

*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université Abderrahmane Mira de Bejaia  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil*

---

# **COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE**

---

**Préparé par:**

**Dr. BOUZIDI Mohamed Amin**

**2016/2017**

Table des matières.....	i
Introduction.....	iv
<b>CHAPITRE I. OUTILS MATHÉMATIQUES .....</b>	<b>2</b>
I.1 Introduction .....	2
I.2 Définition d'un vecteur .....	2
I.2.1 Types de vecteurs .....	2
I.2.2 Espace vectoriel.....	3
I.2.3 Calcul vectoriel .....	3
I.2.4 LES MOMENTS .....	10
I.2.5 Les torseurs .....	11
I.3 Exercices sur les outils mathématiques .....	16
<b>CHAPITRE II. Statique du solide .....</b>	<b>19</b>
II.1 Introduction.....	19
II.2 Notions fondamentales de la statique .....	19
II.2.1 Corps solide parfait.....	19
II.2.2 Force .....	19
II.2.3 Diagramme des forces .....	20
II.2.4 Règles et opérations sur les vecteurs libres .....	20
II.2.5 Les liaisons et les réactions .....	22
II.2.6 Équilibre d'un système de forces concourantes .....	24
II.2.7 Système de forces plan .....	27
II.2.8 Équilibre des corps solides dans l'espace .....	28
II.2.9 Équilibre analytique des corps solides.....	29
II.2.10 Équilibre graphique des corps solides .....	29
II.2.11 Équilibre des solides en présence du frottement .....	30
II.3 Exercices sur la statique du solide .....	32
<b>CHAPITRE III. Cinématique .....</b>	<b>36</b>
III.1 Introduction.....	36
III.2 Cinématique du solide.....	36
III.2.1 Cinématique du solide: Position d'un solide.....	36

III.3	Les angles d'Euler .....	38
III.3.1	Angle de précession( $\psi$ ) .....	38
III.3.2	Angle de nutation( $\theta$ ).....	39
III.3.3	Angle de rotation propre( $\varphi$ ) .....	39
III.4	Champs des vitesses et des accélérations d'un solide .....	40
III.4.1	Champs des vitesses .....	40
III.4.2	Champs des accélérations .....	41
III.5	Mouvement plan d'un solide .....	41
III.6	Mouvement plan sur plan.....	42
III.7	Mouvement d'un solide ayant un point fixe.....	42
III.8	Cinématique des solides en contact .....	43
III.9	Exercices sur la cinématique du solide .....	45
CHAPITRE IV.	Géométrie des masses .....	49
IV.1	Introduction.....	49
IV.2	Centre de masse .....	49
IV.2.1	Détermination du centre de masse.....	49
IV.2.2	Détermination expérimentale .....	49
IV.2.3	Détermination par calcul .....	49
IV.3	Moments et produits d'inertie d'un solide .....	51
IV.4	Théorème de Konig-Huyghens .....	52
IV.5	Opérateurs d'inertie et axes principaux d'inertie .....	53
IV.5.1	Produit d'inertie.....	53
IV.5.2	Opérateur d'inertie .....	54
IV.5.3	Cas particulier de solide présentant des symétries .....	55
IV.6	Centre de masse, moment, et produit d'inertie de quelques solides.....	55
IV.6.1	Cas d'un rectangle de coté h et de base b.....	55
IV.6.2	Cas du disque de rayon R de centre O et de densité surfacique $\sigma$ :.....	56
IV.6.3	Cas d'une sphère de rayon R de centre O et de masse volumique $\rho$ : .....	57
IV.7	Exercices sur la Géométrie des masses.....	58
CHAPITRE V.	Cinétique du solide.....	61
V.1	Introduction.....	61
V.2	Quantité de mouvement .....	61

V.2.1	Quantité de mouvement d'un système matériel (S).....	61
V.3	Moment cinématique .....	62
V.4	Torseur cinématique.....	62
V.5	Théorème de KOENIG .....	62
V.6	Exercices sur la cinétique du solide .....	64
CHAPITRE VI.	Principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels .....	67
VI.1	Introduction.....	67
VI.2	Résultante dynamique et moment dynamique (Torseur dynamique) .....	67
VI.2.1	Théorème de Koëinig relatif au moment dynamique .....	67
VI.2.2	Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique .....	68
VI.2.3	Théorème de Koëinig relatif à l'énergie cinétique .....	69
VI.2.4	Lois de Newton dans un référentiel galiléen .....	69
VI.3	Principe fondamental de la dynamique.....	70
VI.4	Théorème généraux de la dynamique .....	70
VI.4.1	Théorème de la résultante dynamique .....	71
VI.4.2	Théorème du moment dynamique .....	71
VI.4.3	Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe .....	71
VI.4.4	Théorème de l'action et de la réaction.....	72
VI.4.5	Théorème de l'énergie cinétique .....	72
VI.4.6	Énergie potentielle .....	73
VI.5	Lois de conservation .....	74
VI.5.1	Énergie mécanique .....	74
VI.6	Exercices sur le principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels ..	76
Bibliographie	.....	78

## Introduction

Le présent support de cours de mécanique rationnelle, s'adresse aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles et aux étudiants de deuxième année de tronc commun de science et technologie. Le cours a été élaboré pour répondre au programme de mécanique rationnelle de l'école nationale supérieur des travaux publics. Le cours se compose de trois chapitres, à la fin de chaque chapitre une série d'exercices est proposée.

Le premier chapitre se résume à un rappel mathématique destiné à donner à l'étudiant les bases nécessaires à la bonne compréhension de la suite du cours, tel que les opérations sur les vecteurs, les moments et torseurs.

Le deuxième chapitre traite de la statique du solide. Il présente des notions fondamentales de la statique, tel que: le point matériel, le corps solide parfait, les forces, les moments, les torseurs, l'équilibre d'un système de force, les liaisons, les réactions.

Le troisième chapitre, s'intéresse à la cinématique du solide. On traite dans ce chapitre: les trajectoires, vitesses et accélérations, les champs des vitesses et d'accélération, les angles d'Euler, les solides en contact.

Le quatrième chapitre présente des notions de géométrie des masse indispensables à la bonne compréhension des chapitres à suivre, nous nous intéresserons d'abord au centre des masse puis au moment et produit d'inertie d'un solide, nous enchaînerons par les opérateurs d'inertie et les axes principaux d'inertie pour terminer par la présentation des centres d'inertie, moment d'inertie et produit d'inertie de quelques solides.

Le cinquième chapitre traite de la cinétique du solide, au début de ce chapitre nous verrons les notions de quantité de mouvement et de moment cinétique pour aboutir sur le torseur cinétique et quantité de mouvement, nous achèverons le chapitre par la présentation du théorème de KOENIG.

Le sixième et dernier chapitre de ce cours s'intéresse au principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels. On se concentrera en début de chapitre sur les forces appliquées à un solide puis sur la résultante des moments dynamiques pour pouvoir présenter la notion de torseur dynamique. Dans la suite du chapitre nous présenteront le principe fondamental et les théorèmes généraux de la dynamique et en fin de chapitre nous terminerons par la présentation des lois de conservation.

## Introduction

La mécanique rationnelle, est une science qui étudie l'équilibre des corps matériels et le mouvement mécanique de la Matière. Par mouvement mécanique, on entend le changement de position relative des corps matériels qui se produit dans le cours du temps.

L'objectif de ce module est de permettre à l'étudiant de saisir la nature d'un problème statique, cinématique ou encore dynamique et d'acquérir les outils lui permettant de résoudre le problème dans le cadre de la mécanique classique. Ce cours représente une plateforme pour la résistance des matériaux et la mécanique analytique.

Le présent support de cours de mécanique rationnelle, s'adresse aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles et aux étudiants de deuxième année de tronc commun de science et technologie. Le cours a été élaboré pour répondre au programme de mécanique rationnelle de l'école national supérieur des travaux publics. Le cours se compose de six chapitres, à la fin de chaque chapitre une série d'exercices est proposée.

Le premier chapitre se résume à un rappel mathématique destiné à donner à l'étudiant les bases nécessaires à la bonne compréhension de la suite du cours, tel que les opérations sur les vecteurs, les moments et les torseurs.

Le deuxième chapitre traite de la statique du solide. Il présente des notions fondamentales de la statique, tel que: le point matériel, le corps solide parfait, les forces, les moments, les torseurs, l'équilibre d'un système de force, les liaisons et les réactions.

Le troisième chapitre, s'intéresse à la cinématique du solide. On traite dans ce chapitre: les trajectoires, vitesses et accélérations, les champs des vitesses et d'accélération, les angles d'Euler, les solides en contact.

Le quatrième chapitre présente des notions de géométrie des masse indispensables à la bonne compréhension de la suite des chapitres, nous nous intéresserons d'abord au centre des masse puis au moment et produit d'inertie d'un solide, nous enchaînerons par les opérateurs d'inertie et les axes principaux d'inertie pour terminer par la présentation des centres d'inertie, moment d'inertie et produit d'inertie de quelques solides.

Le cinquième chapitre traite de la cinétique du solide, au début de ce chapitre nous verrons les notions de quantité de mouvement et de moment cinétique pour aboutir sur le torseur cinétique et quantité de mouvement, nous achèverons le chapitre par la présentation du théorème de KOENIG.

Le sixième et dernier chapitre de ce cours s'intéresse au principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels. On se concentrera en début de chapitre sur les forces appliquées à un solide puis sur la résultante des moments dynamiques pour pouvoir présenter la notion de torseur dynamique. Dans la suite du chapitre nous présenteront le principe fondamental et les théorèmes généraux de la dynamique et en fin nous terminerons par la présentation des lois de conservation.

# CHAPITRE I

---

# OUTILS MATHÉMATIQUES

---

# CHAPITRE I. OUTILS MATHÉMATIQUES

## I.1 Introduction

Ce chapitre nous permettra de voir les principaux outils mathématiques que nous aurons à utiliser pour l'étude des chapitres suivants. Dans ce chapitre nous étudierons les opérations mathématiques sur les vecteurs. Nous étudierons les torseurs qui sont des outils très important en mécanique rationnel. Nous verrons aussi le moment d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe.

## I.2 Définition d'un vecteur

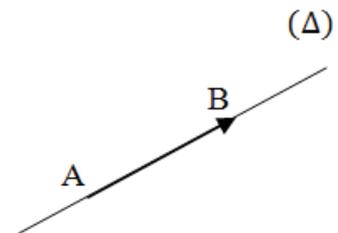
Certaines grandeurs ne peuvent pas être décrites par des nombres réels ou scalaires car il est nécessaire de préciser leur intensité, leur direction et leur sens. Ce qui nous pousse à utiliser des vecteurs pour les représenter. On appelle vecteur ( $\overrightarrow{AB}$ ) un segment de droite possédant une origine (A) et une extrémité(B) et définit par:

Sa direction (la droite ( $\Delta$ ));

Son sens (du point A vers le point B);

Sa longueur (la distance AB).

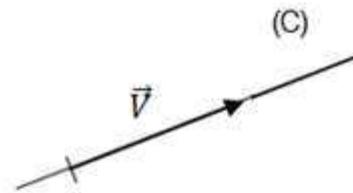
Les vecteurs sont communément représentés par des flèches.



### I.2.1 Types de vecteurs

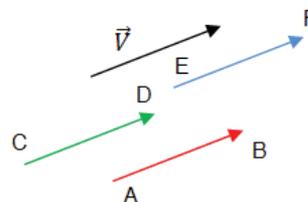
- Un vecteur est dit lié si son point d'application est fixe.

**Exemple :** La position du vecteur est complètement définie sur la droite support (C).



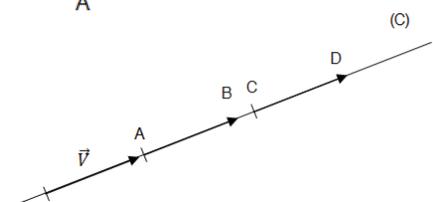
- Un vecteur est dit libre si son point d'application et sa direction sont inconnus et que ses autres composants sont connus

**Exemple :** Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$  sont des représentants d'un même vecteur  $\vec{V}$ .



- Un vecteur est dit glissant si son point d'application n'est pas fixé

**Exemple :** Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  sont des représentants d'un même vecteur  $\vec{V}$ .



- Un vecteur est dit unitaire si son module est égal à 1.

## I.2.2 Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  est un ensemble  $E$  de vecteurs, de sorte que l'on puisse disposer de deux opérations: l'addition qui permet d'additionner deux vecteurs pour en former un troisième et la multiplication par un scalaire pour obtenir un vecteur.

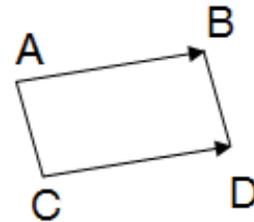
Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est l'exemple fondamental, noté  $E_3$  tel que  $\mathbb{R}^3 = \{\vec{V} = (x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$ .

## I.2.3 Calcul vectoriel

### I.2.3.1 Vecteurs égaux

Deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont considérés égaux s'ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

Cette égalité fait que  $ABDC$  est un parallélogramme.



### I.2.3.2 Addition de vecteurs

Soit deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  avec  $\forall \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in \mathbb{R}^3$  la somme de ces vecteurs est un vecteur  $\vec{V}_3 \in \mathbb{R}^3$

tel que :

Si  $(a_1, a_2, a_3)$  et  $(b_1, b_2, b_3)$  sont les composantes des vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  respectivement

$$\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

La somme des deux vecteurs  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_3 = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

#### ❖ Propriétés

- la somme vectorielle est commutative :  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$
- la somme vectorielle est associative :  $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$
- Pour tout point  $A$ , le vecteur  $\vec{AA}$  est appelé vecteur nul; il est noté:  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ . tel que :  $\vec{V}_1 + \vec{0} = \vec{V}_1$
- A chaque vecteur correspond un vecteur opposé, tel que: pour  $\vec{V} = \vec{AB}$ ,  
On écrit  $\vec{V} = \vec{BA}$  dit vecteur opposé de  $\vec{V}$  et satisfait  $-\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$ .

### I.2.3.3 Soustraction des vecteurs

Pour soustraire un vecteur il suffit d'ajouter son opposé, tel que:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

### I.2.3.4 Multiplication par un scalaire

Soit  $x$  un nombre réel et  $\overrightarrow{V_1}$  un vecteur, la multiplication de  $\overrightarrow{V_1}$  par  $x$  est un vecteur  $\overrightarrow{V_2}$  tel que :

$$\overrightarrow{V_2} = x b_1 \vec{i} + x b_2 \vec{j} + x b_3 \vec{k}$$

- La direction du vecteur est conservée.
- La longueur du vecteur est multipliée par  $|x|$ .
- Si  $x$  est positif, le sens du vecteur reste le même, mais si  $x$  est négatif le sens change.

#### ❖ Propriétés

Soit  $x$  et  $y$  deux réels et  $\overrightarrow{V_1}$  et  $\overrightarrow{V_2}$  deux vecteurs, les égalités suivantes sont vérifiées:

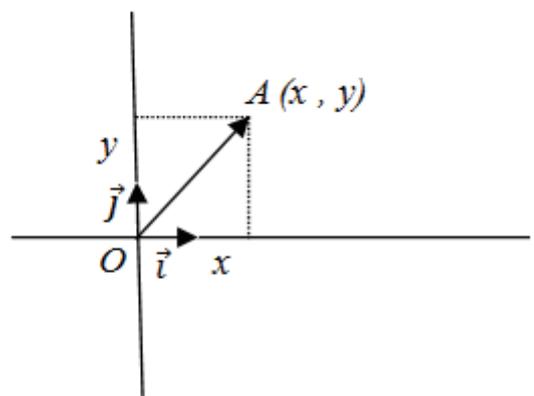
- $1 \cdot \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_1}$
- $x \cdot (y \cdot \overrightarrow{V_1}) = (x \cdot y) \cdot \overrightarrow{V_1}$ .
- $x \cdot \overrightarrow{V_1} + y \cdot \overrightarrow{V_1} = (x + y) \cdot \overrightarrow{V_1}$ .
- $x \cdot \overrightarrow{V_1} + x \cdot \overrightarrow{V_2} = x \cdot (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2})$ .

### I.2.3.5 Composantes d'un vecteur

Soit  $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_1, \vec{k}_0)$  une base orthonormée directe de l'espace vectoriel  $R^3$ . Soit  $\vec{V}$  un vecteur de cette base tel que  $\vec{V} = (x, y, z)$ ;  $x, y, z \in R$ , le vecteur  $\vec{V}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les réels  $x, y, z$  sont alors appelés composantes du vecteur  $\vec{V}$ .



### I.2.3.6 Norme ou module d'un vecteur

Le module d'un vecteur  $\vec{OA}$  représente la distance entre le point A et B, noté  $\|\vec{OA}\|$  tel que:

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{\vec{OA} \cdot \vec{OA}} \quad \text{Donc} \quad \|\vec{OA}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\|\vec{OB}\| = \|\vec{OA}\|$$

#### Exemple

Soit A (2, 5) et B (-3, 1) deux points et  $\vec{AB}$  un vecteur.

Déterminer les coordonnées et le module du vecteur  $\vec{AB}$ .

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 1 - 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} \quad \text{Donc} \quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{45}$$

### I.2.3.7 Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , est une opération qui associe aux deux vecteurs, un scalaire  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ , tel que:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_3 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\alpha)$$

#### Expression analytique

$$\vec{V}_1 = 3\vec{x} + 2\vec{y} - 1\vec{z}$$

$$\vec{V}_2 = 4\vec{x} + 1\vec{y} + 7\vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (3 \times 4) + (2 \times 1) + (-1 \times 7)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 7$$

❖ **Propriétés**

Soit  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  trois vecteurs, les égalités suivantes sont vérifiées:

- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$
- $\vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$
- $\vec{0} \cdot \vec{V} = 0$
- $x \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (x \cdot \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$

- ✓ Si l'un des deux vecteurs est nul ou que les deux vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul.

***1.2.3.8 Produit vectoriel de deux vecteurs***

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3, cette opération n'existe pas en 2 dimensions.

Soit deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  avec  $\forall \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in R^3$

Le produit vectoriel de ces vecteurs est un vecteur  $\vec{V}_3 \in R^3$  tel que :

$\vec{V}_3$  est perpendiculaire à  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_3 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin(\alpha) \vec{n}$$

- ✓ Si l'un des deux vecteurs est nul ou que les deux vecteurs sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul.

**Expression analytique**

$$\vec{V}_1 = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} - \gamma \vec{z}$$

$$\vec{V}_2 = \delta \vec{x} + \sigma \vec{y} + \tau \vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \sigma & \tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \sigma & \tau \end{vmatrix} \vec{x} - \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \rho & \tau \end{vmatrix} \vec{y} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{vmatrix} \vec{z}$$

$$= (\beta\tau + \gamma\sigma)\vec{x} - (\alpha\tau + \gamma\rho)\vec{y} + (\alpha\sigma + \beta\rho)\vec{z}$$

**Exemple**

$$\vec{V}_1 = 3\vec{x} + 2\vec{y} - 1\vec{z}$$

$$\vec{V}_2 = 4\vec{x} + 1\vec{y} + 7\vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \vec{x} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \vec{y} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{z}$$

$$= (14+1)\vec{x} - (21+4)\vec{y} + (3-8)\vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 15\vec{x} - 17\vec{y} - 5\vec{z}$$

**1.2.3.9 Combinaison linéaire des vecteurs**

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ ,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  des nombres réels. Le vecteur  $W$  peut être exprimé à partir d'une combinaison de vecteurs, tel que

$$\vec{W} = x_1\vec{V}_1 + x_2\vec{V}_2 + x_3\vec{V}_3 + \dots + x_n\vec{V}_n$$

$W$  est appelé combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ . Les scalaires sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

**Exemple**

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1 = (1; 2; 5), \vec{V}_2 = (7; 2; 3)$ , déterminer la combinaison linéaire des deux vecteurs.

$$\vec{W} = (3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{W} = (-11, 2, 9)$$

### I.2.3.10 *Dépendance et indépendance linéaire*

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ ,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  des nombres réels.

Les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$ , sont dits linéairement dépendants (la famille de vecteurs  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n)$  est dite liée), si l'un des vecteurs peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Si cette condition n'est pas réalisée on dit que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

L'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs est vérifiée par l'expression :

$$\sum_1^n x_i \vec{V}_i = \vec{0}, \text{ appelé combinaison linéaire des vecteurs } \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$$

Alors les  $x_i$  sont nuls, si les  $x_i$  ne sont pas tous nuls on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants entre eux.

- Dans un ensemble de vecteurs indépendants, tout sous ensemble prélevé sur ces vecteurs forme un système de vecteurs indépendants.
- Dans un système de vecteurs linéairement indépendants, aucun d'entre eux ne peut être un vecteur nul.

#### **Exemple**

Soit deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ . Si les deux vecteurs sont parallèles, il existe un scalaire  $K$  tel que

$$\vec{V}_1 = K \vec{V}_2 \text{ Ce qui peut aussi être écrit } \vec{V}_1 - K \vec{V}_2 = \vec{0}$$

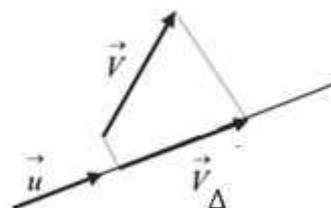
On dit que:  $\vec{V}_1$  est une combinaison linéaire de  $\vec{V}_2$  ou que  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_1$  sont linéairement dépendants.

Si par contre les deux vecteurs ne sont pas parallèles, l'un ne peut pas être écrit en fonction de l'autre, les deux vecteurs sont linéairement indépendants.

### I.2.3.11 *Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe*

Le vecteur projection du vecteur  $\vec{V}$  sur un axe ( $\Delta$ ), défini par son vecteur unitaire  $\vec{\mu}$ , est un vecteur  $\vec{V}_\Delta$  tel que:

$$\vec{V}_\Delta = (\vec{V} \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu}$$

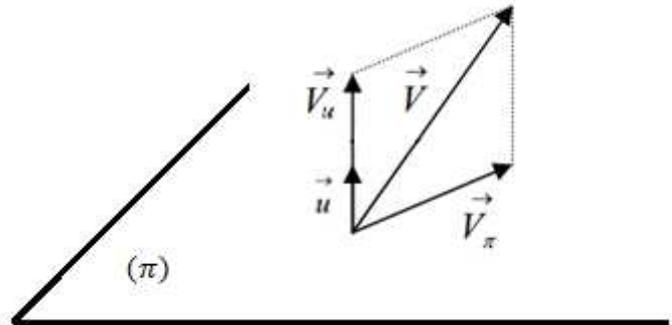


### I.2.3.12 Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

Le vecteur projection orthogonale du vecteur  $\vec{V}$  sur un plan  $(\pi)$ , de l'espace défini par la normal  $\vec{\mu}$  est le vecteur  $\vec{V}_\pi$  tel que:

$\vec{V}_\pi$  est la composante dans le plan du vecteur  $\vec{V}$ , la deuxième composante  $\vec{V}_\mu$  de  $\vec{V}$  est perpendiculaire au plan. Ce qui donne:

$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_\mu = (\vec{V} \cdot \vec{\mu})\vec{\mu}$  on retombe sur la formule du double produit vectoriel:



$$\vec{V}_\pi = \vec{\mu} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{\mu})$$

### I.2.3.13 Divergence dans un repère orthonormé

Le divergent d'un vecteur  $\vec{V}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , est le produit scalaire de  $\vec{\nabla}$  par le vecteur  $\vec{V}$  tel que:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Noté:  $\overrightarrow{\text{div}} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$

### I.2.3.14 Rotationnel dans un repère orthonormé

Le rotationnel d'un vecteur  $\vec{V}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , est le produit vectoriel de  $\vec{\nabla}$  par le vecteur  $\vec{V}$  tel que:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Noté:  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

#### Exemple

$$\vec{V}_1 = 3\vec{x} + 2\vec{y} - 1\vec{z}$$

$$\vec{V}_2 = 4\vec{x} + 1\vec{y} + 7\vec{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \vec{x} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \vec{y} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{z} \\ &= (14+1)\vec{x} - (21+4)\vec{y} + (3-8)\vec{z} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 15\vec{x} - 17\vec{y} - 5\vec{z}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (3 \times 4) + (2 \times 1) + (-1 \times 7)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 7$$

## I.2.4 LES MOMENTS

### I.2.4.1 Définition

Un moment représente une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique.

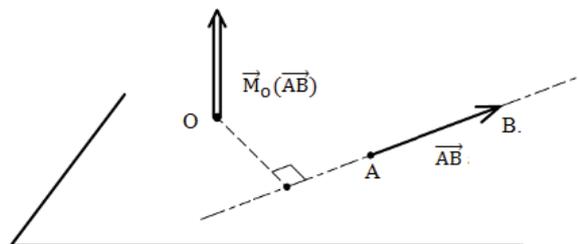
Les moments sont des vecteurs, et comme tout vecteur, ils sont définie par quatre paramètres qui définissent tout vecteurs : le sens, la direction, l'intensité et le point d'application.

Le sens du moment est déterminé en accord avec le sens trigonométrique (encore appelé sens géométrique):

- Le sens trigonométrique positif correspond au sens de rotation contraire à celui des aiguilles d'une montre.
- Le sens trigonométrique négatif correspond au sens de rotation identique à celui des aiguilles d'une montre.

### I.2.4.2 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment provoqué par un vecteur  $\vec{AB}$  appliqué en un point O est un vecteur noté  $\vec{M}_O(\vec{AB})$  tel que  $\vec{M}_O(\vec{AB}) = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$ . Le moment  $\vec{M}_O(\vec{AB})$  est Independent de la position du vecteur  $\vec{AB}$  sur la droite AB.



### 1.2.4.3 Le théorème de VARIGNON

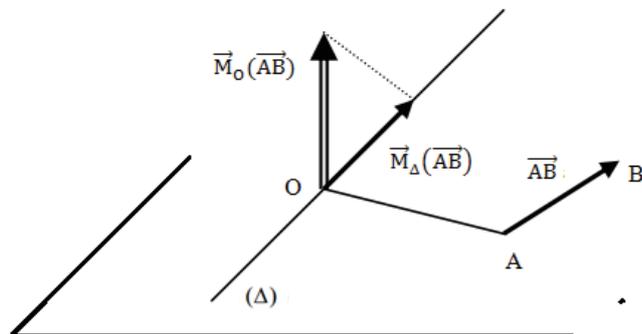
Le moment d'un vecteur par rapport à un point est égal à la somme des moments par rapport à ce même point due au composant de ce vecteur.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_x) + \vec{M}_O(\vec{F}_y)$$

### 1.2.4.4 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Soit O un point quelconque de l'axe  $(\Delta)$  et  $\vec{\mu}$  son vecteur unitaire. Le moment d'un vecteur  $\vec{AB}$  par rapport à un axe  $(\Delta)$  est la projection sur l'axe  $(\Delta)$  du moment provoqué par le vecteur  $\vec{AB}$  en A.

$$\vec{M}_\Delta(\vec{AB}) = (\vec{M}_O(\vec{AB}) \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu}$$



## 1.2.5 Les torseurs

Un torseur représente la modélisation mathématique du mouvement ou d'une action mécanique que subie un solide de la part de l'environnement extérieur. Ce sont des outils privilégiés de la mécanique car ils permettent d'écrire les équations vectorielles de manière simplifiée.

Un torseur  $[\tau]$  est un champ de vecteurs équiprojectifs définis dans l'espace géométrique qui nous permet de classer une force et un moment :

A chaque point A, les deux champs du torseur font correspondre, respectivement, un vecteur  $\vec{R}$  indépendant de A, appelé moment du torseur et un vecteur  $\vec{M}_A$  qui, lui, dépend de A, appelé moment du torseur au point A.

Le torseur  $[\tau]_A$  est donc noté :  $[\tau]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$

La résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{M}_A$  résultant au point A, constituent les éléments de réduction du torseur au point A.

La résultante  $\vec{R}$  est la résultante de  $n$  vecteurs  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ . Appliqués respectivement aux points  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ . tel que  $\vec{R} = \sum_i^n \vec{V}_i$

Le moment résultant au point A est exprimé comme suit :  $\vec{M}_A = \sum_i^n \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V}_i$ , On peut alors écrire :

$$[\tau]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_i^n \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

### 1.2.5.1 Opérations sur les torseurs

#### Propriété des torseurs

Soient les Torseurs  $[\tau]_1$  et  $[\tau]_2$  tel que :  $[\tau]_1 = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{cases}$  et  $[\tau]_2 = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{cases}$  et  $a$  un scalaire.

#### Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs est un troisième torseur  $[\tau]_3$  dont les éléments réducteurs sont la somme des éléments réducteurs des deux torseurs  $[\tau]_1$  et  $[\tau]_2$ , tel que donné par l'expression suivante:

$$[\tau]_3 = [\tau]_1 + [\tau]_2 = \begin{cases} \vec{R}_3 = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_3 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{cases}$$

#### Multiplication d'un torseur par un scalaire

La multiplication d'un torseur par un scalaire est donnée par l'expression suivante:

$$a. [\tau]_1 = \begin{cases} a. \vec{R}_1 \\ a. \vec{M}_1 \end{cases}$$

#### Produit scalaire de deux torseurs

Le produit scalaire de deux torseurs est donné par l'expression suivante:

$$[\tau]_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix} = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2 + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1$$

### 1.2.5.2 Torseur nul

Le torseur nul est l'élément neutre pour l'addition de deux torseurs, un torseur est dit nul si sa résultante et son moment sont nuls en tout point de l'espace. Si un torseur est nul en un point, alors il est nul en tout point. Il est noté  $[0]$ .

$$[0] = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{0} \\ \vec{M}_1 = \vec{0} \end{cases}$$

### 1.2.5.3 Égalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux s'il existe un point dans l'espace tel que :

$$[\tau]_1 = [\tau]_2 \text{ Donc } [\tau]_2 = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1 = \vec{M}_2 \end{cases}$$

### 1.2.5.4 Invariants du torseur

Tout torseur possède deux invariants indépendants du point de l'espace où ils sont calculés, l'invariant vectorielle et scalaire.

- La résultante  $\vec{R}$  des vecteurs libres est indépendante du point où elle est calculée et représente l'invariant vectoriel.
- La grandeur  $\vec{M} \cdot \vec{R}$ , dite automoment, est elle aussi indépendante du point où elle est calculée et représente l'invariant scalaire du torseur.

### 1.2.5.5 Déplacement d'un torseur

La règle de transport des moments est la propriété la plus importante des torseurs, elle permet, connaissant le Torseur  $[\tau]_A$  en un point A de l'espace, de retrouver les éléments de réduction de ce même torseur en un tout autre point de l'espace.

$$\text{Soit le Torseur } [\tau]_A \text{ en un point } A \text{ de l'espace, tel que : } [\tau]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i^n \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_i^n \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

Les éléments réducteurs de ce torseur en un autre point C de l'espace peuvent être exprimés en fonction des éléments réducteurs du torseur exprimé au point A, comme suit :

La résultante  $\vec{R}$  reste invariable car elle ne dépend pas du point où elle est exprimée.

Le moment au point C peut être exprimé comme suit :

$$\vec{M}_C = \sum_i^n \vec{CB}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_i^n (\vec{AB}_i + \vec{CA}) \wedge \vec{V}_i = \sum_i^n \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i + \sum_i^n \vec{CA} \wedge \vec{V}_i = \sum_i^n \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i + \vec{CA} \wedge \sum_i^n \vec{V}_i$$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{V}_i$$

### 1.2.5.6 Axe central d'un torseur

L'axe central d'un torseur est défini par l'ensemble des points  $P$  de l'espace en lesquels le moment  $M_P$  est parallèle à la résultante  $\vec{R}$ . Sur la droite formée par ces points, le torseur garde une valeur constante et le moment en ces points est minimum.

### 1.2.5.7 Détermination analytique de l'axe central

Soit un repère orthonormé et  $(\Delta)$  l'axe central du torseur  $[\vec{t}]$ . En sachant que  $[\vec{t}]_O$  au point  $O$  est connu.

Soit  $P$  un point de l'axe  $(\Delta)$ ; nous avons :  $\vec{M}_P = \alpha \cdot \vec{R}$  et  $\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{PO} \wedge \vec{R}$  d'où  $\vec{R} \wedge (\vec{M}_O + \vec{PO} \wedge \vec{R}) = \vec{0}$

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{PO} \wedge \vec{R} \text{ donc } \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \vec{AO} \wedge (\vec{R}^2) - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{AO}) = \vec{0}$$

$$\text{on obtient } \vec{PO} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{PO}}{\vec{R}^2} \vec{R}$$

Le premier terme est indépendant du point  $P$ , on peut le noter comme étant un vecteur  $\vec{PO}_0$ ; le deuxième terme dépend de  $P$  et est parallèle à  $\vec{R}$ , donc il peut être écrit  $\vec{PO} = \vec{PO}_0 + \alpha \cdot \vec{R}$

### 1.2.5.8 Pas du torseur

Pour un point  $P$  de l'axe central, le moment est parallèle à  $\vec{R}$

Donc :  $\vec{M}_P = \alpha \cdot \vec{R}$  de ce fait l'invariable scalaire du torseur peut s'écrire  $\vec{M}_P \cdot \vec{R} = \alpha \cdot \vec{R} \cdot \vec{R}$  on

$$\text{obtient } \alpha = \frac{\vec{M}_P \cdot \vec{R}}{\vec{R}^2} \text{ où } \alpha \text{ représente le Pas du torseur}$$

### ***1.2.5.9 Torseurs élémentaires***

Les torseurs élémentaires sont des torseurs dont l'invariant scalaire est nul, il en existe deux types:

- Le torseur couple.
- Le torseur glisseur.

RM : Si l'invariant scalaire n'est pas nul, le torseur est dit quelconque.

### ***1.2.5.10 Torseur glisseur***

Un torseur est un glisseur si et seulement s'il existe un point où son moment est nul et sa résultante est non nulle.

Son invariant scalaire est nul

$$[T] \text{ est un glisseur si } \begin{cases} I[T] = \overline{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \forall O \\ \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases}$$

### ***1.2.5.11 Torseur couple***

Un torseur est un torseur couple si et seulement si sa résultante  $\vec{R}$  est nulle. Sachant que  $\overline{M} \cdot \vec{R}$  est invariant, donc pour un torseur couple le moment est invariant et ne dépend pas du point d'observation.

$$[T] \text{ est un glisseur si } \begin{cases} \exists O \text{ telque : } \overline{M}_O \neq 0 \\ \vec{R} = \vec{0} \end{cases}$$

## I.3 Exercices sur les outils mathématiques

### Exercice 1:

Soit les points dans le plan  $OXY$  :  $A(-2, 3)$ ;  $B(3, 1)$ ;  $C(1, 4)$ ;  $D(5, 3)$ .

Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  ainsi que le module, la direction et le sens de ces vecteurs.

Représenter graphiquement ces vecteurs

### Exercice 2:

Soit les points dans le plan  $OXY$ :  $A(1, 4, 3)$ ;  $B(2, 3, 5)$ ;  $C(5, 2, -1)$ ;  $D(-3, 4, 7)$ .

Déterminer les composantes des vecteurs :  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ .

Déterminer:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ;
- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$  ;
- $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|$ ;
- $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}\|$ .

### Exercice 3:

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  et  $\vec{V}_4$  tel que: vecteurs

$\vec{V}_1(a, 4, 2)$ ,  $\vec{V}_2(3, 2, b)$ ,  $\vec{V}_3(1, 4, c)$  et  $\vec{V}_4(2, 3, 7)$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  soient colinéaires ;

Déterminer la valeur de  $c$  pour que les vecteurs  $\vec{V}_3$  et  $\vec{V}_4$  soient perpendiculaires;

### Exercice 4:

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  et  $\vec{V}_4$  tel que:  $\vec{V}_1(1, 7, 5)$ ;  $\vec{V}_2(3, 4, 6)$ ;  $\vec{V}_3(2, 3, 3)$ .

Déterminer la surface du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

Déterminer le volume du parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ .

### Exercice 5:

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  tels que:  $\vec{V}_1(2, 5, 4)$ ,  $\vec{V}_2(1, 2, 5, 4)$  et  $\vec{V}_3(-3, 4, 1)$

Calculer :

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ . Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?
- $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ ;
- $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ .

**Exercice 6:**

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  tels que:  $\vec{V}_1(1, 2, 5), \vec{V}_2(3, -2, 4)$ .

Déterminer

- $\vec{W}_1 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  et déduire l'angle entre  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ .
- $\vec{W}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  ;
- $\|\vec{W}_1\|$  par deux méthodes.

**Exercice 7 :**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , trois points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées :  $A(2,1,4)$ ,  $B(7,2,3)$  et  $C(2,4,4)$ .

Déterminer :

- Le moment du vecteur glissant  $\overrightarrow{AB}$  par rapport au point  $O$  centre du repaire.
- Le moment du vecteur glissant  $\overrightarrow{AB}$  par rapport à la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $O$  et le point  $C$ .
- Construire le torseur  $[\tau]_O$  associé au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- Déterminer les éléments de réduction des torseurs  $[\tau]_C$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $a$  et  $b$  deux scalaires et  $[\tau]_1$  et  $[\tau]_2$  deux torseurs dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que :  $[\tau]_1 = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{cases}, [\tau]_2 = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{cases}$ ,

$$\vec{R}_1 = 1\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{R}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}, \vec{M}_1 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{M}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Calculer :

- $[\tau]_1 + [\tau]_2$
- $[\tau]_1 \cdot [\tau]_2$
- $a \cdot [\tau]_1 + b \cdot [\tau]_2$

**Exercice 9 :**

Soit les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  et  $\vec{V}_4$  tel que: vecteur  $\vec{V}_1(4, 2, -5), \vec{V}_2(-1, 4, -2), \vec{V}_3(1, -2, 3)$  et  $\vec{V}_4(-4, -1, 2)$  définis dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Appliqué respectivement au point  $B_1(2,3,6); B_2(5,2,3); B_3(1,5,3); B_4(6,4,3)$ . Déterminer

- Les éléments de réduction du torseur associé au système de vecteurs.
- Le pas et l'axe central du torseur.
- l'automoment des torseurs.

**CHAPITRE II** —————  
**STATIQUE DU SOLIDE**

## CHAPITRE II. Statique du solide

### II.1 Introduction

La statique représente le domaine de la mécanique rationnelle qui s'intéresse à l'étude de l'équilibre des systèmes mécaniques considérés au repos par rapport au repère dans lequel se situe l'observateur. Le système mécanique étudié peut représenter toute association de corps physiques solides ou fluides, un point ou un ensemble de points matériels, une partie ou l'ensemble d'un solide.

**Le présent chapitre** traite de la statique du solide. On y abordera les notions fondamentales de la statique et les règles et opérations sur les vecteurs, nous verrons les liaisons et leurs réactions. On s'intéressera dans ce chapitre à l'équilibre d'un système de forces concourantes, aux systèmes de forces planes, à l'équilibre des corps solides dans l'espace et à l'équilibre analytique et équilibre graphique des corps solides.

On verra que les problèmes de la statique peuvent être résolus par la méthode graphique, la méthode analytique ou la combinaison des deux méthodes.

### II.2 Notions fondamentales de la statique

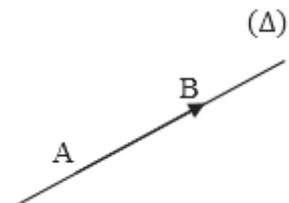
#### II.2.1 Corps solide parfait

Un corps solide parfait représente un modèle théorique du solide réel, la réalité naturelle et technologique étant plus complexe. Un corps solide parfait est constitué d'un ensemble de points matériels (particules matérielles possèdent une masse et des dimensions négligeables) agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction et qui gardent en toutes circonstances les mêmes distances entre elles quelque soient les systèmes de forces extérieures appliqués. **De ce fait un corps solide parfait ne subit aucune déformation.**

#### II.2.2 Force

Une force représente l'interaction quelconque d'un corps sur un autre, telles que les interactions de contact ou à distance. En mécanique, les forces sont utilisées pour modéliser des actions mécaniques diverses (pression, frottement actions de contact, force électrostatique, force électromagnétique...).

La force est représentée par un vecteur-force ayant les propriétés générales des vecteurs : un point d'application (A), une direction ( $\Delta$ ), un sens (de A vers B) et une intensité  $\|\overline{AB}\|$ .

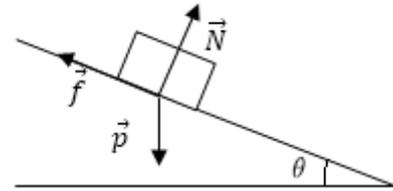


Il existe deux types de force, les forces exercées par d'autres corps en un point du solide, **appelées forces extérieures**, et les forces qui se développent entre les points matériels du corps **appelées forces intérieures**.

L'unité de la force est le Newton qui correspond à la force qui communique une accélération de 1 mètre par seconde au carré à un corps ayant une masse de 1 kilogramme.

### II.2.3 Diagramme des forces

Il s'agit d'une méthode graphique utilisée dans le cas des problèmes plans, servant à la détermination de l'intensité de forces agissant sur un système en équilibre.

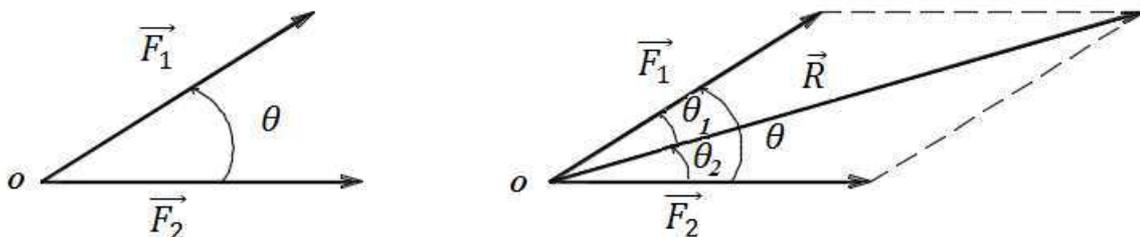


Un corps soumis à deux forces est dit en équilibre si ces forces sont de sens opposés et possèdent la même intensité et la même direction. Dans le cas où le corps est soumis à trois forces pour satisfaire à l'équilibre du corps il faut que les trois forces soient concordantes. Cette relation vient de l'équation dite « de la résultante » issue du principe fondamental de la statique ; les deux glisseurs ont un même axe central (les points d'applications des forces sont sur une droite colinéaire à la direction des forces) ; cette relation vient de l'équation dite « des moments » issue du même principe.

### II.2.4 Règles et opérations sur les vecteurs libres

#### II.2.4.1 Somme vectorielle de deux forces

La résultante de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  peut être retrouvée en mettant bout à bout les deux forces de sorte que le point terminal de  $\vec{F}_1$  coïncide avec le point initial de  $\vec{F}_2$ . La résultante relie le point initial de  $\vec{F}_1$  au point terminal de  $\vec{F}_2$ . Dans le cas de deux forces concourantes, la résultante peut être obtenue en constituant un parallélogramme sur  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , la diagonale du parallélogramme définit le module et la direction de la résultante des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ .



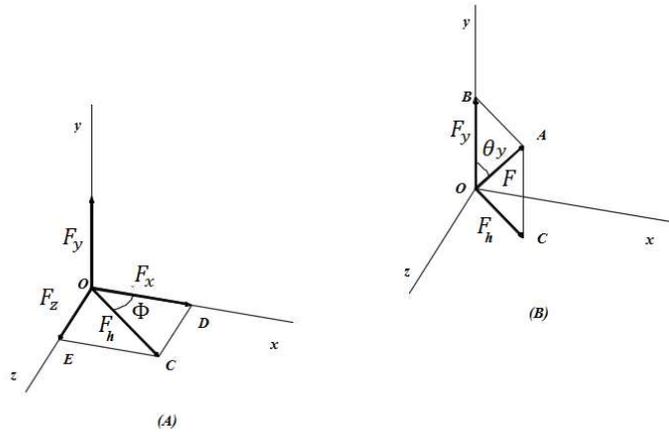
#### II.2.4.2 Coordonnées rectangulaires

Dans un système de coordonnées rectangulaire  $oxyz$ , une force appliquée à l'origine du système peut être décomposée en deux autres forces appliquées au même point et produisent le même effet. Une composante verticale ( $F_y$ ) et une composante horizontale ( $F_x$ ), tel que:

## Chapitre II Statique du solide

Si on considère un plan ( $OBAC$ ) vertical contenant le vecteur  $F$ . Ce dernier passe par l'axe vertical  $y$  et son orientation est donnée par l'angle qu'il forme avec le plan  $xy$ . La direction de  $F$  dans ce plan est définie par l'angle  $\theta_y$  formé entre l'axe  $y$  et  $F$ . On obtient:

$$F_y = F \cos \theta_y \text{ et } F_h = F \sin \theta_y$$



En décomposant la composante horizontale en deux composantes  $F_x$  et  $F_z$  tel que:

$$F_x = F_h \cos \Phi = F \sin \theta_y \cos \Phi$$

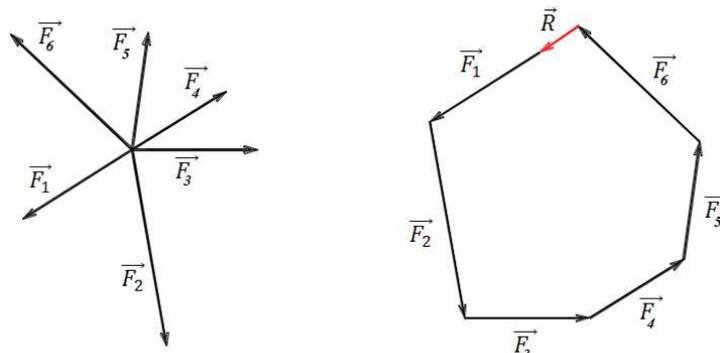
$$F_z = F_h \sin \Phi = F \sin \theta_y \sin \Phi$$

Nous obtenons ainsi les trois composantes rectangulaires  $F_x, F_y, F_z$ .

### II.2.4.3 Cas de plusieurs forces

Dans le cas de plusieurs forces concordantes, la règle du parallélogramme peut être utilisée pour déterminer la résultante des forces, en l'appliquant d'abord à deux des forces puis à leur résultante avec une troisième force, ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les forces soient combinées.

La résultante de plusieurs forces peut aussi être retrouvée en utilisant la règle du polygone des forces. Les forces sont mises bout à bout en respectant leur sens et leur direction. La résultante de ces forces ferme le polygone en reliant l'extrémité de la dernière des forces au début de la première.



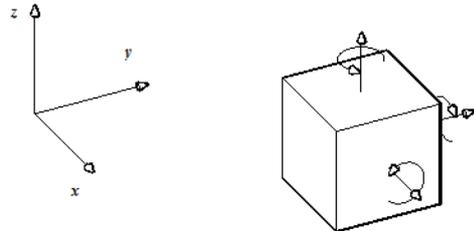
## II.2.5 Les liaisons et les réactions

### II.2.5.1 Degrés de liberté d'un solide libre

Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction sans restriction. Six mouvements de directions indépendantes sont considérés:

- Trois degrés de translation.
- Trois degrés de rotation.

Les degrés de liberté sont souvent présentés sous la forme d'une matrice, où les colonnes donnent un type de mouvement (translation ou rotation) et les lignes, la direction considérée (x, y ou z)



### II.2.5.2 Définition d'une liaison

Les liaisons sont des corps matériels qui s'opposent au mouvement du solide. On dit qu'il existe une liaison entre deux solides, quand un solide ne peut pas se déplacer librement par rapport à un autre, ce qui diminue ses degrés de libertés par rapport à un corps libre. Les forces qui s'exercent sur le solide sont appelées réactions de liaison.

### II.2.5.3 Modélisation d'une liaison

Pour la modélisation des liaisons, nous considérons, sauf spécification, que les liaisons sont parfaites, ce qui suppose:

- Surfaces de contact géométriquement parfaites;
- Contact supposé sans adhérence;
- Jeu de fonctionnement nul entre les surfaces de contact.

### II.2.5.4 Représentation normalisée des liaisons usuelles

On associe à chaque liaison normalisée une représentation schématique (représentation plane ou tridimensionnelle).

Le tableau suivant récapitule les liaisons les plus courantes normalisées par l'AFNOR et ISO, dans le but de définir les possibilités de mouvement autorisées pour chaque une de ces liaisons ainsi que leurs particularités et leurs caractéristiques géométriques.

## Chapitre II Statique du solide

Tableau.2. Liaisons usuelles – norme NF e 04-015 et norme NF en ISO 3952-1

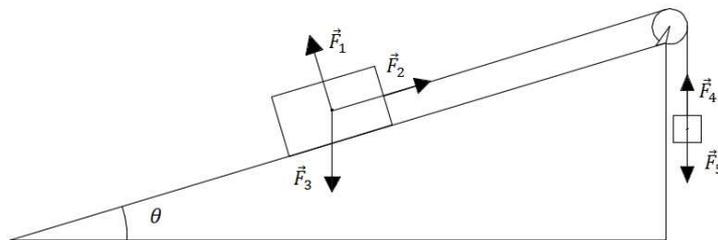
Degrés de liberté	Nom de la liaison	Schématisation	Caractéristiques géométriques	Particularités
0 T 0 R	Liaison Encastrement		Aucune	- Pour tout point P de l'espace - Dans toute base
0 T 1 R	Liaison Pivot 		Axe $(O, \vec{x})$	- Pour tout point P appartenant à l'axe $(O, \vec{x})$ - Dans toute base contenant $\vec{x}$
1 T 0 R	Liaison glissière 		Direction $\vec{x}$	- Pour tout point P de l'espace - Dans toute base contenant $\vec{x}$
1 R+T	Liaison hélicoïdale 		Axe $(O, \vec{x})$	- Pour tout point P appartenant à l'axe $(O, \vec{x})$ - Dans toute base contenant $\vec{x}$ p : pas de l'hélice Le signe dépend du sens de l'hélice
1 T 1 R	Liaison Pivot glissant 		Axe $(O, \vec{x})$	- Pour tout point P appartenant à l'axe $(O, \vec{x})$ - Dans toute base contenant $\vec{x}$
0 T 2 R	Liaison sphérique à doigt 		- Centre O - plan de la rainure $(yOz)$ - direction du doigt z	- Au centre O de la liaison
0 T 3 R	Liaison Rotule ou Sphérique 		Centre O	- Au centre O de la liaison - Dans toute base
2 T 1 R	Liaison Appui Plan 		Normale $\vec{z}$	- Pour tout point P de l'espace - Dans toute base contenant la normale au plan (ici $\vec{z}$ )
1 T 3 R	Liaison Linéaire annulaire ou Sphère-cylindre 		Axe $(O, \vec{x})$	- Au centre O de la sphère - Dans toute base contenant $\vec{x}$
2 T 2 R	Liaison Linéaire rectiligne 		- Droite de contact $(O, \vec{x})$ - Plan tangent au contact	- Pour tout point P du plan $(xOz)$
2 T 3 R	Liaison Ponctuelle ou Sphère-Plan 		- Point de contact O - Normale au plan de contact	- Pour tout point P de l'axe $(O, \vec{x})$ - Dans toute base contenant $\vec{x}$

### II.2.5.5 Diagramme des corps libres

Les diagrammes des corps libres sont un outil essentiel dans la résolution des problèmes de mécanique rationnelle. Il s'agit d'isoler un corps ou une partie d'un corps en fonction des éléments recherchés, de dessiner un schéma simplifié des parties considérées, en indiquant:

- Les axes de cordonnes;
- Dimensions utilisées;
- Les forces appliquées;
- Les réactions.

#### Exemples



## II.2.6 Équilibre d'un système de forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre  $O$ , le moment est nul par rapport à  $O$ , il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

### II.2.6.1 Méthode de résolution graphique

La résolution graphique d'un système de forces permet une résolution rapide sans avoir recours à des calculs. Cette résolution se fait en deux étapes:

#### Tracé du dynamique

Tracer le dynamique permet de vérifier l'équation :  $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

Le dynamique est tracé en mettant bout à bout toutes les forces pour obtenir la résultante en partant de l'origine de la première force et en arrivant sur l'extrémité de la dernière. En traçant la dynamique on obtient l'intensité et la direction de la résultante des forces.

#### Tracé du funiculaire:

Tracer le funiculaire permet de vérifier l'équation :  $\sum_i \vec{M}_{F_i} = \vec{0}$

Le funiculaire est tracé en commençant par tracer sur le dynamique les rayons polaires, choisir un point  $P$  appelé pole et on relie ce point aux extrémités des différents vecteurs.

Chaque segment ainsi tracé est un rayon polaire. On lui attribue un label et on trace le funiculaire proprement dit. Sur le funiculaire, tracer les parallèles aux rayons polaires. Déterminer le point I, intersection des côtes extrêmes du funiculaire.

### II.2.6.2 Cas d'un solide soumis à l'action de deux forces

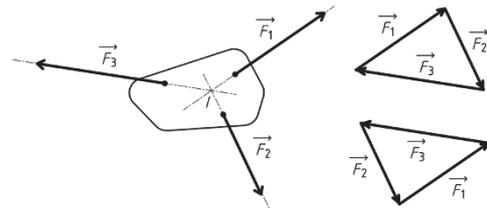
Pour qu'un corps soumis à deux forces soit en équilibre, ces deux forces doivent avoir la même ligne d'action, la même intensité et des sens différents.



### II.2.6.3 Cas d'un solide soumis à trois forces concourantes

Dans le cas d'un solide soumis à l'action de trois forces concourantes, les problèmes de statique se posent généralement sous la forme suivante :

- Une force est entièrement connue,
- la ligne d'action de la deuxième force est connue,
- le point d'application de la troisième force est connu.



On commence par déterminer la résultante de deux des forces pour ramener le problème à celui d'un corps soumis à l'action de deux forces.

La direction de la troisième force pour laquelle seul le point d'application est connu est déterminée en trouvant le point de concours de toutes les forces. On construit le dynamique en commençant par la force entièrement connue puis la direction des deux autres forces. Enfin on mesure sur le dynamique les vecteurs-forces recherchés en fonction de l'échelle utilisée.

### II.2.6.4 Cas d'un solide soumis à l'action de quatre forces ou plus

Dans le cas d'un solide soumis à l'action de quatre forces ou plus, le nombre d'inconnus ne peut dépasser trois, sauf dans le cas où les forces sont parallèles. On peut distinguer deux cas :

- Une direction et deux forces sont inconnues

Dans ce cas toutes les forces sont connues sauf deux forces qui possèdent des éléments inconnus. On commence par ramener les conditions d'équilibre à celle d'un corps soumis à l'action de deux forces, en combinant chaque paire de forces afin d'avoir deux résultantes égales et opposées, ayant la même droite de support.

On construit les dynamiques des paires de forces, qu'on compile, pour enfin mesurer sur le dynamique les vecteurs-forces recherchés en fonction de l'échelle calculée.

- Trois forces inconnues

Dans ce cas une des forces est complètement connue ainsi que la direction des deux autres.

On commence par déterminer la résultante des forces connues afin de se ramener à trois forces concourantes. On trace la résultante des forces connues appliquées en leur point de concordance puis on combine les résultantes obtenues à la dynamique des forces inconnues et on mesure sur le dynamique les vecteurs-forces recherchés en fonction de l'échelle calculée.

### II.2.6.5 Conditions analytiques d'équilibre

Un système de forces concourantes, coplanaire ou dans l'espace, est en équilibre si la résultante de toutes les forces du système est nulle.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

### II.2.6.6 Forme générale des équations de projection

La projection d'une force sur un axe est la grandeur scalaire égale avec le produit scalaire entre le vecteur force et le verseur de l'axe.

Soit un axe caractérisé par le vecteur unitaire  $\vec{\mu}$ , la projection de la force  $\vec{F}$  sur cet axe est

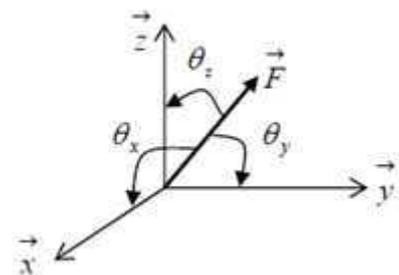
$$\vec{F}_\mu = \vec{F} \cdot \vec{\mu} = F \cdot \mu \cos(F, \mu) = F \cos(F, \mu)$$

Les projections de la force  $\vec{F}$  sur les trois axes  $ox, oy, oz$  avec  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  les angles formés par ces axes avec la forces  $\vec{F}$ , donc respectivement on obtient:

$$\vec{F}_x = F \cos \theta_x$$

$$\vec{F}_y = F \cos \theta_y$$

$$\vec{F}_z = F \cos \theta_z$$



Si  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont les vecteurs unitaires du repaire  $o xyz$  alors

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$\vec{F} = F(\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$ . On obtient donc:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

## II.2.7 Système de forces plan

### II.2.7.1 Conditions d'équilibre d'un système de forces plan

Les conditions d'équilibre d'un solide soumis à un système de force plan se réduisent à trois équations. Pour  $(xoy)$ , le plan contenant les forces appliquées au solide, on obtient :

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_O = 0, \text{ quelque soit le point } O \text{ dans le plan.}$$

Ces trois équations donnent donc une solution pour un maximum de trois inconnues. Les forces inconnues incluent des réactions dans le nombre dépend du type de liaisons.

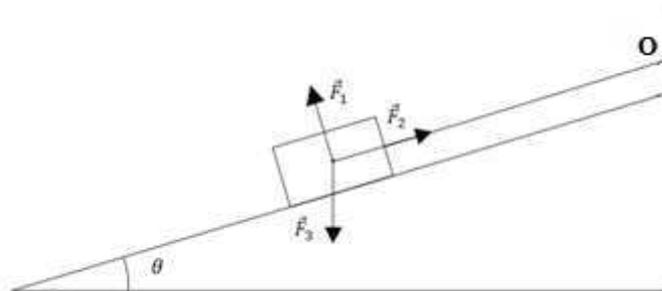
#### Exemple

Soit le solide  $S$  qui glisse le long d'un plan incliné d'un angle  $\theta$ . Le solide est retenu par une corde de longueur  $L$ . donner les trois équations d'équilibre du solide  $S$ .

$$\sum F_x = F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta - F_3 = 0$$

$$\sum M_O = F_1 \cdot L - F_3 \cdot L \cdot \cos \theta = 0$$



### II.2.7.2 Solide soumis à l'action de deux forces

Soit un solide soumis à deux forces. On dit de ce solide qu'il est en équilibre si les deux forces possèdent:

- Le même module,
- La même direction et
- Des sens opposé.

### II.2.7.3 Système de forces parallèles

La résultante d'un système de forces parallèles de même sens ne peut pas être en équilibre si toutes ces forces ne sont pas nulles. La résultante de ces forces est obtenue en sommant les intensités de ces forces.

Dans le cas où ces forces ne sont pas de même sens, le système est en équilibre si la résultante de ces forces est nulle. La résultante de ces forces est obtenue en sommant les intensités des forces de même sens jusqu'à obtenir deux résultantes partielles de

sens opposé, puis l'intensité la plus faible et soustraite de l'intensité de la plus grande résultante. Si les deux résultantes ont une même intensité, on parle alors de couple.

## II.2.8 Équilibre des corps solides dans l'espace

### II.2.8.1 Réduction d'un système de force quelconque

Soit un système de forces quelconque de l'espace,  $\pi$  un plan non parallèle à l'une des forces considérés et  $A$  un point de l'espace n'appartenant pas au plan  $\pi$ .

En faisant glisser chaque force ( $\vec{F}_i$ ) sur sa ligne d'action jusqu'à ce qu'elle soit appliquée en  $B_i$ , le point d'intersection de sa ligne d'action avec le plan  $\pi$ , toute force  $\vec{F}_i$  du système de force peut être décomposée en deux forces:

- Une composante située sur le plan  $\pi$ , notée  $\vec{F}_{\pi i}$
- la deuxième composante est  $\vec{F}_{A i}$  qui est la projection de la force  $\vec{F}_i$  sur la droite  $B_i A$ .

En déplaçant  $\vec{F}_{A i}$  sur  $B_i A$  jusqu'à ce qu'elle soit appliquée en  $A$ , on obtient que le système de forces puisse être décomposé en deux composantes partielles:

- Les composantes  $\vec{F}_{\pi i}$  admettent une résultante unique sur le plan  $\pi$ .
- $$\vec{F}_{\pi R} = \vec{F}_{\pi 1} + \vec{F}_{\pi 2} + \vec{F}_{\pi 3} + \dots + \vec{F}_{\pi n}$$
- Les composantes concourantes au point  $A$  admettent également une résultante unique.

$$\vec{F}_{AR} = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + \vec{F}_{A3} + \dots + \vec{F}_{An}$$

### II.2.8.2 Déplacement parallèle des résultantes partielles

Une fois le système de forces quelconques réduit à deux résultantes partielles  $\vec{F}_{\pi R}$  et  $\vec{F}_{AR}$ , différentes possibilités se présentent:

- Si les lignes d'action de  $\vec{F}_{\pi R}$  et  $\vec{F}_{AR}$  sont concourantes, le système de forces admet une résultante unique  $\vec{F}_R = \vec{F}_{\pi R} + \vec{F}_{AR}$  et un couple principal nul.
- Si les résultantes  $\vec{F}_{\pi R}$  et  $\vec{F}_{AR}$  sont parallèles, de même module et de sens opposés, la résultante du système de forces est nulle et fait apparaître un couple principal de moment  $M$ .
- Si les résultantes  $\vec{F}_{\pi R}$  et  $\vec{F}_{AR}$  sont placées sur la même ligne d'action et sont opposées, la résultante générale  $\vec{F}_R$  et le couple principal sont nuls. Le système de forces est équilibré.
- Si les résultantes  $\vec{F}_{\pi R}$  et  $\vec{F}_{AR}$  ne sont ni concourantes, ni opposées, l'une des résultante peut être déplacée parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle atteigne la ligne d'action de l'autre résultante, pour permettre de faire la somme des deux résultantes.

## II.2.9 Équilibre analytique des corps solides

### II.2.9.1 Conditions générales d'équilibre

Pour qu'un corps solide soit en équilibre deux conditions doivent être vérifiées:

- La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, est nulle ;
- Le moment résultant de toutes ces forces en un point  $O$ , est nul.

La vérification de ces deux conditions équivaut à dire que le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul. La projection des éléments du torseur des forces extérieures nulles nous donne les six équations scalaires suivantes:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x \\ R_y \\ R_z \end{cases} ; \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases}$$

Trois équations liées à la résultante des forces extérieures et trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère.

### II.2.9.2 Méthodes de résolution

La méthode de résolution analytique permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux obtenus avec la méthode graphique, et s'applique indépendamment du système de force en place. La méthode analytique peut être associée à la méthode graphique pour résoudre certains problèmes.

Dans un problème de statique, les inconnus sont généralement la direction ou le sens et l'intensité d'une force. Un problème est statiquement dit isostatique si le nombre d'inconnus est inférieure ou égale aux nombres d'équations d'équilibre, sinon il est considéré comme un système hyperstatique et ne peut être résolu sans faire appel à des relations existant dans le système.

## II.2.10 Équilibre graphique des corps solides

Un solide est en équilibre statique si le polygone formé par toutes les forces qui lui sont appliquées est fermé. Autrement dit, l'extrémité de la dernière force coïncide avec l'origine de la première force.

Pour résoudre graphiquement l'équilibre du solide, on procédera comme suit :

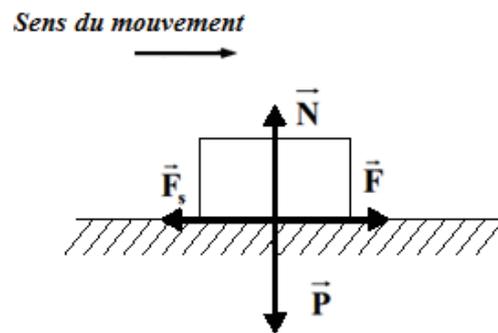
- On représente le diagramme du corps solide en représentant toutes les forces connues et toutes les forces inconnues par des grandeurs vectorielles en choisissant une échelle appropriée pour les intensités tout-en respectant la direction, le sens et l'intensité de ces forces.
- On construit le dynamique en commençant par représenter tout d'abord les forces connues, les unes à la suite des autres, et fermer le polygone des forces avec les forces inconnues.

## II.2.11 Équilibre des solides en présence du frottement

### II.2.11.1 Frottement de glissement

Le frottement de glissement est la force qui s'oppose au glissement de deux corps l'un par rapport à l'autre. La force de frottement est de sens opposé à la force motrice et de direction parallèle aux surfaces de contact. L'intensité de la force de frottement de glissement est proportionnelle à la force normale exercée sur le corps, à l'état de surface et l'état de propreté des surfaces, elle est indépendante de l'aire de contact.

Amontons puis Coulomb ont établi expérimentalement les lois du frottement entre deux surfaces en contact, d'après la loi Amontons- Coulomb la valeur maximale du module de la force de frottement statique ( $\vec{F}_s$ ) est définie en fonction du coefficient de frottement statique ( $\mu_s$ ) et de la force normale exercée sur le corps ( $\vec{N}$ ), tel que,  $\vec{F}_s = \mu_s \cdot N$ .

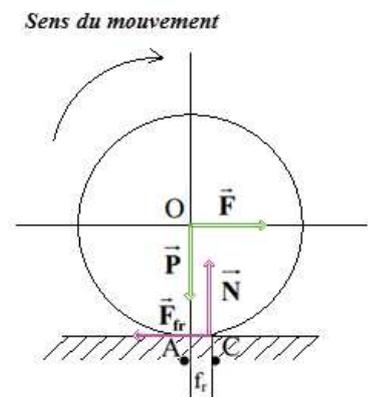


### II.2.11.2 Frottement de roulement

Le frottement de roulement, est un phénomène qui s'oppose au roulement d'un solide sur un autre, dû à la déformation de la surface d'appui sous l'action du poids.

Considérons un cylindre de poids P et de rayon R. Le cylindre roule sur un plan horizontal réel, lancé à une certaine vitesse, pour éviter qu'il ne ralentisse sous l'action du frottement le cylindre est sollicité par une force  $\vec{F}$ . Le cylindre est alors soumis à trois forces:

- Le poids du cylindre P;
- la force  $\vec{F}$ ;
- La réaction du plan.



Ces trois forces se coupent en un même point, appelé centre du rouleau. La réaction du plan se trouve décalée vers l'avant de la distance e. Cette réaction peut être décomposé en deux composantes:  $\vec{F}_N$  perpendiculaire au plan et  $\vec{F}_{fr}$  dans le plan.

Les équations d'équilibre du rouleau sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n^i \vec{F}_x \\ \sum_n^i \vec{F}_y \end{array} \right. \text{D'ou} \left\{ \begin{array}{l} F_{fr} = \vec{F} \\ F_N = P \end{array} \right.$$

le cylindre et donc soumis à deux couples, le premier couple  $(\vec{F}_{fr}, \vec{F})$  tend à mettre le cylindre en mouvement alors que le deuxième couple  $(\vec{F}_N, P)$  tente de résister au mouvement. On appelle ce deuxième couple moment de résistance au roulement  $M_r$ , tel que  $M_r = F_N \cdot e$

Le moment résistant atteint sa valeur maximale à l'instant où le solide se met en mouvement. Cette valeur est proportionnelle à la réaction normale et au coefficient de frottement de roulement  $f_r$ , mesuré en unité de longueur.

$$M_r \leq M_r(\max)$$

$$F \leq \frac{f_r}{R} \cdot F_N$$

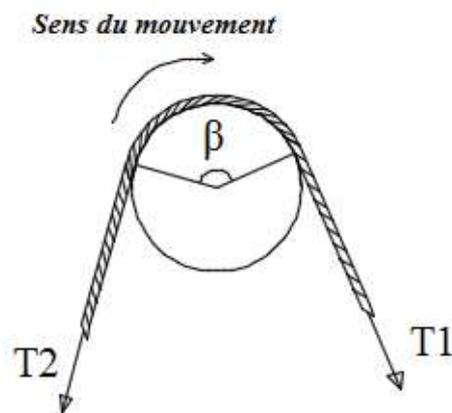
### II.2.11.3 Frottement d'un câble sur une poulie

Soit une câble sur une poulie et  $T_1$  et  $T_2$  les tensions dans le câble de part d'autre de la poulie, alors  $\frac{T_1}{T_2} = e^{f_s \beta}$  Avec :

- $\beta$  l'angle d'arc de contact du câble sur la surface de la poulie.
- $f_s$  le coefficient de frottement statique.

La résultante de la force de frottement entre le câble et la surface de la poulie, est donnée par:

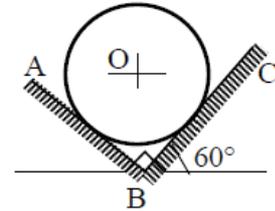
$$F = T_1 - T_2; \text{ Avec } T_1 > T_2.$$



## II.3 Exercices sur la statique du solide

### Exercice 1

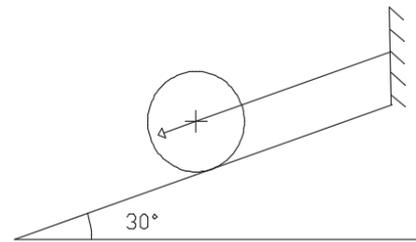
Une sphère homogène de poids 10 KN; repose sur deux plans inclinés perpendiculaires entre eux, déterminer les réactions des plans inclinés sur la sphère.



### Exercice 2

Soit un cylindre de poids  $P = 100\text{KN}$  et sollicité par une force  $F = 50\text{KN}$

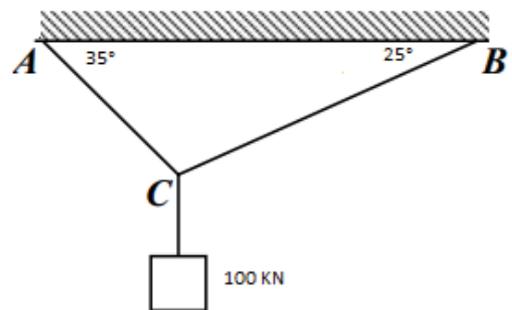
Calculer la tension  $T$  dans le fil et la réaction  $R$  analytiquement et graphiquement.



### Exercice 3

Un poids  $P$ , attachés à une point matériel libre  $C$  est suspendu pa deux cordes  $AC$  et  $AB$ .

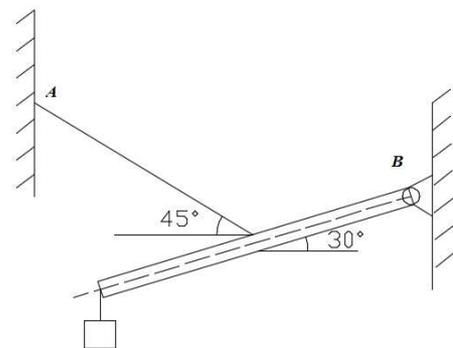
Déterminer les tensions des câbles analytiquement et graphiquement.



### Exercice 4

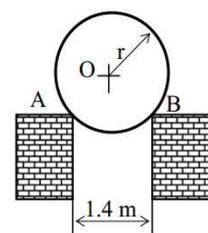
Une barre uniforme de longueur 5 m et de masse 50 Kg retient une masse  $M=200\text{Kg}$  en son extrémité

Calculer la tension  $T$  dans le fil et la réaction  $R$  de l'articulation (B).



### Exercice 5

Un réservoir métallique de poids  $W = 48\text{KN}$ , de rayon  $r = 0.9\text{m}$ , repose sur les arêtes de deux murs comme le montre la figure 5. La



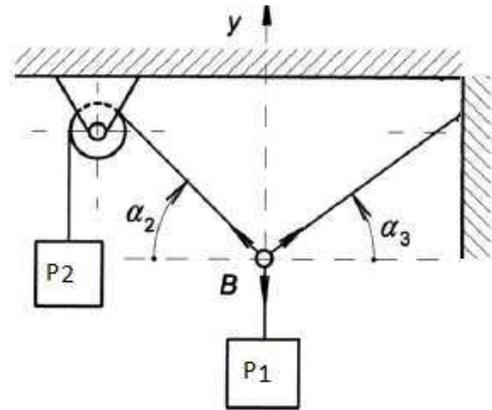
distance entre les deux murs  $l = 1.4\text{m}$ . En négligeant le frottement entre les surfaces de contacts, déterminer les pressions du réservoir sur les arêtes des murs en A et B.

**Exercice 6**

- Déterminer les tensions dans les cordes et  $P_1$  pour que le système soit en équilibre :

$\alpha_2 = 30$  et  $\alpha_3 = 60$

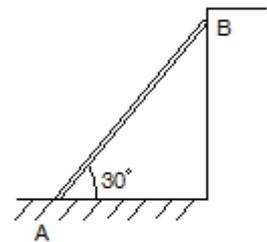
$P_2 = 15\text{ KN}$



**Exercice 7**

Une échelle d'une longueur de 9 m et d'un poids de 500 N est appuyée sans frottement sur un mur au point B et sur le sol au point A avec un coefficient de frottement sol échelle de 0.25.

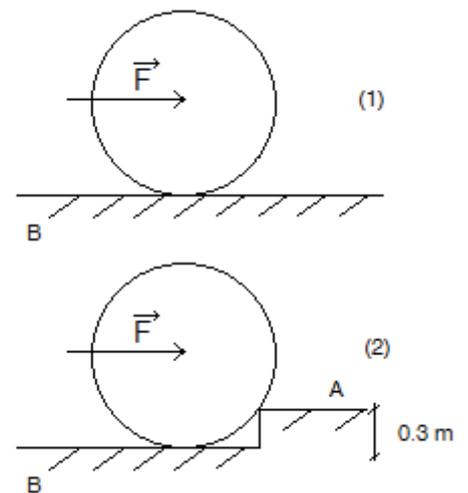
- Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.
- Un homme grimpe à 2/3 de l'échelle et s'arrête. Quelle est le poids maximal que peut peser cet homme sans que l'échelle ne glisse?



**Exercice 8**

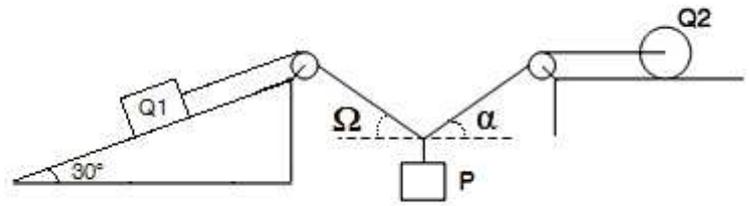
Soit un cylindre d'un rayon de 2 m et d'un poids de 50 KN, le cylindre est sollicité par une force  $F$  en son centre qui augmente progressivement.

- (Séquence 1) Déterminer la force  $F$  maximale que peut supporter le cylindre avant de se mettre en mouvement, sachant que le coefficient de frottement de roulement du cylindre sur le sol est de 0.3 m.
- (Séquence 2) Le cylindre s'arrête une fois appuyé sur le point A. Déterminer la force  $F$  maximale que peut supporter le cylindre avant de se mettre en mouvement en négligeant les frottements.



**Exercice 9**

Soit le système décrit par la figure, constitué d'un poids  $Q_1=15 \text{ KN}$  glissant sur un plan avec un coefficient de frottement  $\mu_{s1}= 0.20$  et un cylindre  $Q_2=25 \text{ KN}$  de rayon  $R=1\text{m}$ , roulant sur le sol avec un coefficient de frottement de roulement  $\mu_{s2}= 0.30 \text{ m}$ .

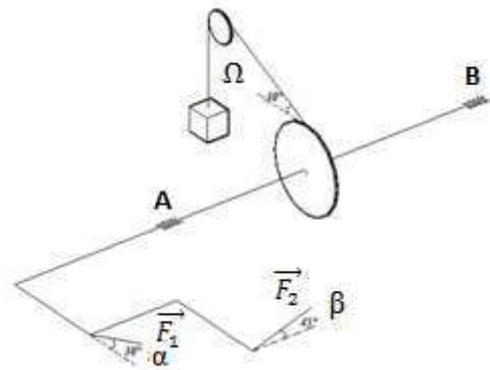


L'angle d'arc de contact des câbles sur la surface des poulies est  $\beta = 120^\circ$  et le coefficient de frottement statique sur la surface des poulies est  $\mu_{s3}= 0.25$ .

Déterminer  $P$  pour que le système soit en équilibre sachant que :  $\alpha=30^\circ$ .

**Exercice 10**

Soit un système mécanique composé d'une barre coudée reposant sur deux appuis cylindriques A et B, un cylindre de rayon  $R=2\text{m}$  est fixé sur la barre au point C; un câble est relié au cylindre formant un angle  $\Omega= 20^\circ$  avec l'horizontale.

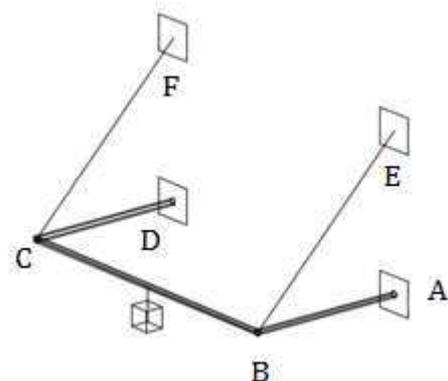


Deux forces  $\vec{F}_1 = 15 \text{ KN}$  et  $\vec{F}_2 = 20 \text{ KN}$  sont appliquées à la barre avec des angles  $\alpha=30^\circ$  et  $\beta=45^\circ$ .

Déduire les réactions aux appuis et la tension dans le câble.

**Exercice 11**

Soit une barre coudée à  $90^\circ$  en A et B, elle fixé au mur par des articulations sphérique. Elle est maintenue dans une position horizontal par deux câbles. Au milieu de la barre on place un poids de  $100 \text{ N}$ .



On donne  $AB=CD=1\text{m}$ ,  $BC =2\text{m}$   $AE=DF=0.5\text{m}$ .

La densité longitudinale de la barre est de  $10 \text{ Kg}$

1 - Établir les équations d'équilibre statique de la barre

2 - Déduire la tension dans les câbles.

# CHAPITRE III

---

## CINÉMATIQUE DU SOLIDE

---

## CHAPITRE III. Cinématique

### III.1 Introduction

La cinématique est une branche de la mécanique qui étudie le mouvement d'un point de vue géométrique, sans se préoccuper de ses causes, son objectif est la détermination de la position, de la vitesse et l'accélération des points d'un solide dans le temps, par rapport à un repère donné.

Dans la suite de ce chapitre on considère un référentielle orthonormé direct fixe  $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  et un repère fixé au solide  $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ .

Le solide est considéré indéformable, ce qui suppose que la distance entre deux points du solide reste constante à tout temps. L'étudier le mouvement d'un solide par rapport au repère fixe revient à étudier le mouvement du repère lié à ce solide par rapport au repère fixe.

Le repérage du solide indéformable peut être réalisé en utilisant des coordonnées cartésiennes, cylindrique ou sphérique.

### III.2 Cinématique du solide

#### III.2.1 Cinématique du solide: Position d'un solide

##### III.2.1.1 Lois de composition des mouvements

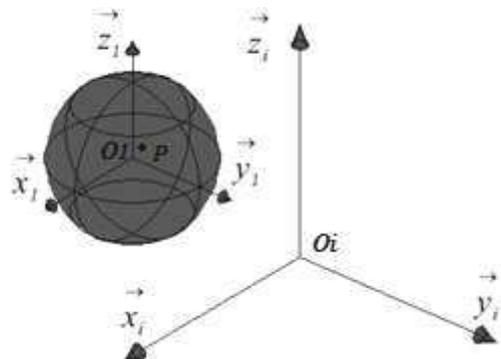
Soit  $(S)$  un solide avec un repère lié  $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Le solide  $(S)$  est en mouvement quelconque par rapport au repère fixe de référence  $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ . Soit  $(P)$  un point du solide  $(S)$ . À chaque point du solide  $(S)$  nous pouvons associer un vecteur position:

$$\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P}$$

$\overrightarrow{O_0O_1}$ : Caractérise la trajectoire de  $R_1$  dans  $R_0$

$\overrightarrow{O_1P}$ : Caractérise la trajectoire de  $P$  dans  $R_1$

$\overrightarrow{O_0P}$ : Caractérise la trajectoire de  $P$  dans  $R_0$



### III.2.1.2 Loi de composition des vitesses

Par dérivation de l'expression de  $\overrightarrow{O_0P}$  par rapport au temps

$$\overrightarrow{V^0}(P) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0P}}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0O_1}}{dt} + \frac{d^0 \overrightarrow{O_1P}}{dt} \quad \text{tel que:}$$

La vitesse du point P par rapport au repère  $R_1$  s'écrit:  $\overrightarrow{V^1}(P) = \frac{d^1 \overrightarrow{O_1P}}{dt}$

La vitesse du point P par rapport au repère  $R_0$  s'écrit:  $\overrightarrow{V^0}(P) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0P}}{dt}$

La vitesse du centre du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$  s'écrit:  $\overrightarrow{V^0}(O_1) = \frac{d^1 \overrightarrow{O_0O_1}}{dt}$

On a:  $\frac{d^0 \vec{\mu}}{dt} = \frac{d^1 \vec{\mu}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\mu}$  de cette expression

On obtient:  $\overrightarrow{V^0}(P) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0O_1}}{dt} + \frac{d^1 \overrightarrow{O_1P}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P}$

Donc  $\overrightarrow{V^0}(P) = \overrightarrow{V^1}(P) + \overrightarrow{V^0}(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P}$

On peut écrire cette expression sous la forme:  $\overrightarrow{V^0}(P) = \overrightarrow{V^1}(P) + \overrightarrow{V^0}_l(P)$

$\overrightarrow{V^0}(P)$  est dite vitesse absolue de P dans  $R_0$ ;

$\overrightarrow{V^1}(P)$  est dite vitesse relative de P dans  $R_1$  en mouvement par rapport à  $R_0$ ;

$\overrightarrow{V^0}_l(P)$  représente un terme complémentaire dit: vitesse d'entraînement de P considérée immobile dans  $R_1$ .

### III.2.1.3 Loi de composition des accélérations

A partir de la vitesse absolue  $\overrightarrow{V^0}(P)$  on obtient l'accélération  $\overrightarrow{a^0}(P)$  du point P.

$$\overrightarrow{V^0}(P) = \overrightarrow{V^1}(P) + \overrightarrow{V^0}(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient :

$$\overrightarrow{a^0}(P) = \frac{d^0 \overrightarrow{V^0}(P)}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{V^1}(P)}{dt} + \frac{d^0 \overrightarrow{V^0}(O_1)}{dt} + \frac{d^0 (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P})}{dt}$$

En développant cette expression on obtient:

$$\overrightarrow{a^0}(P) = \overrightarrow{a^1}(P) + \left( \overrightarrow{a^0}(O_1) + \frac{d^0 (\vec{\Omega}_1^0)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P}) \right) + 2\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V^1}(P)$$

On peut écrire cette expression sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{a^0}(P) = \overrightarrow{a^1}(P) + \overrightarrow{a^0}_1(P) + 2\vec{\Omega}^0(O_1) \wedge \overrightarrow{a^0}(P)$$

$$\overrightarrow{a^0}(P) = \overrightarrow{a^1}(P) + \overrightarrow{a^0}_1(P) + \overrightarrow{a^0}_c(P)$$

$\vec{a}^0(P)$  =: est dite accélération absolue de P dans  $R_0$ , elle peut être décomposée en trois parties :

$\vec{a}^1(P)\vec{a}^0(O_1) + \frac{d^0(\vec{\Omega}_1^0)}{dt} \wedge \vec{O}_1\vec{P} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O}_1\vec{P})$ : est dite accélération relative de P dans  $R_1$  en mouvement par rapport à  $R_0$ ;

$\vec{a}^{0_1}(P) = 2\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(P)$ : représente un terme complémentaire dit: vitesse d'entraînement de P considérée immobile dans  $R_1$ ;

$\vec{a}_c(P)$ : représente l'accélération complémentaire de Coriolis.

### III.3 Les angles d'Euler

Les angles d'Euler sont trois angles, ( $\varphi, \theta$  et  $\psi$ ) définis par le mathématicien Leonhard Euler, comme étant les éléments permettant de décrire les paramétrages de la rotation d'un solide dans l'espace. La variation de ces angles dans le temps engendre la rotation du solide. Les angles d'Euler trouvent surtout leur utilité pour paramétrer un repère  $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  lié à un solide mobile par rapport à un référentiel considéré comme fixe  $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ . Les centres des deux repères sont considéré confondus.

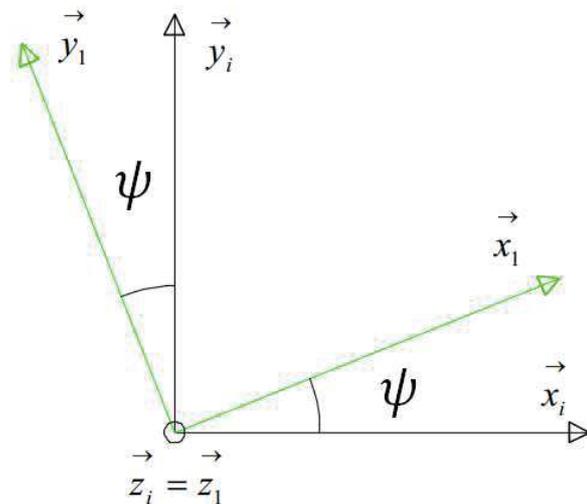
#### III.3.1 Angle de précession( $\psi$ )

L'angle de précession est défini par  $\psi(\vec{x}_i, \vec{x}_1)$ , en faisant une rotation  $\psi$  autour de l'axe  $\vec{z}_i \equiv \vec{z}_1$ , on obtient un nouveau repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Les axes ( $\vec{z}_i$  et  $\vec{z}_1$ ) des deux repères étant confondus.

La vitesse de rotation est donc :  
 $\Omega_1^i = \psi \cdot \vec{z}_i = \psi \cdot \vec{z}_1$

La matrice de passage du repère  $R_i$  au repère  $R_1$  est:

$$M_{R_i \rightarrow R_1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



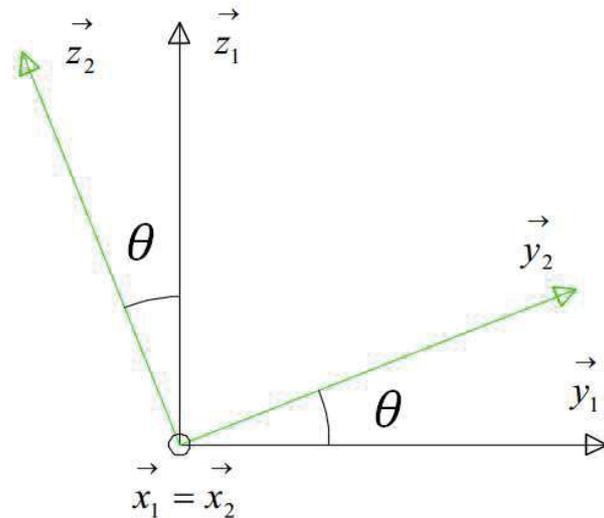
### III.3.2 Angle de nutation( $\theta$ )

On fait subir au repère  $R_1$ , précédemment obtenu, une rotation autour des axes  $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$  d'un angle  $\theta$  dit de nutation, défini par  $\theta(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ , on obtient un nouveau repère  $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

La vitesse de rotation est donc :  $\Omega_2^1 = \theta \cdot \vec{x}_1 = \theta \cdot \vec{x}_2$

La matrice de passage du repère  $R_1$  au repère  $R_2$  est:

$$M_{R_1 \rightarrow R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

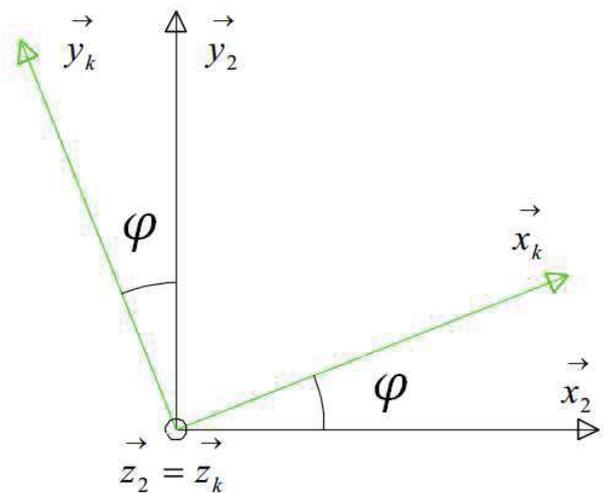


### III.3.3 Angle de rotation propre( $\varphi$ )

On fait subir au repère  $R_2$ , précédemment obtenu, une rotation autour des axes  $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_k$  d'un angle  $\varphi$  dit de rotation propre, défini par  $\varphi(\vec{z}_2, \vec{z}_k)$ , on retombe sur le repère  $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$

La vitesse de rotation est donc :  $\Omega_k^2 = \varphi \cdot \vec{z}_2 = \varphi \cdot \vec{z}_k$

$$M_{R_2 \rightarrow R_k} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

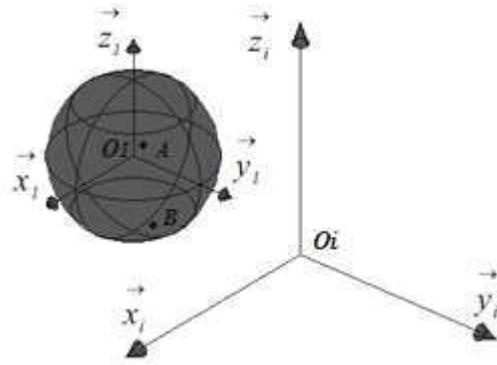


- En utilisant les trois matrices de passage vues précédemment on peut obtenir la matrice de passage du repère  $R_i$  vers  $R_k$ :

$$M_{R_i \rightarrow R_k} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

### III.4 Champs des vitesses et des accélérations d'un solide

Soit (S) un solide avec un repère  $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  lié au solide S,  $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  un repère fixe, A et B deux points du solide S. A chaque point du solide (S) nous pouvons associer un vecteur position, vitesse et accélération. Il s'agit de trouver une relation entre les vecteurs des points du solide, sachant que le solide est indéformable.



#### III.4.1 Champs des vitesses

A chaque point du solide (S), on peut associer son vecteur vitesse, défini par :

$$\vec{V}^0(A_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 A_1}}{dt} \text{ et } \vec{V}^0(B_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 B_1}}{dt}$$

En utilisant les expressions vues précédemment avec la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}^0(A_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 A_1}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_0 A_1}$$

$$\vec{V}^0(B_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{O_0 B_1}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_0 B_1}$$

$$\text{Doc : } \vec{V}^0(A_1) - \vec{V}^0(B_1) = \frac{d^0(\overrightarrow{O_0 A_1} - \overrightarrow{O_0 B_1})}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\overrightarrow{O_0 A_1} - \overrightarrow{O_0 B_1})$$

Comme  $\overrightarrow{O_0 A_1} - \overrightarrow{O_0 B_1} = \overrightarrow{A_1 B_1}$  :

$$\vec{V}^0(A_1) - \vec{V}^0(B_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{A_1 B_1}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1 B_1}$$

Sachant que le solide (S) est indéformable, la distance entre deux de ses points est fixe, donc la dérivé de cette distance est nulle, on obtient la loi de distribution des vitesses:

$$\vec{V}^0(A_1) = \vec{V}^0(B_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1 B_1}$$

Elle montre que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique.

Le champ des vitesses d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R est représenté

par un tenseur appelé tenseur cinématique :  $\{V\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_S^R \\ \vec{V}^R(A) \end{array} \right\}_A$

Tel que :

- $\vec{\Omega}_1^0$  est invariant, il ne dépend pas du point considéré.
- $\vec{V}^0(A_1)$  qui varie pour chaque point, mais qui peut être déduit par une relation dite de tenseur.

En projetant l'expression obtenue pour le champ des vitesses pour un solide indéformable sur le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , ceci nous donne la vitesse suivant la direction AB.

$$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{V^0}(B_1) = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{V^0}(A_1) + \overrightarrow{A_1B_1} \cdot (\overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1B_1})$$

$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot (\overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1B_1}) = 0$  Car le produit donne un vecteur orthogonal aux deux termes du produit vectoriel, on obtient l'expression qui propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses du solide:

$$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{V^0}(B_1) = \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{V^0}(A_1)$$

### III.4.2 Champs des accélérations

A partir de la loi de distribution des vitesses et par dérivation nous obtenons que :

$$\overrightarrow{a^0}(A_1) = \frac{d^0 \overrightarrow{V^0}(A_1)}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{V^0}(B_1)}{dt} + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \frac{d^0 \overrightarrow{A_1B_1}}{dt}$$

On a :  $\frac{d^0 \overrightarrow{A_1B_1}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{A_1B_1}}{dt} + \overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1B_1}$  Sachant que la distance  $\overrightarrow{A_1B_1}$  est constante; on obtient:

$\frac{d^0 \overrightarrow{A_1B_1}}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1B_1}$  de là on obtient la relation qui lie l'accélération de deux point du même corps:

$$\overrightarrow{a^0}(A_1) = \overrightarrow{a^0}(B_1) + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge (\overrightarrow{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{A_1B_1})$$

### III.5 Mouvement plan d'un solide

Un mouvement plan est la combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un axe et d'un mouvement de translation suivant ce même axe.

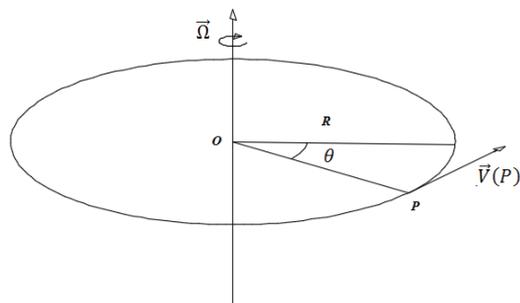
- Un mouvement est dit de translation, si le vecteur taux de rotation est nul et la vitesse est la même pour tous les points du solide.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega} = 0 \\ \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{V}(B); \forall (A, B) \in \text{Solide} \end{cases}$$

- un solide est en rotation autour d'un axe, si chaque point du solide décrit une trajectoire circulaire autour de cet axe.

Si le point O appartenant à l'axe est fixe, alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega} = \theta \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V}(P) = \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega} \end{cases}$$

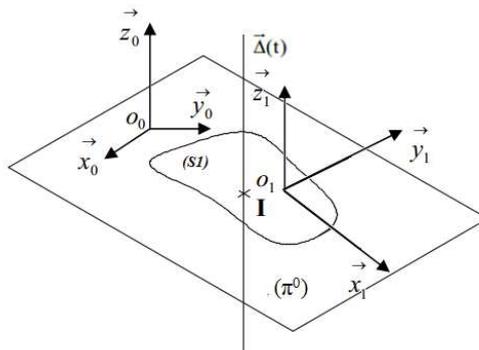


### III.6 Mouvement plan sur plan

Soit  $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  un repère lié au solide (S1) et  $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  un repère fixe. Le solide (S1) est animé d'un mouvement plan sur plan si tous les points de (S1) se déplacent dans des plans parallèles au plan de référence ( $\pi^0$ ) à distance fixe du plan tout au long du mouvement. Les vitesses de tous les points du solide sont alors parallèles au même plan, résumant l'étude du mouvement plan sur plan à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide, qui est la projection sur le plan du solide étudié.

Soit A et B deux points du solide S1,  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  les vecteurs vitesses des points A et B appartenant au plan ( $\pi^0$ ).

Le vecteur taux de rotation  $\vec{\Omega}_1^0$  est normal au plan ( $\pi^0$ ), ce qui signifie que l'axe instantané de rotation  $\Delta(t)$  est perpendiculaire à ( $\pi^0$ ). De ce fait la vitesse du point d'intersection entre le plan ( $\pi^0$ ) et l'axe instantané de rotation est nulle. Ce point est appelé centre instantané de rotation (CIR).



- Si  $\vec{\Omega}_1^0 = 0$  le mouvement est une translation rectiligne sur le plan ( $\pi^0$ ).
- Si  $\vec{\Omega}_1^0 \neq 0$  dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation orthogonal au plan.

### III.7 Mouvement d'un solide ayant un point fixe

Le déplacement le plus général d'un solide ayant un point fixe  $O$  est une rotation autour de ce point, on peut montrer cette affirmation en considérant une sphère de centre  $O$ , le mouvement de cette sphère caractérise complètement celui du corps dont la position peut être définie par la présence de trois points, le centre de la sphère  $O$  et les points  $A_i$  et  $B_i$  situés sur la surface de la sphère, ces deux points donnent la position de la sphère dans le corps à l'instant  $t_i$ . La distance entre les points  $A_i$  et  $B_i$  est constante dans le temps du fait que le corps est indéformable.

Tentons de prouver que le point  $A_1$  peut être amenée à  $A_2$  et  $B_1$  à  $B_2$  en une seule rotation. Prenons le cas où la position finale de  $A$  est la position initiale de  $B$ , donc  $A_2 = B_1$  tracent les arcs  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  et  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ . Soit  $C$  le point d'intersection de  $A_1A_2$ ,  $A_2B_2$ . On a  $A_1C =$

$A_2C = B_2C$ . Donc les triangles sphériques  $A_1CA_2$  et  $B_1CB_2$  sont concourants et les angles  $A_1CA_2$  et  $B_1CB_2$  sont égaux. Soit  $\theta$  la valeur de ces angles. Donc la sphère peut être amenée de sa position initiale à sa position finale par une seule rotation  $\theta$  autour de l'axe  $OC$ .

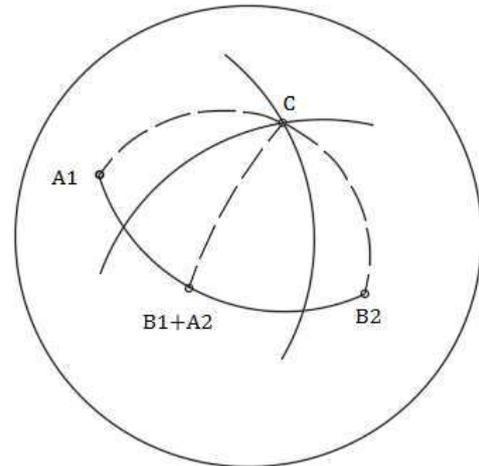
La vitesse angulaire d'une particule du solide peut être obtenue en formulant le produit vectoriel de  $\omega$  et du vecteur position de la particule  $r$ .

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r$$

Par dérivation, l'accélération de la particule donne:

$$a = \frac{d\omega}{dt}$$

Dans le cas du mouvement d'un corps rigide avec un point fixe, la direction de  $\omega$  de l'axe de rotation varie dans le temps. L'accélération angulaire reflète donc la direction de  $\omega$  et sa variation de grandeur. L'accélération angulaire représente la vitesse de l'extrémité du vecteur  $\omega$ .

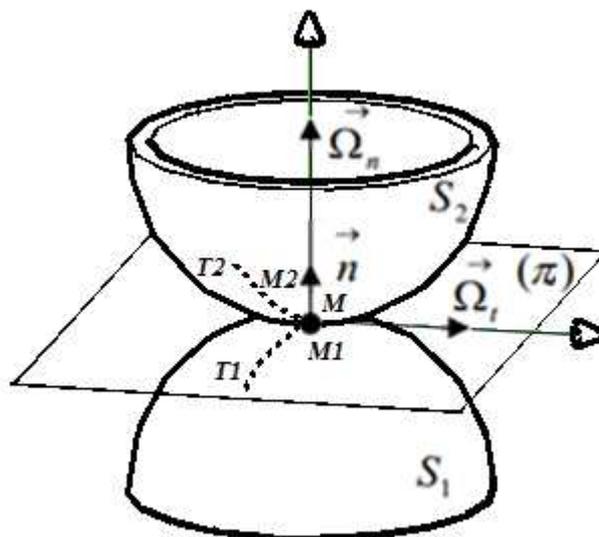


### III.8 Cinématique des solides en contact

Soient (S1) et (S2) deux solides en contact ponctuel au point M,

$R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$  trois référentiels tel que  $R_1$  et  $R_2$  sont lié respectivement au deux solides (S1) et (S2) et  $R_0$  est fixe.

Si les deux solides restent en contact pendant un temps  $t$ , une trajectoire  $T_1$  se trace sur la surface limitant le solide (S1) et une trajectoire  $T_2$  sur la surface limitant le solide (S2). Une troisième trajectoire  $\Omega$  est tracée sur le plan  $(\pi)$  tangent au deux solide au point de contact M.



### Chapitre III- Cinématique du solide

Le point de contact (M) entre les deux solides n'appartient à aucun des deux solides (S1 et S2). M1 et M2 sont respectivement les points appartenant au deux solides (S1) et (S2) qui partagent la même position avec le point M à l'instant t.

La vitesse de glissement d'un solide sur l'autre appartient au plan ( $\pi$ ), en puisant dans les acquis sur les champs des vitesses, nous pouvons écrire dans le repère R0:

$$\vec{V}^0(M_1) = \vec{V}^0(P_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{P_1M_1}$$

$$\vec{V}^0(M_2) = \vec{V}^0(P_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{P_2M_2}$$

La vitesse de glissement du solide (S2) par rapport au solide (S1) est donnée par :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1)$$

Comme les points (M, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>) occupent la même position à l'instant t; on obtient:

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{P_2M_2} - \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{P_1M_1}$$

Le vecteur rotation du solide (S2) sur le solide (S1) se compose de deux composantes: l'une tangent au plan, appelé vecteur rotation de roulement de (S2) par rapport à (S1) ( $\Omega_t$ ) et l'autre parallèle au plan, appelé vecteur rotation de pivotement (S2) par rapport à (S1) ( $\Omega_n$ ).

Ainsi le mouvement du solide (S2) par rapport au solide (S1) peut se composer d'un glissement, d'une rotation et d'un pivotement.

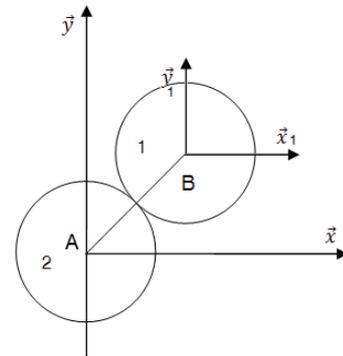
### III.9 Exercices sur la cinématique du solide

#### Exercice 1

Un disque (1) de centre B et de rayon R qui roule sur un autre disque (2) fixe de centre A et de même rayon. Le repère  $R_1 (B, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  est lié au premier disque (1) alors que le repère  $R (A, \vec{x}, \vec{y})$  est fixe. On demande de:

Déterminer le torseur cinématique au point B

Déterminer la vitesse et l'accélération au point M sur la périphérie du disque 1



#### Exercice 2

Soit un cône plein de masse m, de hauteur H et de rayon R. Le sommet O du cône reste fixe au cours de son mouvement.  $\vec{Oz}_1$  est l'axe du cône.

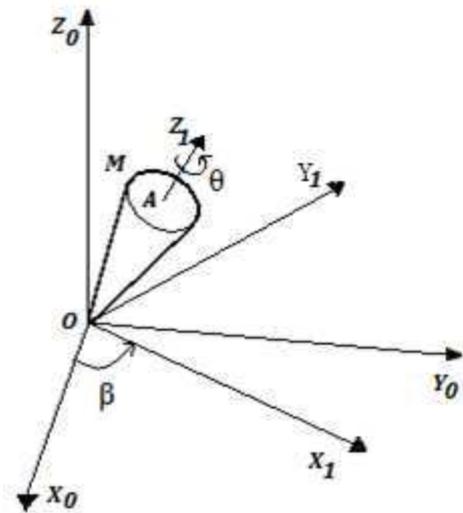
Le repère  $R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère orthonormé direct lié au cône, alors que le repère  $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est fixe orthonormé direct supposé galiléen.

Le cône tourne autour de son axe de révolution  $\vec{Oz}_1$ , avec un angle de rotation  $\theta$ . Le cône tourne autour de l'axe  $\vec{Oz}_0$  avec un angle  $\beta$ .

On demande de:

Déterminer le torseur cinématique au point A.

Déterminer la vitesse et l'accélération au point B sur la périphérie du cône.



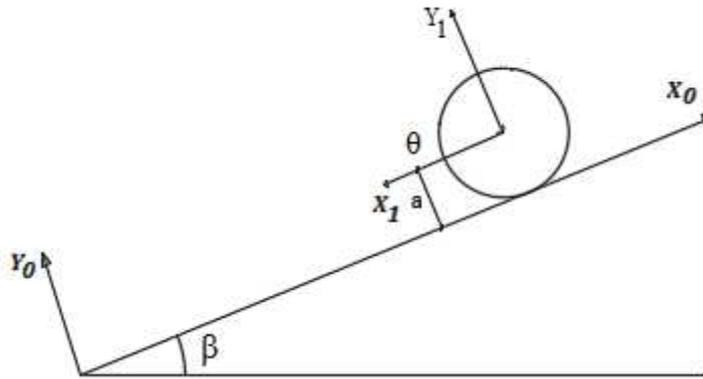
#### Exercice 3

Une sphère pleine de centre C et de rayon R roule sur un plan incliné. La rotation de la sphère se fait autour de l'axe  $\vec{Oz}_0$  est définie par l'angle  $\theta$ . On demande de:

1-Écrire le torseur cinématique au centre C de la sphère.

2-Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque.

3-Écrire la condition de roulement sans glissement au point de contact I de la sphère avec le plan.



**Exercice 4**

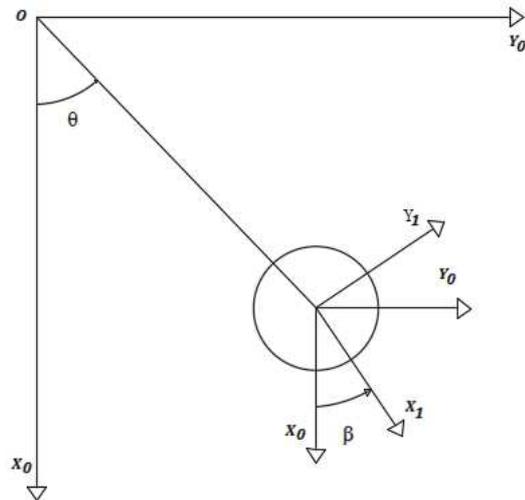
Soit un système constitué d'une tige T et d'un disque D de rayon R et de centre O. Le repère R1 est lié à la tige, la position de R1 dans R0 est repérée par l'angle  $\theta$ .

Déterminer le torseur cinématique de la tige.

Déterminer le torseur cinématique du disque.

Calculer l'accélération du point A par rapport à R1 et R0.

Calculer l'accélération de coriolis du point A par rapport à R1 et R0.



**Exercice 5**

Soit un système composé d'une tige et d'un disque, la tige est homogène de densité linéaire de  $L = 10 \text{ kg/m}$  et de longueur 6 m. la tige tourne autour de son extrémité fixe.

Un disque de densité surfacique  $\sigma = 15 \text{ kg/m}^2$  et de rayon  $R=2 \text{ m}$ .

Le système est dans un repère orthonormé direct  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  paramétré par les trois angles d'Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié au système et  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  sont les deux repère intermédiaires.

1- Représenter le système S et présenter les trois rotations représentant les angles d'Euler qui font passer de  $R_0$  à R

2-Déterminer le vecteur rotation.

3-Calculer le vecteur vitesse.

4-Calculer le vecteur accélération.

**Exercice 6**

Soit un double pendule constitué d'une tige  $OA$  de longueur  $L$  en liaison pivot d'axe  $O\vec{Z}$  avec le bâti.

Une tige  $AB$  de longueur  $L'$ , en liaison pivot d'axe  $A\vec{Z}$  avec la tige  $OA$ .

Un disque de rayon  $R$  en liaison pivot d'axe  $B\vec{Z}$  avec la tige  $AB$ .

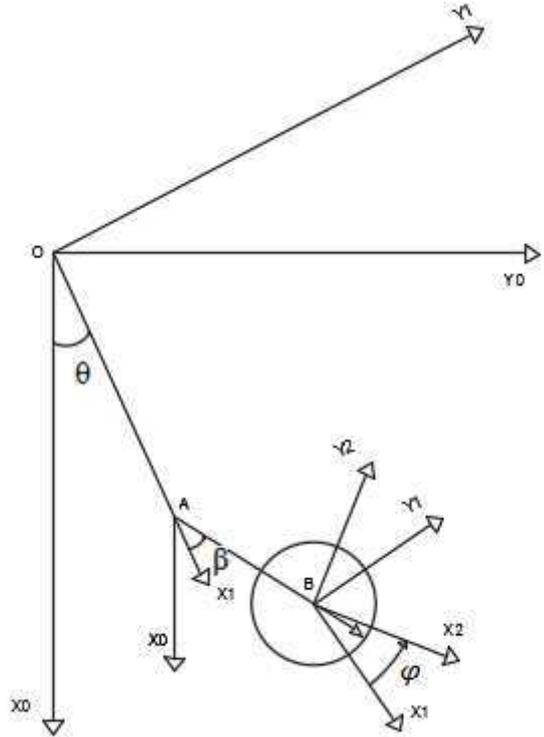
On considère les trois représentations suivantes:

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à la tige  $OA$  tel que La rotation du pendule se fait autour de l'axe  $O\vec{z}_1$  est définie par l'angle  $\theta$ .

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié a la tige  $AB$  tel que La rotation du disque se fait autour de l'axe  $O\vec{z}_2$  est définie par l'angle  $\beta$ .

$R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié au disque tel que La rotation du disque se fait autour de l'axe  $O\vec{z}_2$  est définie par l'angle  $\varphi$ .



# CHAPITRE IV

---

## GÉOMÉTRIE DES MASSES

---

## CHAPITRE IV. Géométrie des masses

### IV.1 Introduction

Ce chapitre concerne les notions sur la masse, le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie. Les notions étudiées dans ce chapitre seront exploitées dans les chapitres suivants (cinétique, dynamique).

### IV.2 Centre de masse

Le centre de masse est un point de référence situé à la position moyenne de la masse du solide. Le centre de masse du solide n'est pas toujours confondu avec le centre géométrique du solide et ne fait pas toujours partie de la géométrie du solide.

Le centre de masse d'un solide effectue un mouvement de translation alors que le reste du corps effectue une rotation autour de lui lors d'un mouvement libre.

#### IV.2.1 Détermination du centre de masse

#### IV.2.2 Détermination expérimentale

Le centre de masse peut être déterminé expérimentalement en appliquant sur le corps une force dans trois directions différentes sans que celui-ci ne subisse de rotation. L'interaction des droites qui portent ces forces donne la position du centre de masse.

#### IV.2.3 Détermination par calcul

La masse d'un corps représente la quantité de matière contenue dans ce corps, elle est constante dans le temps, elle peut être exprimée en fonction de la densité qui représente la masse moyenne par unité de longueur de surface ou de volume:

$\mu$ : Densité linéaire de masse [kg/m] avec  $m = \mu \times L$

$\sigma$ : Densité surfacique de masse [kg/m<sup>2</sup>] avec  $m = \sigma \times A$

$\rho$ : Densité volumique de masse [kg/m<sup>3</sup>] avec  $m = \rho \times V$

$m$  : Masse du corps. [kg].

$L$ : Longueur du corps. [m].

$A$ : Surface du corps. [m<sup>2</sup>].

$V$ : Volume du corps. [m<sup>3</sup>].

### Système discret

Le centre de masse pour un corps discret peut être obtenu en calculant la moyenne des positions  $(x_i, y_i, z_i)$  des éléments qui constituent le corps pondéré par leur masse  $(m_i)$ .

$$\text{Centre de masse en x : } x_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i \cdot x_i}{\sum_i^n m_i}$$

$$\text{Centre de masse en y : } y_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i \cdot y_i}{\sum_i^n m_i}$$

$$\text{Centre de masse en z : } z_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i \cdot z_i}{\sum_i^n m_i}$$

$x_{cm}$  : Position du centre de masse selon l'axe x (m).

$y_{cm}$  : Position du centre de masse selon l'axe y (m).

$z_{cm}$  : Position du centre de masse selon l'axe z (m).

$m_i$  : La masse de l'élément i (kg).

$x_i$  : La position selon l'axe x de l'élément i (m).

$y_i$  : La position selon l'axe y de l'élément i (m).

$z_i$  : La position selon l'axe z de l'élément i (m).

n : Le nombre d'éléments qui constituent le corps.

### Système continu

La position du centre de masse d'un corps continu peut être déterminée par intégration en utilisant les expressions suivantes :

$$\text{Centre de masse en x : } x_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n x \, dm$$

$$\text{Centre de masse en y : } y_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n y \, dm$$

$$\text{Centre de masse en z : } z_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n z \, dm$$

$$\text{Masse totale du corps : } m_t = \int_i^n dm$$

### IV.3 Moments et produits d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la distribution des masses autour d'un élément de référence (un point, droit, plan). Le moment d'inertie est d'autant plus grand qu'il ya de masses éloignées de la référence. Il est égal à la somme du carré de la distance entre les éléments de référence et les masses élémentaires par leur masse, comme le montre l'équation suivante :

$$I = \sum_i^n m_i \cdot d_i^2 \quad \text{Pour un système discret}$$

$$I = \int_i^n m_i \cdot d_i \quad \text{Pour un système continu}$$

I: Moment d'inertie.

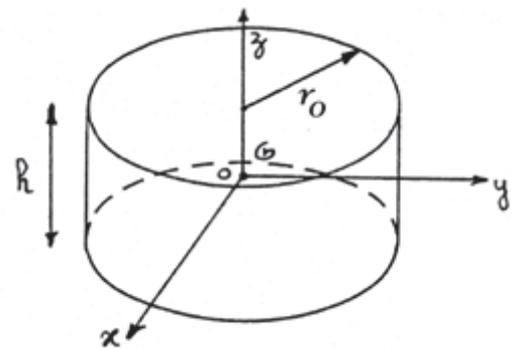
m: Masse

d: Distance entre les éléments de référence et les masses élémentaires.

#### Exemple

Calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène de masse volumique  $\rho$  et de hauteur h et de rayon r, par rapport au plan d'axe Oxy, tel que O est le centre de gravité du cylindre.

Calculer le moment d'inertie de ce cylindre par rapport à l'axe OZ.



#### Solution

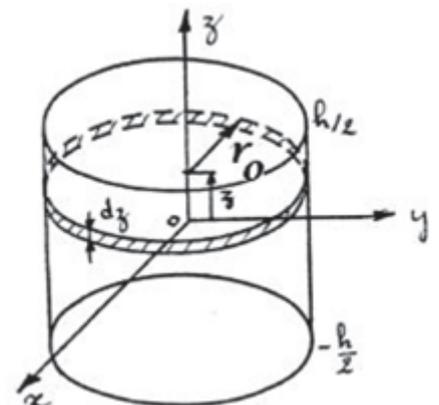
1- moment d'inertie par rapport au plan Oxy

$$dm = \rho(\pi r^2) dz$$

On a que :

$$I_{Oxy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dm = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \rho(\pi r^2) dz$$

$$= \rho(\pi r^2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$



$$= \rho \pi r^2 \frac{h}{12} = m \frac{h^2}{12}$$

2- moment d'inertie par rapport à l'axe Oz

$$I_z = \int r^2 dm$$

Avec :

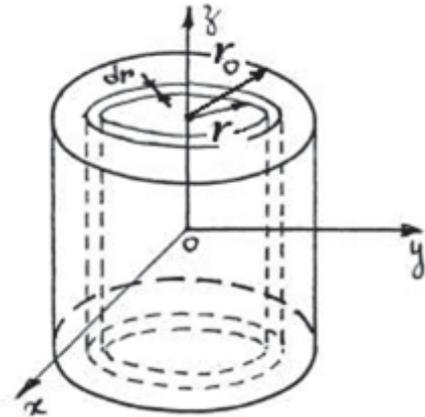
$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r)h dr$$

D'ou:

$$I_z = 2\rho\pi h \int_0^{r_0} r^3 dr$$

$$I_z = \frac{\rho\pi h r^4}{2} = \rho\pi r^2 h \frac{r^2}{2}$$

$$I_z = \frac{mr^2}{2}$$



## IV.4 Théorème de Konig-Huyghens

Le Théorème de Konig-Huyghens permet de déterminer le moment d'inertie d'un élément par rapport à un axe, en connaissant le moment d'inertie de cet élément par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle au premier axe.

Soit D1 et D2 deux droites parallèles tel que D1 passe par le centre de gravité du corps C. Pour chaque points P<sub>i</sub> du solide, un plan π<sub>i</sub> perpendiculaire à ces deux droites, M<sub>i</sub> et N<sub>i</sub> sont les points de percé des droites sur le plan π<sub>i</sub>.

$$\begin{aligned} I_C &= \sum m_i \|\overrightarrow{P_i M_i}\|^2 \\ &= \sum m_i \overrightarrow{P_i M_i} \cdot \overrightarrow{P_i M_i} \\ &= \sum m_i (\overrightarrow{P_i N_i} \cdot \overrightarrow{N_i M_i}) \cdot (\overrightarrow{P_i N_i} \cdot \overrightarrow{N_i M_i}) \\ &= \sum m_i \overrightarrow{P_i N_i} \cdot \overrightarrow{P_i N_i} + \sum m_i (\overrightarrow{N_i M_i} \cdot \overrightarrow{N_i M_i}) + 2 \sum m_i \overrightarrow{P_i N_i} \cdot \overrightarrow{N_i M_i} \\ &= I_{CG} + m \|\vec{d}_{aaG}\|^2 + 2 \left( \sum m_i \overrightarrow{P_i N_i} \right) \cdot \overrightarrow{N_i M_i} \end{aligned}$$

$\sum m_i \overrightarrow{P_i N_i} = \mathbf{0}$  Étant la projection de CG sur le plan normal de la relation de définition du centre de masse. Nous obtenons alors:

$$I_C = I_{CG} + md^2$$

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe parallèle à un axe passant par son centre de gravité est égale au moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité plus le carré de la distance entre les deux axes par la masse du corps, de ce fait le plus petit moment d'inertie d'un corps est celui calculé par rapport à un axe passant par son centre de gravité.

### Exemple

Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre plein, homogène, de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ , par rapport à un axe tangent à une génératrice du cylindre.

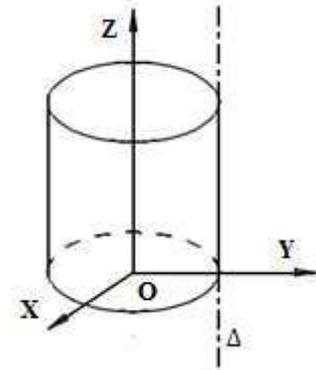
### Solution

On a que :  $I_Z = \frac{3}{2}mr^2$

On appliquant le théorème de Konig-Huyghens on obtient que :

$$I_{\Delta} = \frac{mr^2}{2} + mr$$

$$I_{\Delta} = \frac{3}{2}mr^2$$



## IV.5 Opérateurs d'inertie et axes principaux d'inertie

### IV.5.1 Produit d'inertie

Le produit d'inertie caractérise le degré de déséquilibre dynamique des masses du corps lorsque celui-ci tourne autour d'un axe, tel que:  $I_{yz}$  et  $I_{zx}$  autour de OZ;  $I_{xy}$  et  $I_{zx}$  autour de OX;  $I_{xy}$  et  $I_{yz}$  autour de OY.

Un équilibre parfait lors de la rotation autour d'un axe est obtenu lorsque les deux produits d'inertie qui caractérisent la rotation autour de cet axe sont nuls. Dans ce cas, cet axe est appelé axe principale d'inertie du corps par rapport au point O. si cet axe passe par le centre d'inertie, il est appelé axe central principal d'inertie.

$$\text{Pour un système continu} \begin{cases} I_{xy} = \int xy \cdot dm \\ I_{yz} = \int yz \cdot dm \\ I_{zx} = \int zx \cdot dm \end{cases}$$

$$\text{Pour un système discret} \begin{cases} I_{xy} = \sum_n^i xy \cdot dm \\ I_{yz} = \sum_n^i yz \cdot dm \\ I_{zx} = \sum_n^i zx \cdot dm \end{cases}$$

Le théorème de Huyghens peut aussi être appliqué au produit d'inerties, ce qui donne:

$$I_{ab} = I_{abG} + m d_a d_b$$

## IV.5.2 Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie est une fonction linéaire qui permet de résumer toutes les propriétés d'inerties d'un solide. Appliquée à un vecteur  $\vec{v}$  constant dans  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , l'expression de l'opérateur d'inertie au point O du solide S est la suivante:

$$I(\mathbf{O}, S) = \int (\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP})) dm$$

P: point quelconque du solide S.

dm: l'élément de masse entourant P.

L'opérateur d'inertie est symétrique et linéaire ce qui rend possible sa représentation sous la forme de matrice d'ordre 3 symétrique, dans une base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  associée au repère  $\vec{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Les éléments de la matrice  $I(\mathbf{O}, S)$  de l'opérateur d'inertie au point O du solide S sont donnés par :

$$I_{ij}(\mathbf{O}, S) = \vec{e}_i \int (\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{e}_j \wedge \overrightarrow{OP})) dm$$

$$I(\mathbf{O}, S) \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

La matrice d'inertie  $I_{ij}(\mathbf{O}, S)$  est réelle, Symétrique et diagonalisable, elle se compose de

Les éléments diagonaux sont appelés moments d'inertie par rapport aux axes  $\vec{ox}, \vec{oy}$  et  $\vec{oz}$ , les valeurs propres sont appelées moment principaux d'inertie, les directions propres sont quant à elle appelées axes principaux d'inertie.

Les éléments de la matrice s'écrivent comme suit:

$$\text{Moments d'inertie par rapport à l'axe } \vec{ox}: I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$\text{Moments d'inertie par rapport à l'axe } \vec{oy}: I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

Moments d'inertie par rapport à l'axe  $\vec{OZ}$ :  $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$

Moments d'inertie par rapport au plan  $OXY$ :  $I_{xy} = \int x \cdot y dm$  (Produit d'inertie)

Moments d'inertie par rapport au plan  $OXZ$ :  $I_{xz} = \int x \cdot z dm$  (Produit d'inertie)

Moments d'inertie par rapport au plan  $OYZ$ :  $I_{yz} = \int y \cdot z dm$  (Produit d'inertie)

### IV.5.3 Cas particulier de solide présentant des symétries

Les solides qui présentent des symétries ce qui a certaine implication sur les opérateurs d'inertie du solide:

Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls:

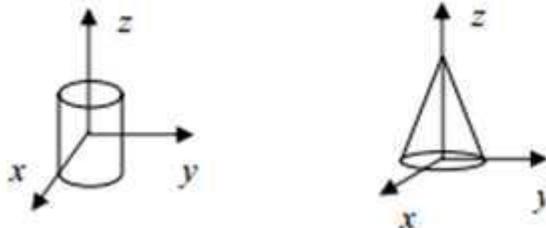
Plan de symétrie  $OXY \rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$

Plan de symétrie  $OXZ \rightarrow I_{xz} = I_{xy} = 0$

Plan de symétrie  $OYZ \rightarrow I_{xy} = I_{yz} = 0$

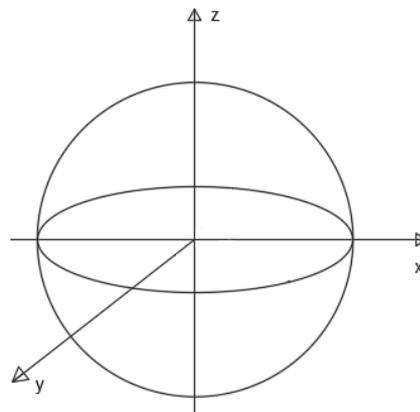
Pour un solide présentant un axe de révolution (cylindre, cône, disc,...), la masse est uniformément distribuée autour de cet axe. Si l'axe  $OZ$  est un axe de révolution alors:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}.$$



Pour les solides avec une symétrie sphérique tous les axes du repère jouent le même rôle, les moments d'inertie sont donc égaux:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \text{ et } I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}.$$



## IV.6 Centre de masse, moment, et produit d'inertie de quelques solides

### IV.6.1 Cas d'un rectangle de coté h et de base b.

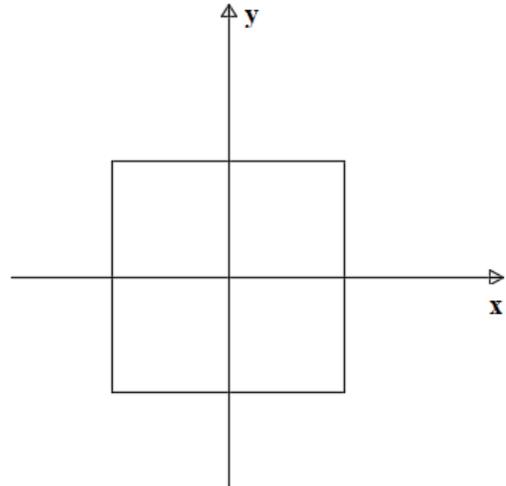
On utilise les coordonnées cartésiennes  $-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$  ;  $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$

$$I_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dm = \frac{mh^2}{12}$$

$$I_{yy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dm = \frac{mb^2}{4}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{mh^2 + b^2}{2}$$

$$m = \int dm = \int \sigma dx dy$$



Le tenseur d'inertie au centre d'un disque  $I_o = \begin{bmatrix} \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mh^2 + b^2}{2} \end{bmatrix}$

### IV.6.2 Cas du disque de rayon R de centre O et de densité surfacique $\sigma$ :

Du fait que le solide est un disque on a que :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, I_{xx} = I_{yy} \text{ et } y_G = x_G = 0$$

L'élément de masse est:  $dm = \rho dv = \sigma d\theta dr$

Avec :  $0 \leq r \leq R$ ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

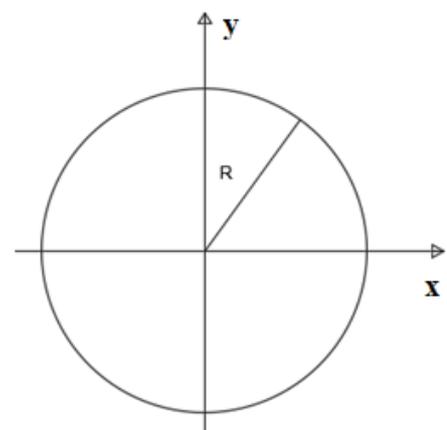
La masse du disque:  $m = \int dm = \int \sigma d\theta dr = \frac{4\rho\pi R^3}{3}$

On a que:  $I = \int r^2 dm$  et  $x^2 + y^2 = R$

Donc :

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) = \sigma \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} \text{ Donc: } I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$$



Le tenseur d'inertie au centre d'un disque  $I_o = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$

### IV.6.3 Cas d'une sphère de rayon R de centre O et de masse volumique $\rho$ :

Du fait que le solide est une sphère on a que :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \text{ et } y_G = x_G = 0$$

L'élément de masse est:  $dm = \rho dv = \rho r d\theta r d\psi dr \cos \theta$

$$dm = \rho r^2 d\theta d\psi dr \cos \theta$$

Avec :  $0 \leq r \leq R; \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \psi \leq 2\pi$

La masse de la sphère:

$$m = \int dm = \int \rho r^2 d\theta d\psi dr \cos \theta = \frac{4\rho\pi R^3}{3}$$

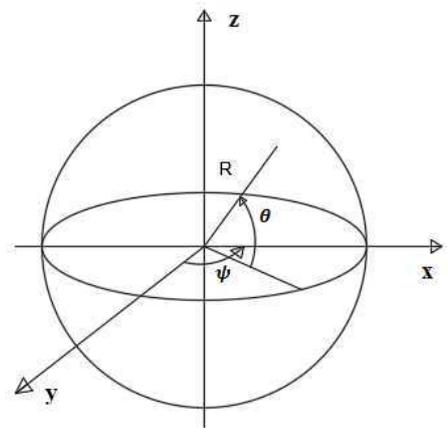
On a que:  $I = \int r^2 dm$

Donc :

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm \\ &= 2\rho \int_0^R r^4 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\psi = 2\rho \frac{R^5}{5} 4\pi \end{aligned}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mR^2$$

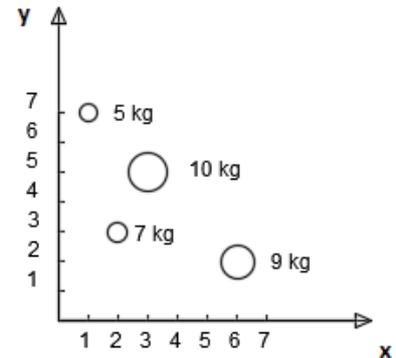
Le tenseur d'inertie au centre d'une sphère  $I_o = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} mR^2 \end{bmatrix}$



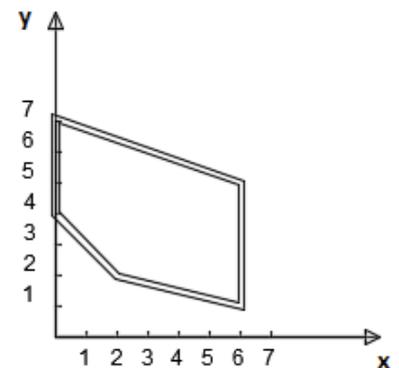
## IV.7 Exercices sur la Géométrie des masses

### Exercice 1

1- Une particule de 5 kg de coordonnées (1,7), une particule de 10 kg est située à la position (3,5), une particule de 7 kg est située à la position (2,3) et une autre de 9 kg située à la position (6,2). Déterminer les coordonnées du centre de masse du système composé des trois particules.



2- Un fil en métal homogène de densité linéaire 5 kg/m, est plié afin de former un triangle. déterminer les coordonnées du centre de masse du triangle.

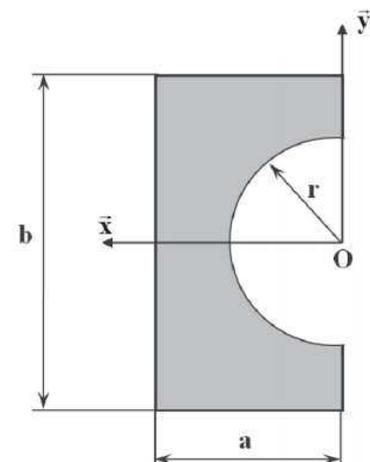


### Exercice 2

Une plaque carrée de masse volumique  $300 \text{ kg/m}^2$  est percée d'un demi cercle de rayon 0.7m.

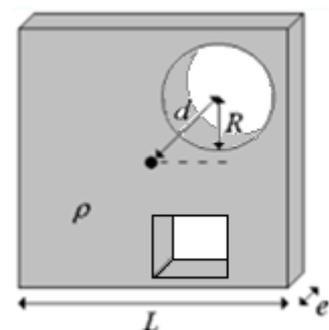
On a  $b=80 \text{ m}$  et  $a=50$ .

Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque rectangulaire découpée ci-dessous par la définition du CdG.



### Exercice 3

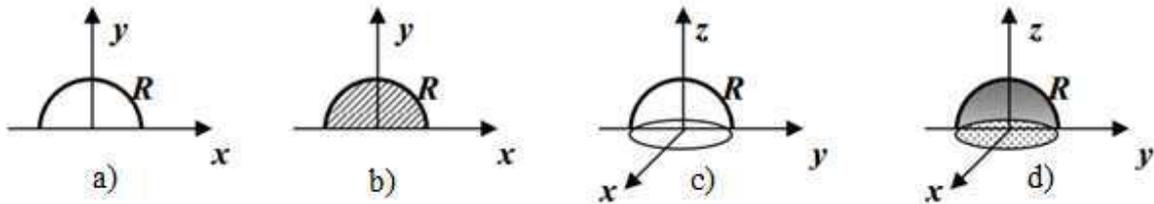
Une plaque carrée de masse volumique  $300 \text{ kg/m}^3$  est percée d'un cylindre de rayon 0.5m à une distance de 1 m du centre de la plaque à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale et d'un parallépipède de 0.8 m à une distance de 3 m centre de la plaque à  $90^\circ$  par rapport à l'horizontale. évaluez le centre de masse de la plaque par rapport au coin inférieur gauche de la plaque. Avec  $L=4\text{m}$  et  $e=0.1$ .



**Exercice 4**

Déterminer le centre d'inertie des corps solides homogènes suivants:

- a) un demi-cercle matériel de rayon  $R$ ; b) Un demi disque matériel de rayon  $R$ ; c) Une demi sphère matérielle creuse de rayon  $R$ ; d) Une demi sphère matérielle pleine de rayon  $R$ .

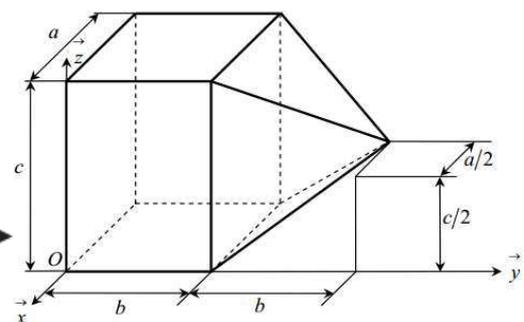
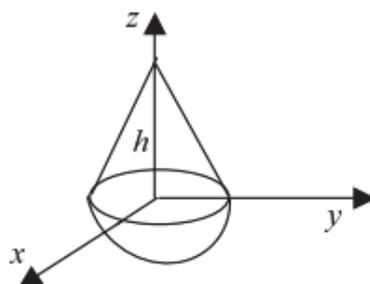
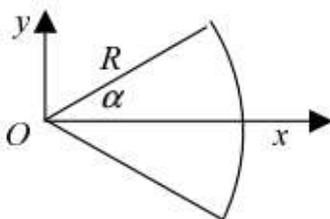
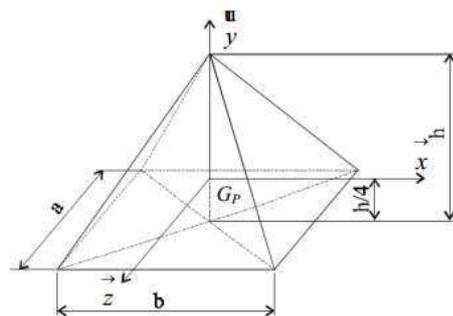
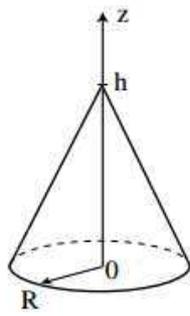
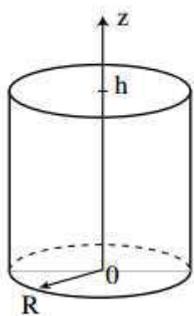
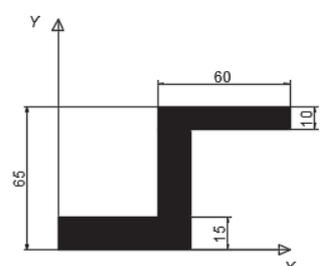
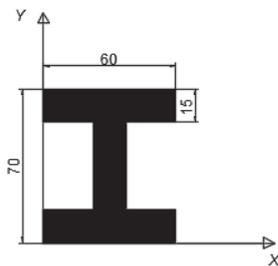
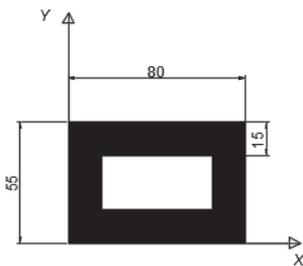


**Exercice 5**

1- Déterminer la masse  $m$  des solides.

2-Déterminer les coordonnées des centres de masse ( $C$ ) des solides.

3-Déterminer numériquement la matrice d'inertie des solides en son centre de masse  $C$  dans pour:  $R=20$  mm,  $h= a = 40$  mm,  $b = 30$  mm et  $c = 40$  mm,  $\alpha=30^\circ$ .



**CHAPITRE IV**

---

**CINÉTIQUE DU SOLIDE**

---

## CHAPITRE V. Cinétique du solide

### V.1 Introduction

La cinétique est la partie de la mécanique qui a pour objet l'étude du mouvement des systèmes matériels en prenant en compte leur masse sans s'intéresser aux causes qui produisent le mouvement.

Dans ce chapitre nous

### V.2 Quantité de mouvement

Si deux corps de masses différentes se déplacent à la même vitesse, l'objet le plus lourd est le plus difficile à arrêter, de ce fait, pour étudier le mouvement en prendre en compte ce phénomène, il ne suffira pas de considérer la vitesse seule, il est nécessaire de prendre en considération la masse des corps. La grandeur physique qui prend en charge ce phénomène est la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement (le vecteur  $\vec{P}$ ) d'un corps matériel ponctuel (M) est le produit de sa masse (le scalaire  $m$ ) par sa vitesse (le vecteur  $\vec{V}_M$ ).

$$\vec{P} = m \vec{V}_M$$

Du principe de conservation de la masse, qui implique qu'au cours d'une expérience la masse d'un solide reste invariable dans le temps, et du fait que dans un système isolé, aucune force extérieure non compensées n'est appliqué, la quantité de mouvement dans un système isolé demeure constante quoiqu'il se produise entre les éléments du système.

#### V.2.1 Quantité de mouvement d'un système matériel (S)

##### *Système matériel discret*

La quantité de mouvement d'un système matériel discret constitué de  $n$  points matériels ( $\vec{P}_i$ ), de masse  $m_i$  et de vitesse  $\vec{V}_{M_i}$ :

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_{M_i}$$

##### *Système matériel continu*

La quantité de mouvement d'un système matériel continu :

$$\vec{P} = \int_S \vec{V}_M dm$$

## V.3 Moment Cinétique

Le moment cinétique est une quantité très importante en physique, son rôle est tout aussi important que celui de la quantité de mouvement, il est son analogue en rotation.

Le moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport à un point  $O$  est le moment de la quantité de mouvement  $\vec{P}$  par rapport à ce même point  $O$ , ce qui donne le produit vectoriel :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V}_M$$

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

### *Système matériel discret*

Le moment cinétique d'un système matériel discret :

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{V}_{M_i}$$

### *Système matériel continu*

Le moment cinétique d'un système matériel continu :

$$\vec{\sigma}_O = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm$$

## V.4 Torseur cinématique

Le moment cinétique obéit à la loi de transport du moment, ce qui nous permet de constituer un torseur cinétique. Ce torseur se compose pour un système matériel en un point  $O$ , d'une première composante dite quantité de mouvement (résultante cinétique) et d'une deuxième composante, le moment cinétique du système.

$$[C]_O = \begin{cases} \vec{P} = \int_S \vec{V}_M dm \\ \vec{\sigma}_O = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm \end{cases} \text{ Système matériel continu}$$

$$[C]_O = \begin{cases} \vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_{M_i} \\ \vec{\sigma}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{V}_{M_i} \end{cases} \text{ Système matériel discret}$$

$$\vec{P} = \int \vec{V}_M dm \text{ ou } : \vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_{M_i} : \text{ Résultante cinétique du système.}$$

$$\vec{\sigma}_O = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm \text{ ou } \vec{\sigma}_O = \sum \overrightarrow{OM} \wedge m_i \vec{V}_{M_i} : \text{ Moment cinétique du système au point A.}$$

## V.5 Théorème de KOENIG

Considérons  $\mathbf{R}_0$  un repère orthonormé fixe et  $\mathbf{R}_G$  le référentiel de Koëinig d'origine  $G$  (centre d'inertie du solide). Les axes de ces deux repères restent parallèles dans le temps. La vitesse du repère  $\mathbf{R}_G$  par rapport au repère fixe  $\mathbf{R}_0$  est nulle.

Soit  $M$  un point du système matériau, tel que:

Sa vitesse dans le repère  $\mathbf{R}_0$  est donnée par  $\vec{V}^0(M) = \vec{V}_G^0 + \vec{V}_M^G$

Son moment cinétique au point  $G$  par rapport à  $\mathbf{R}_0$  est  $\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_M^0 dm$

Son moment cinétique au point  $G$  par rapport à  $\mathbf{R}_G$  est  $\vec{\sigma}_{G/R_G} = \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_M^G dm$

De là nous obtenons :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int \vec{GM} \wedge (\vec{V}_M^G + \vec{V}_G^0) dm = \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_M^G dm + \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_G^0 dm$$

Vu que  $\int \vec{GM} dm = \mathbf{0}$  on obtient que :  $\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_M^G dm = \vec{\sigma}_{G/R_G}$

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

Le moment cinétique en  $G$  est le même indépendamment de sa présentation dans  $\mathbf{R}_0$  ou  $\mathbf{R}_G$

Pour un point quelconque ( $P$ ) de l'espace

$$\vec{\sigma}_{P/R_0} = \vec{\sigma}_{P/R_G} + \vec{PG} \wedge m\vec{V}_G^0$$

Ce qui donne la formule du théorème de Koenig pour le moment cinétique.

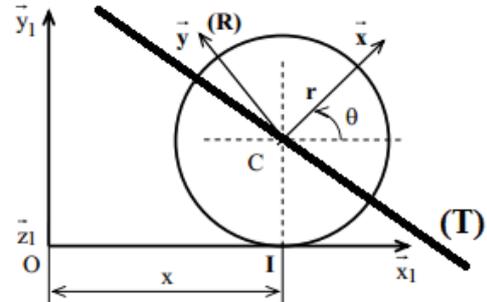
## V.6 Exercices sur la cinétique du solide

### Exercice 1

Soit le solide composé des deux éléments suivant:

Un Disque de masse  $m_1$  de centre  $C$  et de rayon  $R$  et une tige de masse  $m_2$  de centre  $C$  et de longueur  $2L$ .

Le disque roule sans glisser sur l'axe  $O\vec{X}_1$ , le point  $I$  est le point de contact entre le disque et le repère  $O\vec{X}_1$ .



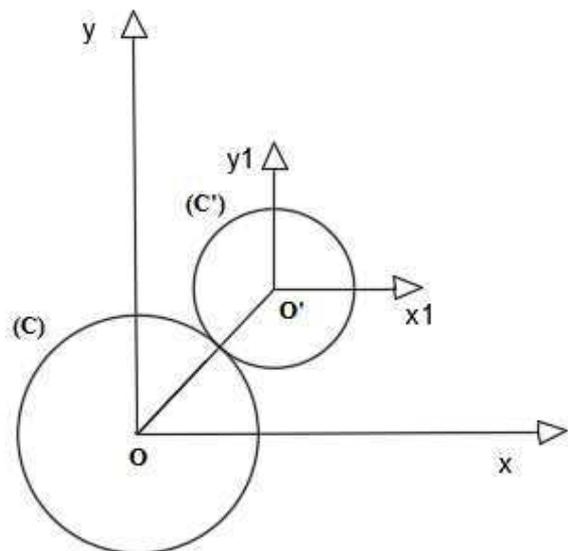
- 1- Déterminer les torseurs cinématique, cinétique du solide en  $C$ .
- 2- Déterminer la condition de roulement sans glissement du solide sur l'axe  $O\vec{X}_1$ .
- 3- Déterminer l'énergie cinétique du solide.

### Exercice 2

Soit le cylindre  $(C)$  fixe d'axe  $O$  et de rayon  $R$ , de masse  $m$  et le cylindre  $(C')$  d'axe  $O'$  et de rayon  $R'$ , de masse  $m'$  qui roule sans glissé sur le pourtour du premier cylindre.

Le repère  $R_1 (B, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  est lié au premier disque (1) alors que le repère  $R (A, \vec{x}, \vec{y})$  est fixe. On demande de:

- 1- Déterminer le torseur cinématique et cinétique aux points  $O$  et  $O'$ .
- 2- Déterminer les conditions de roulement sans glissement.
- 3- Déterminer l'énergie cinétique du solide.



**Exercice 3**

Soit le système matériel composé de deux éléments:

Un cerceau rigide homogène de centre C et de centre d'inertie I par rapport à l'axe OZ normal à son plan.

Et un disque homogène de masse m de moment d'inertie J et de centre A.

Par rapport à l'axe AZ parallèle à OZ passent par son centre d'inertie.

Le disque tourne sans frottement autour de O. On donne:  $OA = a$ ,  $AP = b$ .

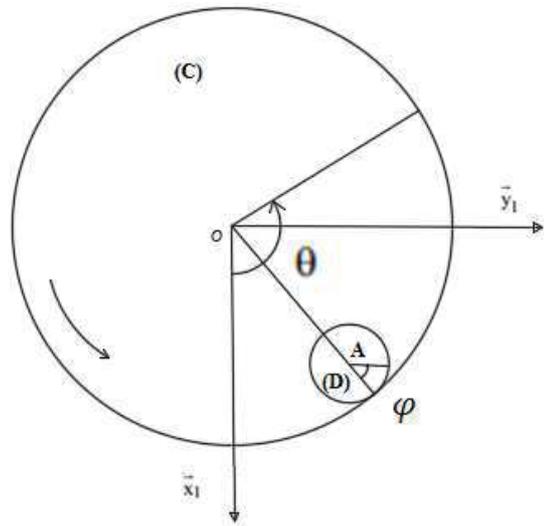
Le contact entre les deux éléments permet le glissement sans frottement pour permettre le roulement sans glissement mais on néglige le couple de résistance au roulement.

On demande:

1-Le moment cinétique de D par rapport à AZ.

1-Le moment cinétique de D par rapport à OZ.

1-Le moment cinétique de C par rapport à OZ.



**CHAPITRE VI**

---

**PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA  
DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS**

---

# CHAPITRE VI. Principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels

## VI.1 Introduction

La dynamique étudie le mouvement des corps matériels en prenant en compte les forces à l'origine des mouvements.

Le but de ce chapitre est d'énoncer le principe fondamental de la dynamique ainsi que son influence sur l'étude du mouvement. Nous d'introduisons aussi la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

## VI.2 Résultante dynamique et moment dynamique (Torseur dynamique)

Le torseur dynamique au point O d'un système matériel en mouvement par rapport à un repère fixe R est défini par :

$$[D]_O = \begin{cases} \vec{D} = \int \vec{\gamma}_M dm \\ \vec{\delta}_O = \int \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}_M dm \end{cases} \text{ Système matériel continu.}$$

$$[D]_O = \begin{cases} \vec{D} = \sum_{i=1}^m m_i \vec{\gamma}_{M_i} \\ \vec{\delta}_O = \sum \vec{OM} \wedge m_i \vec{\gamma}_{M_i} \end{cases} \text{ Système matériel discret.}$$

$\vec{D} = \int \vec{\gamma}_M dm$  ou  $\vec{D} = \sum_{i=1}^m m_i \vec{\gamma}_{M_i}$ : Résultante dynamique du système.

$\vec{\delta}_O = \int \vec{OM} \wedge \vec{\gamma}_M dm$  ou  $\vec{\delta}_O = \sum \vec{OM} \wedge m_i \vec{\gamma}_{M_i}$ : Moment dynamique du système au point A.

L'accélération du point O est donnée par  $\vec{\gamma}_O = \frac{d\vec{v}_M}{dt}$

### VI.2.1 Théorème de Koëning relatif au moment dynamique

Considérons  $R_0$  un repère orthonomé fixe et  $R_G$  le référentiel de Koëning d'origine G (centre d'inertie du solide). Les axes de ces deux repères restent parallèles dans le temps. La vitesse du repère  $R_G$  par rapport au repère fixe  $R_0$  est nulle.

Soit M un point du système matériau, tel que:

Son accélération dans le repère  $R_0$  est donnée par  $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}_G^0 + \vec{\gamma}_M^G$

Son moment dynamique au point G par rapport à  $R_0$  est  $\vec{\delta}_{G/M} = \int \vec{GM} \wedge \vec{\gamma}_M^0 dm$

Son moment dynamique au point G par rapport à  $R_G$  est  $\overrightarrow{\delta_{G/M}} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^G_M} dm$

De là nous obtenons

$$\overrightarrow{\delta_{G/M}} = \int \overrightarrow{GM} \wedge (\overrightarrow{\gamma^G_M} + \overrightarrow{\gamma^0_G}) dm = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^0_G} dm + \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^G_M} dm$$

Vu que  $\int \overrightarrow{GM} dm = \mathbf{0}$  on obtient que :  $\overrightarrow{\delta_{G/G}} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^G_M} dm = \overrightarrow{\delta_{0/G}}$

$$\overrightarrow{\delta_{G/G}} = \overrightarrow{\delta_{0/G}}$$

Le moment dynamique en G est le même indépendamment de sa présentation dans  $R_0$  ou  $R_G$

Pour un point quelconque de l'espace

$$\overrightarrow{\delta_{G/P}} = \overrightarrow{\delta_{0/P}} + \overrightarrow{PG} \wedge m\overrightarrow{\gamma^0_G}$$

Ce qui donne la formule du théorème de Koenig pour le moment dynamique.

## VI.2.2 Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

Les deux torseurs dynamique et cinétique présentent la même construction avec dans l'un les vitesses et dans le second les accélérations. Il est logique de voir s'il n'existe pas des relations de dérivation entre les deux.

Soit M un point du système matériel et O un point quelconque du repère. Le moment cinétique au point O est:

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} dm$$

La dérivée de cette expression donne :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \int \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M}) dm = \int \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{V_M} dm + \int \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{V_M}}{dt} dm$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \int \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{V_M} dm + \overrightarrow{\gamma_O}$$

Sachent que :  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}$

On a que :  $\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \int (\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}) \wedge \overrightarrow{V_M} dm + \overrightarrow{\gamma_O}$

Donc :  $\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = -\overrightarrow{V_O} \wedge m\overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{\gamma_O}$

De là, on obtient la relation qui lie le moment cinétique et le moment dynamique

$$\vec{\delta}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} + \vec{V}_o \wedge m \vec{V}_G$$

### VI.2.3 Théorème de Koëinig relatif à l'énergie cinétique

Considérons  $R_0$  un repère orthonomé fixe et  $R_G$  le référentiel de Koëinig d'origine G (centre d'inertie du solide). Les axes de ces deux repères restent parallèles dans le temps. La vitesse du repère  $R_G$  par rapport au repère fixe  $R_0$  est nulle.

Soit M un point du système matériau tel que:

Sa vitesse dans le repère  $R_0$  est donnée par  $\vec{V}^0(M) = \vec{V}_G^0 + \vec{V}_M^G$

En exploitant cette expression pour l'énergie cinétique on obtient:

$$E_C^0 = \int \frac{1}{2} (\vec{V}_M^G + \vec{V}_G^0) \cdot dm = \frac{1}{2} (\vec{V}_M^G)^2 \int dm + \int \vec{V}_G^0 \cdot \vec{V}_M^G dm + \frac{1}{2} \int (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

Vu que  $\vec{V}_M^G = \frac{d^G \vec{GM}}{dt}$  on obtient que :

$$E_C^0 = \int \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0)^2 \int dm + \vec{V}_G^0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{GM} dm + \frac{1}{2} \int (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

Vu que  $\int \vec{GM} dm = \mathbf{0}$  on obtient que :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0)^2 \int dm + \frac{1}{2} \int (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0)^2 \int dm + E_C^G$$

L'énergie cinétique d'un système en mouvement quelconque par rapport au repère  $R_0$  est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie plus l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse du système.

### VI.2.4 Lois de Newton dans un référentiel galiléen

#### VI.2.4.1 Première loi de Newton

Dans un repère absolu, une particule M de masse m totalement isolée reste au repos si elle était initialement au repos, ou bien est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme si elle était initialement en mouvement. Cette particule possède une quantité de mouvement constante.

$$\vec{P} = m \vec{V}_M$$

#### VI.2.4.2 Deuxième loi de Newton

Une particule M est soumise à des actions de la part d'une autre particule; à l'instant t; ces actions sont représentées par le vecteur force  $\vec{F}$  s'exercent sur M.

$$\vec{P} = \frac{dm \vec{V}_M}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}_M$$

#### VI.2.4.3 Troisième loi de Newton

S'il ya action d'une particule  $M_1$  sur une autre particule  $M_2$  à l'instant t, la force exercée par  $M_1$  sur  $M_2$  et la force exercé par  $M_2$  sur  $M_1$  sont de même intensité, parallèle mais de direction opposée

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

### VI.3 Principe fondamental de la dynamique

Le Principe fondamental de la dynamique correspond à une généralisation de la première loi de Newton. Il permet de lier les actions mécaniques à leur conséquence, le mouvement.

L'énoncé général du Principe fondamental de la dynamique dit que : il existe au moins un repère privilégié R, appelé repère galiléen, pour lequel tout système matériel en mouvement par rapport à lui possède un torseur dynamique égal au torseur des force extérieurs

Cette égalité entre torseurs se traduit par une égalité entre résultantes.

Soit:

$$[D]_O = [F]_O \leftrightarrow \begin{cases} \vec{D} = \vec{F} \\ \vec{\delta}_O = \vec{M}_O \end{cases}$$

### VI.4 Théorème généraux de la dynamique

Ces théorèmes découlent directement du principe fondamental de la dynamique.

#### VI.4.1 Théorème de la résultante dynamique

La résultante des forces extérieurs agissent sur un système matériel en mouvement dans un référentiel galiléen est égale à résultantes dynamique du système.

$$\vec{F}_{ext} = \vec{D}$$

La somme des forces extérieures d'un système matériel est égale à la résultante dynamique de son centre d'inertie affecté de la masse

$$\overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{\gamma_G}$$

### VI.4.2 Théorème du moment dynamique

Soit M un point quelconque du système matériel en mouvement dans un référentiel galiléen. Le moment dynamique au point M est égal au moment des forces extérieures agissant sur le système matériel en ce point.

$$\overrightarrow{M_{M ext}} = \overrightarrow{\delta_M}$$

Précédemment nous avons vu que:

$$\overrightarrow{\delta_M} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_M}}{dt} + \overrightarrow{V_M} \wedge m \overrightarrow{V_G}$$

De ce fait, si M est confondu avec G ou que M est fixe ou que sa vitesse est parallèle à la vitesse de G, le moment dynamique au point M est égal au moment cinétique du système matériel en ce point.

$$\overrightarrow{M_M} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_M}}{dt}$$

### VI.4.3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Soit M un point de l'axe x lié à un repère galiléen tel que  $\vec{x}$  le vecteur unitaire de cet axe.

Précédemment nous avons vu que:

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{M_M} = \vec{x} \cdot \frac{d\overrightarrow{\sigma_M}}{dt}$$

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{M_M} = \frac{d(\vec{x} \cdot \overrightarrow{\sigma_M})}{dt}$$

Donc:

Le moment des forces extérieures par rapport l'axe x du système matériel est égal à la dérivée du moment cinétique du système par rapport à cet axe.

### VI.4.4 Théorème de l'action et de la réaction

Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux systèmes matériels fermés tel que  $S_1$  et  $S_2$  forment le système fermé S. De la statique, nous avons que le torseur des actions exercées par  $S_1$  sur  $S_2$  est opposé à celui exercées par  $S_2$  sur  $S_1$ .

En suivant le même raisonnement pour la dynamique, dans un système galiléen

Pour  $S_1$ :

$$\tau_{S_1 \rightarrow S_2} = D_{S_1}$$

Sachant que ce qui constitue l'extérieur de  $S_1$  est l'extérieur de  $S + S_2$  donc:

$$\tau_{S \rightarrow S_1} + \tau_{S_2 \rightarrow S_1} = D_{S_1}$$

Pour  $S_2$  :

$$\tau_{S \rightarrow S_2} + \tau_{S_1 \rightarrow S_2} = D_{S_2}$$

Comme  $S_1$  et  $S_2$  forment le système fermé  $S$ :

$$\tau_{S \rightarrow S_1} + \tau_{S \rightarrow S_2} + \tau_{S_1 \rightarrow S_2} + \tau_{S_2 \rightarrow S_1} = D_S$$

$$\tau_{S \rightarrow S} + \tau_{S_1 \rightarrow S_2} + \tau_{S_2 \rightarrow S_2} = D_S$$

$$\tau_{S_1 \rightarrow S_2} = \tau_{S_2 \rightarrow S_1}$$

## VI.4.5 Théorème de l'énergie cinétique

### VI.4.5.1 Travail et puissance d'une force

Le travail d'une force mesure l'effort à fournir pour déplacer un objet le long d'un trajet. Le travail est proportionnel à la taille de l'objet et à la distance à parcourir. Il est aussi affecté par les caractéristiques de la trajectoire suivie.

Un travail est dit moteur (dans le sens du mouvement) lorsque il est positif et résistant lorsque il est négatif (s'oppose au mouvement).

Soit le travail élémentaire  $dw_i$  de la force  $\vec{F}_i$  appliqué sur une particule  $M_i$  de masse  $m_i$ . Le vecteur  $d\vec{OM}$  déplacement élémentaire de  $M_i$  durant un temps  $dt$  considéré très petit. La force  $\vec{F}_i$  peut être considérée constante et la trajectoire peut être assimilée à sa tangente.

Sachant que  $\vec{F}_i = \vec{F}_{i \text{ int}} + \vec{F}_{i \text{ ext}}$

Le travail élémentaire est  $dw_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}$

La puissance que reçoit cette particule

$$P_i = \frac{dw_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{V}_{M_i}$$

Pour l'ensemble du système on obtient:

$$W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i$$

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{V}_M$$

### VI.4.5.2 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}_M$  décrivant une trajectoire entre les points A et B dans un repère galiléen, la variation d'énergie cinétique du point matériel soumis à la force  $\vec{F}$  est égal au travail de la force sur l'arc de trajectoire AB

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

$$E_C = \sum \frac{1}{2} m \vec{v}_M^2$$

### VI.4.5.3 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

Dans le cas des repères non galiléen, le théorème de l'énergie cinétique est applicable mais on doit ajouter un terme correspondant au travail des force d'inertie.

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{inertie})$$

### VI.4.6 Énergie potentielle

La force  $\vec{F}$  est conservative si elle ne dépend que de la position et le travail de cette force entre deux points quelconques A et B ne dépend que des points A et B et non du chemin suivi entre A et B.

Si une force est conservative, on peut dire que cette force dérive d'une énergie potentielle Dans ce cas, le travail de cette force entre les points A et B est :

$$W_{A \rightarrow B} = \int \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{OM} = - \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) = E_p(A) - E_p(B)$$

Avec:

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \overrightarrow{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \overrightarrow{u}_z \text{ En coordonnées cartésiennes}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial \rho} \overrightarrow{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \overrightarrow{u}_\varphi \text{ En coordonnées cylindriques}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial \rho} \overrightarrow{u}_\rho + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \overrightarrow{u}_\varphi \text{ En coordonnées sphériques}$$

### Exemple

Soit la force d'interaction gravitationnelle,  $\vec{F}_{\text{gravitation}} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$  cette force est dirigée vers un point fixe O. On utilise le système de coordonnées sphériques. De  $-\frac{\partial E_p}{\partial r} = -G \frac{Mm}{r^2} + C^{te}$  on déduit que  $E_p = -G \frac{Mm}{r} + C^{te}$ .

Un calcul très voisin s'effectue pour la force d'interaction électromagnétique et on trouve de nouveau une énergie potentielle qui varie en  $\frac{1}{r}$ .

## VI.5 Lois de conservation

### VI.5.1 Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système dans un référentiel donné est donnée par la somme de l'énergie cinétique et de ses énergies potentielles, tel que :  $E_m = E_C + E_p$

#### *Système conservatif*

Un système est conservatif lorsqu'il est mécaniquement isolé et n'est soumis qu'à des forces intérieures conservatives.

L'énergie mécanique totale est conservée dans tout système soumis uniquement à des forces conservative ou non travaillant.

$$E_m = E_C + E_p = \text{constante}$$

La variation d'énergie cinétique d'un système conservatif est égale à l'opposé de la variation de son énergie potentielle.

#### *Système non conservatif*

La variation d'énergie mécanique d'un système non conservatif est égale au travail des forces intérieures et extérieures non conservatives appliquées au système. Nous pouvons écrire que :

$$\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_P = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatif})$$

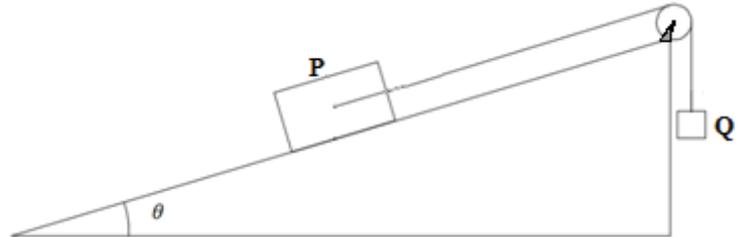
$$\Delta E_C = -\Delta E_P + \sum W(\vec{F}_{non\ conservatif})$$

## VI.6 Exercices sur le principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels

### Exercice 1

Soit un système composé de deux masses P et Q, reliées par un câble inextensible passant par une poulie de rayon R et de masse m.

La masse P glisse sur un plan incliné d'un angle  $\theta$ . Les frottements sont négligés; déterminer :



1-Écrire les torseurs cinématique, cinétique, dynamique et les forces extérieures dans le centre des deux corps solides

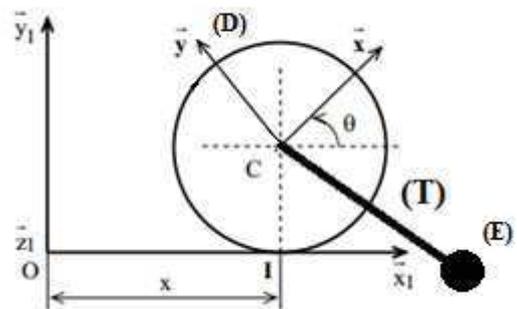
2- écrire le principe fondamental de la dynamique et déterminer l'accélération du système.

### Exercice 2

Soit le solide composé de trois éléments suivant:

Un Disque de masse  $M_1$  de centre C et de rayon R et une tige de masse  $M_2$  de centre C, de longueur L et une masse E de rayon r.

Le disque roule sans glisser sur l'axe  $O\vec{X}_1$ , le point I est le point de contact entre le disque et le repère  $O\vec{X}_1$ .



1- Déterminer les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du solide en C.

2- Déterminer la condition de roulement sans glissement du solide sur l'axe  $O\vec{X}_1$ .

3- Déterminer l'énergie cinétique du solide.

**Exercice 3**

Soit un double pendule constitué d'une tige  $OA$  de longueur  $L$  en liaison pivot d'axe  $O\vec{Z}$  avec le bâti.

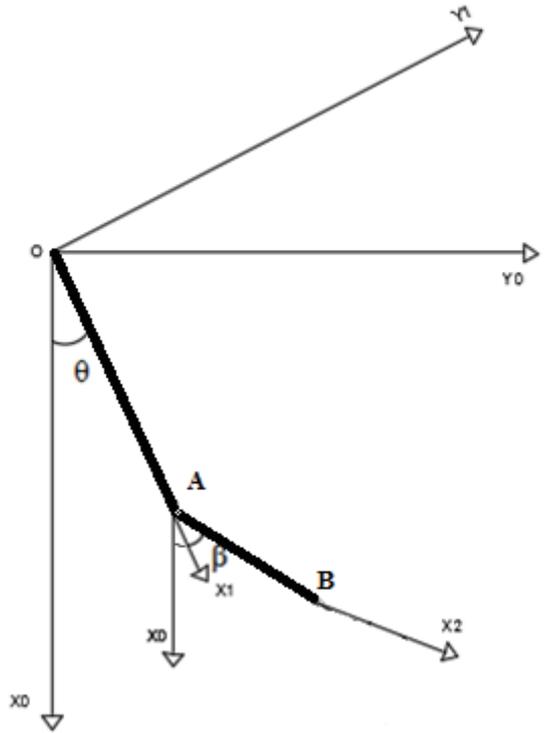
Une tige  $AB$  de longueur  $L'$ , en liaison pivot d'axe  $A\vec{Z}$  avec la tige  $OA$ .

On considère les deux représentations suivantes:

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à la tige  $OA$  tel que la rotation de  $OA$  se fait autour de l'axe  $O\vec{z}_1$  est définie par l'angle  $\theta$ .

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à la tige  $AB$  tel que la rotation de  $OA$  se fait autour de l'axe  $O\vec{z}_1$  est définie par l'angle  $\beta$ .



1-On demande de Déterminé les torseurs cinématique, cinétique et dynamique :

- a)- En O de la tige  $OA$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$
- b)- En O de la tige  $AB$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$
- c)- En O du double pendule dans son mouvement par rapport à  $R_0$

2- Appliquer le théorème du moment dynamique en O pour obtenir une première équation du mouvement.

5- Appliquer le théorème du moment dynamique en O pour obtenir une deuxième équation du mouvement.

## Bibliographie

- 1-A. Deprit, Nicolas Rouche. Mécanique rationnelle, Volume 1. (1967).
- 2 -A. Deprit, Nicolas Rouche .Mécanique rationnelle, Volume 2.(1967).
- 3-A. De Saint-Germain. Recueil D'Exercices Sur La Mecanique -Rationnelle (2e Ed) (Ed.1889) (2012).
- 4- ANNEQUIN / BOUTIGNY .Mecanique 1 - Cours de Physique : Préparation aux grandes écoles scientifiques. Premier cycle universitaire. Annequin et Boutigny. VUIBERT. (1978).
- 5- A. KADI .MECANIQUE RATIONNELLE Cours & exercices résolus.(2008).
- 6-A.Timmermans .Traité de mécanique rationnelle. (1962).
- 7-C.Pasquier PeiP Polytech Paris-Sud Universite d'Orsay Annee 1 - Semestre 2 MECANIQUE (2011).
- 8- F.P. Beer,Ferdinand P. Beer,E.R. Johnston. Mécanique pour ingénieur vol.1: Statique, Volume 1.( 2009).
- 9- F.P. Beer,Ferdinand P. Beer,E.R. Johnston .Mécanique pour ingénieur vol.2: Dynamique, Volume 2.(2009).
- 10- J-C Bone, J Morel, M Boucher. MECANIQUE GENERALE. Cours et applications avec exercices et problèmes résolus. (1994).
- 11-J. Chazy. Cours de mécanique rationnelle: Dynamique du point matériel. (1947).
- 12-H.Laurent. Traité de mécanique rationnelle (1870).
- 13- KASSOUL Amar Physique 4 : Mécanique Rationnelle COURS et EXERCICES.( 2009). 2012).
- 14-Paul Appell. Traité de mécanique rationnelle. Gauthier-Villars. (1955).
- 15-S. Targ .Eléments de mécanique rationnelle. Mir.Moscou, (1975).
- 16- YVES BERTHAUD. Notes de cours « Mécanique des solides rigides » UPMC. ( 2006).