poisson est une loi de probabilité.

Quelques exemples relatifs à la loi de Poisson :

- Le nombre d'appels téléphoniques pendant un intervalle de temps.
- Le nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la production étant de bonne qualité
- Risque de crédits
-

Moments :

Théorème 23 : soit X une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre$\lambda > 0$, alors $E(X) = V(X) = \lambda$.

Démonstration :

$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$, (où $k = x - 1$)

$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$, (car $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$)

D'où $E(X) = \lambda$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \lambda^2$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 P(X = x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda}$

On pose $x = x - 1 + 1$, alors :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{+\infty} (x-1+1) \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda}$$

$= \sum_{x=2}^{+\infty} (x-1) \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda}$

$= \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} e^{-\lambda}$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$

$= \lambda^2 + \lambda$

d'où : $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

2. Lois continues :

Les lois continues sont celles associées à des variables aléatoires continues.

a. Loi de Laplace-Gauss (Loi normale)

Définition : Une variable aléatoire X réelle, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, suit une loi normale de l'espérance (μ) et d'écart type (σ) si sa densité de probabilité est définie par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **Où :** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ alors on note $\boldsymbol{X} \leadsto \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu};\ \boldsymbol{\sigma})$.

La loi normale est utilisée dans des cas très nombreux. Elle peut être appliquée pour des phénomènes physiques, en économie, en médecine, en contrôle de qualité….etc.

Représentation graphique de la fonction de densité :

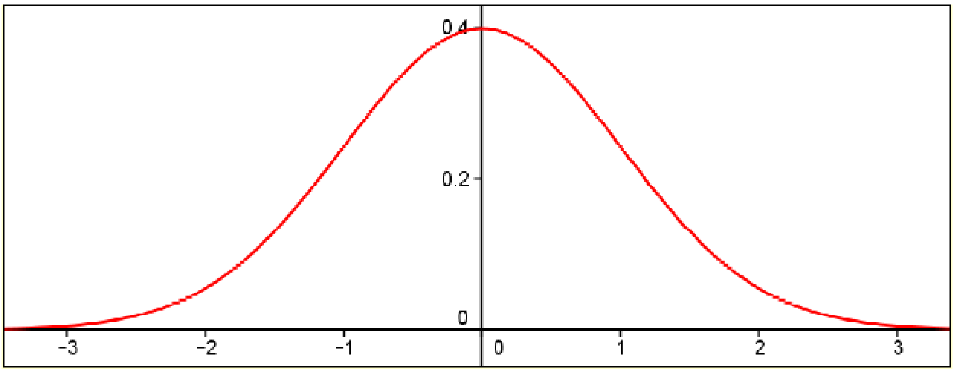
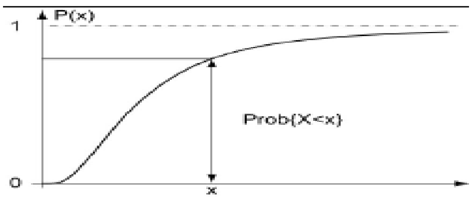


Figure 1:fonction de densité d'une loi normale

Par ailleurs, la fonction de répartition d'une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ est donnée par la formule suivante :

$$F(X) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Où sa représentation graphique prend la forme ci-dessous :



Fonction de répartition P(x)

Remarque :

Si une variable aléatoire$X \sim N(\mu;\, \sigma)$**,** alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire de moyenne $(a\mu + b)$ et d'écart type $(a\sigma)$ et de variance $V(Y) = a^2\sigma^2$[avec $(a, b) \in (R, R)$]

Démonstration :

Nous avons $E(X) = \mu \Rightarrow E(Y)=E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b = a\mu + b$

D'où : $E(Y) = a\mu + b$

Par ailleurs, $V(X) = \sigma^2 \Rightarrow V(Y) = V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2V(X) + 0 = a^2\sigma^2$

D'où $V(Y) = a^2\sigma^2$.

Moments :

$E(X) = \mu, \qquad V(X) = \sigma^2$

- **Variable aléatoire centrée réduite : $Y \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1)$**

Définition : On dit que la variable aléatoire Y est centrée réduite associée à la variable X (où $X \rightsquigarrow \mathrm{N}(\mu;\ \sigma)$) si est seulement si $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

La fonction de densité de la variable aléatoire normale centrée réduite :

$$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y)^2}{2}}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite :

$$F(X) = P(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-(t)^2}{2}} dt$$

Propriétés :

Si $Y \rightsquigarrow \mathrm{N}(0, 1)$, c'est-à-dire Y suit une loi normale centrée réduite de moyenne (0) et d'écart type (1), alors les propretés ci-dessous sont toujours vérifiées :

i) $\forall\, y \in R, F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$
ii) $\forall\, y \in R, F(-y) = 1 - F(y)$
iii) $\forall\, y \in R, P(Y > y) = 1 - P(Y \leq -y) =$
iv) $\forall\, (y_1, y_2) \in (R, R), P(y_1 < Y < y_2) = (y_2) - F(y_1)$, où $y_1 < y_2$

Les moments : $E(Y) = 0,\ V(Y) = 1$

Démonstration : $E(Y) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \mu] = \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu] = 0$. $V(Y) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$.

Remarque :

La table ci-dessous donne les différentes probabilités relatives aux différents fractales appartenant à [0, +∞[d'une variable aléatoire centrée réduite (c'est l'air de la

$F(x)$situé à gauche). Par conséquent, le calcul des probabilités d'une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart type σ se fait en utilisant la formule suivante :

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, où $Y \leadsto \mathrm{N}(0,1)$

Rappels:
1/ P(Z > z) = 1 - P(Z < z) et 2/ P(Z < -z) = P(Z > z)
Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:
1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- 0,8925 = 0,1075
2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale N(3,2), donc de moyenne 3, et d'écart type 2. Calculer :

i) $P(X < 4)$

ii) $P(X < -1)$

iii) $P(X > 1)$

iv) $P(X < x_1)$=0,75

v) $P(X > x_2 = 0{,}85$

Réponse : Nous avons $X \leadsto \mathrm{N}(3,2) \Rightarrow Y = \frac{X-3}{2} \leadsto \mathrm{N}(0,1)$

i) $P(X < 4) = P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{4-3}{2}\right) = P(Y < 0{,}5) = F(0{,}5) = 0{,}6915$

ii) $P(X < -1) = P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{-1-3}{2}\right) = P(Y < -2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}9772$

$= \ 0{,}0228$

iii) $P(X > 1) = P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{1-3}{2}\right) = P(Y > -1) = 1 - P(Y \leq -1)$

$=1 - [1 - F(1)] = F(1)$ =0,8413

vi) $P(X < x_1)$=0,75, $\Longrightarrow P(\frac{X-3}{2} < \frac{x_1-3}{2})$=$P\left(Y < \frac{x_1-3}{2}\right) = F\left(\frac{x_1-3}{2}\right) = 0{,}75$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - 3}{2} = 0{,}6745$$

$$\Longrightarrow x_1 = 4{,}35$$

vii)$P(X > x_2) = 0{,}85 \Longrightarrow P(\frac{X-3}{2} > \frac{x_2-3}{2})$=$P\left(Y \ > \frac{x_2-3}{2}\right)$

$= 1 - P(Y \leq \ -[\frac{x_2-3}{2}]$)=0,85

= $(Y \leq \ -[\frac{x_2-3}{2}]$) = 0,15

$$\Longrightarrow x_2 = 0{,}9272$$

b. Loi exponentielle, notée $\xi(\lambda)$:

Définition : on dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètreλsi sa densité est définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Et la fonction de répartition $F(x)$: $F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$

Démonstration :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

D'où : $F(x) = 1 - e^{1x}$

Il est clair que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-\lambda x}) = 1$

$$=\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1$$

Les moments :

L'Espérance mathématique : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ **, La variance :**$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Démonstration :$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} x \ \lambda e^{-\lambda x}dx$ (*intégration par partie*)

$$=[-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} - [\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}]_0^{+\infty} = \frac{\mathbf{1}}{\lambda}$$

Remarque : l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle est égale à son écart type, car $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = 1/\lambda = E(X)$

Exercices :

Exercice 1 :

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25 % sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, n´négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X le « nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier?
3. Si l'´epicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-l`a, combien y aura-t-il de plaintes?

Exercice 2 :

Une équipe « A » a la probabilité 2/3 de gagner chaque fois qu'elle joue. Sachant que l'équipe « A » joue 4 parties, calculer la probabilité pour que A gagne :

- Exactement deux parties
- Au moins une partie
- Plus la moities des parties

Exercice 3 :

Une famille a 6 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait :

- 3 garçons et 3 filles
- Moins de garçons que de filles

(On suppose que la probabilité pour qu'un enfant particulier soit un garçon est ½)

Exercice 4 :

La durée de vie en heures d'un tube électronique est une variable aléatoire ayant pour densité : $f(x) = xe^{-x} \quad x \geq 0$

Calculer l'espérance de la durée de vie d'un tel tube ?

Références bibliographiques :

- Ash Robert B. (2008). **Basic probability theory**. Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501
- Cantoni Eva, Huber Philippe, and Ronchetti Elvezio (2006**). Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique.** Springer-Verlag France, Paris.
- Sheldon M. Ross, (1994). **Introduction aux probabilités**. Traduction de la quatrième édition Américaine. Traduit de l'américain par Christian Hofer et Frédéric Dorsaz. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne
- Seymour Lipschiuts. **Probabilités : cours et problèmes (deuxième tirage**). Séries Schaum
- Saporta Gilbert (1990). **Probabilités, analyse de données et statistique**. Editions Technip, France.
- Veysseyre Renée (2001). **Statistique et probabilités pour l'ingénieur**. DUNOD, Paris 2001.
- Séries de TD de Stat II proposées par l'équipe pédagogique composé de : Dr. Bouakline S., Me. Mousli A., Melle. Meziani N., Mme Mimoune Z., Melle. Mouhoubi N. et Dr. Bouznit M. (Faculté des Sciences Economiques, Université de Bejaia).

TABLE DES MATIETRES