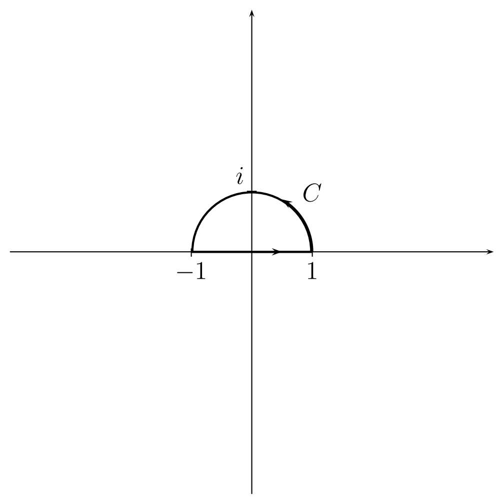
Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2
Examen de Maths 5

27 mai 2012

Exercice 1 (3 points)
En utilisant les paramétrisations, montrer que l'on a :

$$\oint_C z^2 dz \;=\; 0,$$

où C est la courbe ci-contre.
— Comment peut-on prédire ce résultat sans calculs ? (citer le théorème en question).



Exercice 2 (5 points)
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$

où $z = x + iy$, $u = \text{Re}f$ et $v = \text{Im}f$.
On donne :

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy - x + 3y + 5.$$

1. Déterminer $u(x,y)$ sachant que $f(1) = 5 + 5i$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de z.

Exercice 3 (6 points)
Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions suivantes autour du point singulier indiqué et préciser la nature du point singulier en question.

1. $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2}$; $\qquad z_0 = 0.$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$; $\qquad z_0 = 0.$
3. $f(z) = z^3 \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; $\qquad z_0 = 0.$

Exercice 4 (6 points)
Soit f la fonction d'une variable complexe définie par :

$$f(z) = \frac{z-2}{3z^2 + 4z - 4}.$$

1. Déterminer le domaine d'holomorphie de f.

2. Donner les points singuliers de f en précisant la nature de chacun d'entre eux.
3. Soit C le cercle défini par : $|z-i|=2$, orienté positivement. Calculer par la méthode de votre choix l'intégrale curviligne :

$$\oint_C f(z)dz.$$

BONNE CHANCE

Université A/MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département ST 2

27 mai 2012

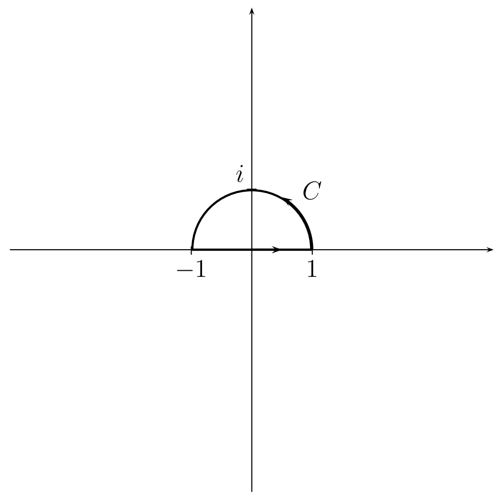
Solution détaillée de l'Examen de Maths 5

B. Farhi

Exercice 1 (3 points)
En utilisant les paramétrisations, montrer que l'on a :

$$\oint_C z^2 dz \;=\; 0,$$

où C est la courbe ci-contre.
— Comment peut-on prédire ce résultat sans calculs ?
(citer le théorème en question).



Solution :
Nommons γ le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1, orienté positivement. On a :

$$\oint_C z^2 dz = \int_{[-1,1]} z^2 dz + \int_\gamma z^2 dz \tag{1}$$

Sur $[-1,1]$: On peut utiliser comme paramétrisation : $z = x$, avec $x \in [-1,1]$. Ce qui donne $dz = dx$ et par conséquent :

$$\int_{[-1,1]} z^2 dz = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

soit

$$\int_{[-1,1]} z^2 dz = \frac{2}{3} \tag{2}$$

Sur γ : On peut utiliser comme paramétrisation : $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0,\pi]$. Ce qui donne $dz = ie^{i\theta}d\theta$ et par conséquent :

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi ie^{3i\theta} d\theta = \left[\frac{1}{3}e^{3i\theta}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}e^{3i\pi} - \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3};$$

soit

$$\int_\gamma z^2 dz = -\frac{2}{3} \tag{3}$$

En substituant (2) et (3) dans (1), on obtient finalement :

$$\oint_C z^2 dz = 0,$$

comme il fallait le prouver.
— On peut prédire ce résultat sans calculs en utilisant le théorème intégrale de Cauchy, selon lequel :

> L'intégrale sur un chemin fermé d'une fonction holomorphe à l'intérieur et sur le chemin en question est nulle.

Ici la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (car f est un polynôme) ; en particulier, f est holomorphe sur et à l'intérieur du chemin fermé C.

Exercice 2 (5 points)
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique :

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

où $z = x + iy$, $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$.
On donne :

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - x + 3y + 5.$$

1. Déterminer $u(x, y)$ sachant que $f(1) = 5 + 5i$.
2. Ecrire $f(z)$ en fonction de z.

Solution :
1) La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle satisfait les conditions de Cauchy-Riemann, qui sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{I}$$

On a $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y - 1$ et $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2y + 4x + 3$. D'où :

$$(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -2y + 4x + 3 & \text{......(4)} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2x - 4y + 1 & \text{......(5)} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x, y) = \int (-2y + 4x + 3) dx \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x, y) = -2xy + 2x^2 + 3x + c(y) \qquad \text{......(6)} \end{aligned}$$

(où $c(y)$ est une fonction de y).
En substituant (6) dans (5), on obtient :

$$-2x + c'(y) = -2x - 4y + 1.$$

Ce qui donne :

$$c'(y) = -4y + 1.$$

D'où :

$$c(y) = \int (-4y + 1) dy = -2y^2 + y + k \quad \text{(avec } k \in \mathbb{R}\text{)}.$$

En substituant ceci dans (6), on obtient :

$$u(x, y) = -2xy + 2x^2 + 3x - 2y^2 + y + k \tag{7}$$

Il nous reste maintenant à déterminer la constante réelle k en se servant de la condition $f(1) = 5+5i$. On a :

$$\begin{aligned} f(1) = 5+5i &\iff u(1,0) + i\,v(1,0) = 5+5i \\ &\iff \begin{cases} u(1,0) = 5 \\ v(1,0) = 5 \end{cases} . \end{aligned}$$

L'égalité $v(1,0) = 5$ est visiblement vérifiée. L'égalité $u(1,0) = 5$ équivaut (en utilisant (7)) à : $5+k = 5$, ce qui donne :

$$k = 0.$$

En substituant ceci dans (7), on obtient finalement :

$$\boxed{u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 2xy + 3x + y} .$$

2) On a pour $z = x+iy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + i\,v(x,y) \\ &= (2x^2 - 2y^2 - 2xy + 3x + y) + i(x^2 - y^2 + 4xy - x + 3y + 5) \\ &= (2x^2 - 2y^2 + 4ixy) + (-2xy + ix^2 - iy^2) + (3x + 3iy) + (y - ix) + 5i \\ &= 2(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 3(x+iy) - i(x+iy) + 5i \\ &= 2z^2 + iz^2 + 3z - iz + 5i \\ &= (2+i)z^2 + (3-i)z + 5i. \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = (2+i)z^2 + (3-i)z + 5i} .$$

Exercice 3 (6 points)

Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions suivantes autour du point singulier indiqué et préciser la nature du point singulier en question.

1. $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2}$; $\quad z_0 = 0.$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$; $\quad z_0 = 0.$
3. $f(z) = z^3 \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; $\quad z_0 = 0.$

Solution :

1) Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto e^z$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \tag{8}$$

En substituant z par $-z$ dans ce développement, on obtient le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto e^{-z}$ au voisinage de 0 :

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \tag{9}$$

En utilisant (8) et (9), on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}(e^z + e^{-z} - 2) \\ &= \frac{1}{z^2}\left\{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) - 2\right\} \\ &= \frac{1}{z^2}\left(2\frac{z^2}{2!} + 2\frac{z^4}{4!} + 2\frac{z^6}{6!} + \dots\right) \\ &= \frac{2}{2!} + \frac{2}{4!}z^2 + \frac{2}{6!}z^4 + \dots, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(z) = \frac{2}{2!} + \frac{2}{4!}z^2 + \frac{2}{6!}z^4 + \dots} \, ,$$

qui est le développement en série de Laurent de f autour de $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale[1] de ce développement est nulle ; ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité éliminable (ou fausse singularité) de f.

Remarque : Une autre façon de voir que $z_0 = 0$ est une fausse singularité de f consiste à montrer que la limite $\lim_{z \to 0} f(z)$ existe et qu'elle est finie. Cette limite présente une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$; on peut la calculer très facilement en utilisant la règle de l'Hôpital deux fois successivement. En effet, on a :

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(e^z + e^{-z} - 2)'}{(z^2)'} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^{-z}}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{(e^z - e^{-z})'}{(2z)'} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1.$$

Ce qui entraîne que $z_0 = 0$ est une fausse singularité de f.

2) Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Il suffit de diviser les deux membres de cette identité sur z pour obtenir :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots} \, ,$$

qui est le développement en série de Laurent de f autour du point singulier $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale de ce développement comporte un nombre fini de termes (juste un terme) ; la plus petite puissance de $z - z_0 = z$, figurant dans cette partie, étant $\alpha = -1$. Ceci montre que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 (càd un pôle simple) de f.

Remarque : Une autre façon de voir que $z_0 = 0$ est un pôle simple de f consiste à montrer que la limite $\lim_{z\to 0} z f(z)$ existe, qu'elle est finie et non nulle. On obtient effectivement $\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z+1} = 1 \in \mathbb{C}^*$; d'où $z_0 = 0$ est un pôle simple de f.

3) Le développement en série de Taylor de la fonction $z \mapsto \sin z$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

En substituant dans ce développement z par $\frac{1}{z}$, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto \sin(\frac{1}{z})$ autour de son point singulier $z_0 = 0$; soit

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots$$

En multipliant finalement les deux membres de cette dernière identité par z^3, on obtient :

$$\boxed{f(z) = z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5! z^2} - \frac{1}{7! z^4} + \dots} \, ,$$

qui est le développement en série de Laurent de f autour du point singulier $z_0 = 0$.
On constate que la partie principale de ce développement comporte une infinité de termes ; ce qui montre que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f.

Remarque : Une autre façon de voir que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f consiste à montrer que la limite $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} z^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ n'existe pas. Pour ce faire, on peut faire tendre z vers 0 suivant deux directions différentes de sorte à obtenir deux limites différentes, ce qui conclura à l'inexistence de la limite en question[2] (on prendra par exemple z sur l'axe des nombres réels puis sur l'axe des nombres imaginaires

1. C'est-à-dire la partie comportant les puissances strictement négatives de $z - z_0 = z$.
2. En effet, si la limite en question existe, elle est forcément unique.

pures).

Exercice 4 (6 points)
Soit f la fonction d'une variable complexe définie par :

$$f(z) = \frac{z-2}{3z^2+4z-4}.$$

1. Déterminer le domaine d'holomorphie de f.
2. Donner les points singuliers de f en précisant la nature de chacun d'entre eux.
3. Soit C le cercle défini par : $|z-i| = 2$, orienté positivement. Calculer par la méthode de votre choix l'intégrale curviligne :
$$\oint_C f(z)dz.$$

Solution :
1) Comme f est une fonction rationnelle alors son domaine d'holomorphie coïncide avec son domaine de définition $\mathscr{D}_f$. On a :
$$\mathscr{D}_f = \{z \in \mathbb{C} : 3z^2 + 4z - 4 \neq 0\}.$$
Résolvons l'équation de second degré : $3z^2 + 4z - 4 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = 4^2 - 4(3)(-4) = 16 + 48 = 64.$$

L'équation possède donc deux racines complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{-4+8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$z_2 = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{-4-8}{6} = \frac{-12}{6} = -2.$$

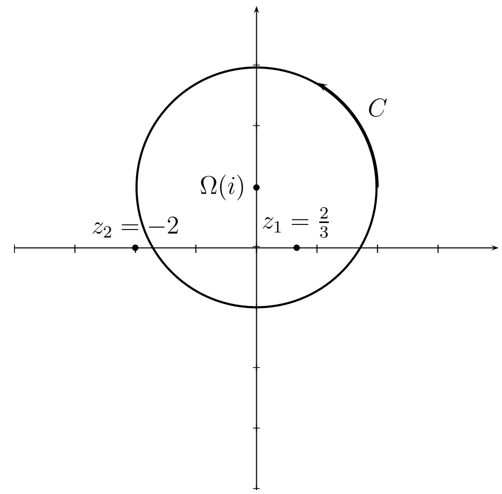
D'où :
$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{2}{3}\ ;\ -2\right\}},$$
ce qui est le domaine d'holomorphie de f.

2) Les points singuliers de f sont les points où f n'est pas définie. Ce sont donc les points : $z_1 = \frac{2}{3}$ et $z_2 = -2$. Pour déterminer la nature de chacun de ces deux points singuliers, on se sert de la factorisation du trinôme $(3z^2 + 4z - 4)$ en :
$$3z^2 + 4z - 4 = 3(z - z_1)(z - z_2) = 3\left(z - \frac{2}{3}\right)(z+2).$$

<u>Nature du point singulier $z_1 = 2/3$:</u>
On a : $f(z) = \dfrac{z-2}{3z^2+4z-4} = \dfrac{z-2}{3(z-2/3)(z+2)} = \dfrac{g(z)}{z-\frac{2}{3}}$, avec $g(z) := \dfrac{z-2}{3(z+2)}$.
Comme $g(2/3) = \dfrac{2/3-2}{3(2/3+2)} \neq 0$ alors $z_1 = \frac{2}{3}$ est un pôle d'ordre 1 (càd un pôle simple) de f.

<u>Nature du point singulier $z_2 = -2$:</u>
On a : $f(z) = \dfrac{z-2}{3z^2+4z-4} = \dfrac{z-2}{3(z-2/3)(z+2)} = \dfrac{h(z)}{z+2}$, avec $h(z) := \frac{z-2}{3(z-2/3)} = \frac{z-2}{3z-2}$.
Comme $h(-2) = \frac{-2-2}{3(-2)-2} \neq 0$ alors $z_2 = -2$ est un pôle d'ordre 1 (càd un pôle simple) de f.

3) On donnera deux méthodes pour évaluer l'intégrale curviligne $\oint_C f(z)dz$, où C étant le cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 2, orienté positivement. La première méthode utilise le théorème des résidus alors que la seconde utilise la formule intégrale de Cauchy. On préférera tout de même la première méthode à la seconde car d'une part elle est plus pratique et d'autre part elle s'applique à des situations plus générales.



1$^{\text{ère}}$ méthode : (on utilise le théorème des résidus)
Le seul point singulier de f qui se trouve à l'intérieur de C est $z_1 = \frac{2}{3}$. De plus, f est holomorphe à l'intérieur de C (et sur C) sauf en $z_1 = \frac{2}{3}$. D'après le théorème des résidus, on a :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f; \frac{2}{3}\right).$$

Comme $z_1 = \frac{2}{3}$ est un pôle simple de f, on a :

$$\operatorname{Res}\left(f; \frac{2}{3}\right) = \lim_{z \to \frac{2}{3}} \left(z - \frac{2}{3}\right) f(z) = \lim_{z \to \frac{2}{3}} \left(z - \frac{2}{3}\right) \frac{z-2}{3\left(z - \frac{2}{3}\right)(z+2)} = \lim_{z \to \frac{2}{3}} \frac{z-2}{3(z+2)} = \frac{\frac{2}{3} - 2}{3(\frac{2}{3} + 2)} = \frac{-4/3}{8}$$
$$= -\frac{1}{6}.$$

D'où l'on tire :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = \boxed{-\frac{\pi i}{3}}.$$

2$^{\text{nde}}$ méthode : (on utilise la formule intégrale de Cauchy)
On a $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - \frac{2}{3}}$, avec $g(z) := \frac{z-2}{3(z+2)}$. Comme g est une fonction rationnelle bien définie à l'intérieur de C et sur C alors g est holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Le point $z_1 = \frac{2}{3}$ étant à l'intérieur de C. On a donc d'après la formule intégrale de Cauchy :

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z - \frac{2}{3}} dz,$$

soit

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz.$$

Ce qui donne finalement : $\displaystyle\oint_C f(z)dz = \boxed{-\frac{\pi i}{3}}$.

FIN