

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abderrahmane MIRA (Béjaia)
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Polycopié du Cours

Théorie du Signal

Cours de 2^{ème} année (ST)

Réalisé par :

Dr. ABDELLI Radia

Maitre de conférences à l'université de Béjaia

2017

Table des matières

Introduction.....	5
I. Généralités sur les signaux	
I.1. Introduction.....	6
• Définition d'un signal.....	6
• Définition d'un système.....	6
• Exemple.....	6
I.2. Classification des systèmes.....	7
• Système continu ou discret.....	7
• Système causal.....	8
• Système linéaire.....	8
• Système à temps invariant.....	9
• Système EBSB (stable).....	9
I.3. Classification des signaux.....	10
• Signaux pairs et impairs.....	10
• Signaux déterministes et aléatoires.....	11
I.4. Propriétés de l'impulsion de Dirac.....	13
I.5. Energies et puissances.....	14
• Signaux à énergie finie.....	14
• Signaux à puissance moyenne finie.....	14
I.6. Conclusion.....	15
I.7. Exercices.....	15
II. Convolution et Déconvolution	
II.1. Introduction.....	16
• Définition de réponse indicielle.....	16
• Définition de la réponse impulsionnelle.....	16
II.2. Produit de convolution (réponse d'un système à une entrée quelconque).....	16
II.3. Propriétés du produit de convolution.....	19
II.4. Explication graphique du produit de convolution.....	19
II.5. Exemple de calcul du produit de convolution.....	22

II.6. Déconvolution.....	22
II.6.1. Méthode des transformées de Fourier.....	22
II.6.2. Identification directe.....	23
II.7. Conclusion.....	23
II.8. Exercices.....	23

III. Transformée de Laplace

III.1. Introduction.....	24
III.2. Présentation de la Transformée de Laplace.....	24
III.3. Propriétés de la Transformée de Laplace.....	25
III.4. table des Transformées de Laplace.....	26
III.5. Exemple d'application sur les circuits électriques.....	27
• Application.....	27
• Solution.....	28
III.6. Les systèmes et la Transformée de Laplace (Notion de la fonction de transfert)...	28
III.7. Transformée de Laplace inverse.....	28
• Décomposition en fractions simples.....	29
• Exemple 1.....	29
• Exemple 2.....	30
III.8. Notion de région de convergence.....	31
III.9. Région de convergence-stabilité-causalité.....	33
III.10. Conclusion.....	33
III.11. Exercices.....	33

IV. Analyse fréquentielle

IV.1. Introduction.....	34
IV.2. Rappels.....	34
IV.3. Représentation d'un signal.....	35
• Exemple 1.....	35
• Exemple 2.....	36
IV.4. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier.....	37
• Condition de convergence des séries de Fourier (Conditions de Dirichlet).....	38
• Propriétés des coefficients de Fourier.....	39

IV.5. Théorème de Parseval.....	39
IV.6. Représentation trigonométrique de la série de Fourier.....	39
IV.7. Spectre d'amplitude et de phase.....	40
IV.8. Remarques importantes.....	40
IV.9. Analyse fréquentielle des signaux aperiodiques.....	42
IV.10. Exemple de calcul de la TF.....	43
IV.11. Conditions d'existence de la TF.....	45
IV.12. Table des Transformées de Fourier.....	45
IV.13. Propriétés de la Transformée de Fourier.....	46
IV.14. Réponse fréquentielle d'un système LTI (filtrage linéaire).....	48
• Exemple.....	49
• Solution.....	49
IV.15. Conclusion.....	50
IV.16. Exercices.....	50

V. Energies et puissances des signaux

V.1. Introduction.....	51
V.2. Puissance temporelle d'un signal.....	51
V.3. Puissance fréquentielle d'un signal (densité spectrale).....	52
V.4. Autocorrélation et Intercorrélation des signaux.....	53
V.4.1. Propriétés de la fonction d'autocorrélation.....	53
V.4.2. Remarque importante.....	54
V.5. Conclusion.....	54
V.6. Exercices.....	55

VI. Echantillonnage et systèmes discrets

VI.1. Introduction à l'échantillonnage.....	55
VI.2. Système échantillonné.....	56
VI.3. Choix de la fréquence d'échantillonnage (Théorème de Shannon).....	58
VI.4. Reconstitution d'un signal échantillonné.....	59
VI.5. Transformée en Z.....	61
VI.6. Propriétés de la Transformée en Z.....	62
VI.7. Table des Transformées en Z.....	63

VI.8. Résolution des équations récurrentes.....	64
VI.9. Transmittance en présence d'un bloqueur d'ordre zéro.....	64
VI.10. Stabilité des systèmes échantillonnés.....	64
VI.11. Conclusion.....	65
VI.12. Exercices.....	65
Conclusion.....	66
Références.....	67

Introduction

Le cours « Traitement du signal » est un cours de Mathématique de base qui fait partie de l'unité fondamentale UEF 222, il est destiné aux étudiants de la 2ème année Sciences et Technologie du département Génie Electrique (Faculté de Technologie). L'enseignement est dispensé en 2ème année au cours du deuxième semestre, assuré par Mme ABDELLI Radia, enseignant chercheur (Maître de Conférences) au sein de l'université de Bejaia.

Diverses disciplines du Génie électrique nécessitent l'utilisation de notions mathématiques spécifiques. En physique, toute grandeur évolue au cours du temps de façon quelconque. Elle peut alors être représentée par une fonction de la variable réelle t qui représente le temps. Cependant dans bien des cas on préfère caractériser ces fonctions par le biais de transformations de variables. Ce cours est une introduction aux divers types de transformées que l'on rencontre, à savoir :

- Les différentes notions de la théorie du signal (produit de convolution, impulsion de Dirac, fonctions usuelles,...)
- La transformation de Laplace, principalement utilisée en automatique
- La transformation de Fourier, utilisée en traitement du signal électronique
- La transformée en Z qui permet de représenter et d'analyser les signaux numériques

I. Généralités sur les signaux

I.1. Introduction

Dans cette première partie de ce cours, on présente la définition de certaines notions de base.

- **Définition d'un signal**

Un signal est une fonction représentant une variable qui peut être le temps (en général).
Le signal $x(t)$ peut être une tension, une température, ...etc.

- **Définition d'un système**

Un système est un processus physique représenté par un modèle mathématique ou tout simplement un modèle théorique.

Le système peut être un circuit électrique, équation chimique, moteur électrique, ...etc.

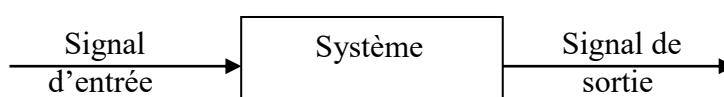


Figure I.1. Systèmes et signaux d'entrée et de sortie

- **Exemple**

Soit le circuit électrique suivant :

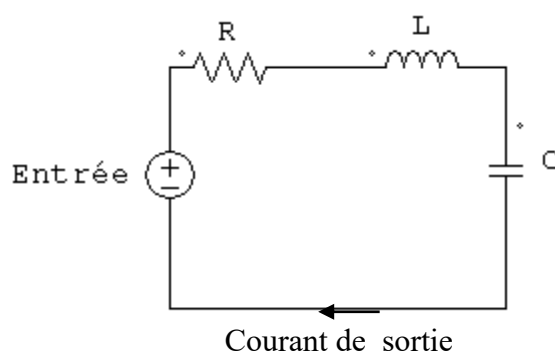


Figure I.2. Système électrique

La relation entre l'entrée et la sortie est donnée par le modèle du système.

I.2. Classification des systèmes

Un système peut être :

- Continu ou discret.
- Causal ou non causal.
- Linéaire ou non linéaire.
- A temps invariant ou à temps variant.
- Stable ou instable.
- A énergie ou à puissance moyenne finie.

➤ Système continu ou discret

Un système est dit continu si son entrée et sa sortie sont continues et il est discret si son entrée et sa sortie sont discrètes.

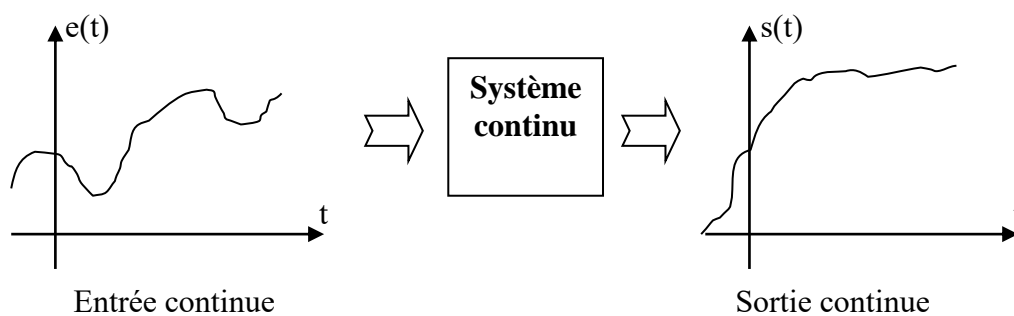


Figure I.3. Système continu

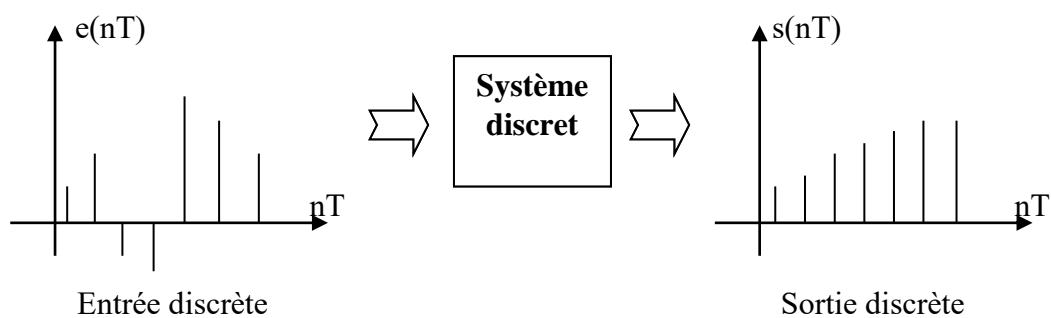


Figure I.4. Système discret

➤ Système causal

Un système est dit causal si la sortie $y(t)$ à l'instant initial $t = t_0$ dépend uniquement de l'entrée aux instants $t \leq t_0$. C'est-à-dire que la sortie à un instant donné ne peut pas dépendre de l'entrée $x(t)$ dans le futur.

Dans le cas contraire, le système est dit non causal.

Exemple :

$y(t) = ax(t+5)$ est un signal non causal.

Remarque

Les systèmes réalisables pratiquement sont causaux.

➤ Système linéaire

Un système est dit linéaire si les deux principes suivants sont satisfaits :

- Principe de superposition

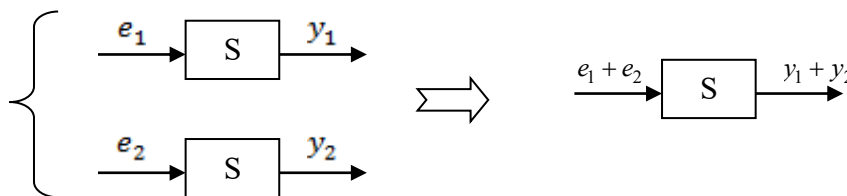


Figure I.5. Système linéaire

Si nous avons :

$$\begin{cases} y_1(t) = S(e_1(t)) \\ y_2(t) = S(e_2(t)) \end{cases} \Rightarrow (y_1 + y_2)(t) = S(e_1(t) + e_2(t)) \quad \mathbf{I-1}$$

Nous avons aussi :

$$y_1(t) = S(e_1(t)) \Rightarrow S(\lambda e_1(t)) = \lambda y_1(t) \quad \mathbf{I-2}$$

Donc en résumé :

$$S(ae_1(t) + be_2(t)) = aS(e_1(t)) + bS(e_2(t)) \quad \mathbf{I-3}$$

- Exemple

Un système est décrit par l'équation suivante donnant la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée

$$x(t) : y(t) = 3x(t) + 4 \quad \text{I-4}$$

$$\text{On aura : } \begin{cases} y_1(t) = 3x_1(t) + 4 \\ y_2(t) = 3x_2(t) + 4 \end{cases} \quad \text{I-5}$$

$$y_1(t) + y_2(t) = 3(x_1(t) + x_2(t)) + 8 \neq 3(x_1(t) + x_2(t)) + 4$$

Donc : le système est **non linéaire**.

➤ Système à temps invariant

Un système est à temps invariant lorsqu'une translation du signal d'entrée (retard ou avancement) se traduit par la même translation du signal de sortie.

$$S[x(t-\tau)] = y(t-\tau) \quad \text{I-6}$$

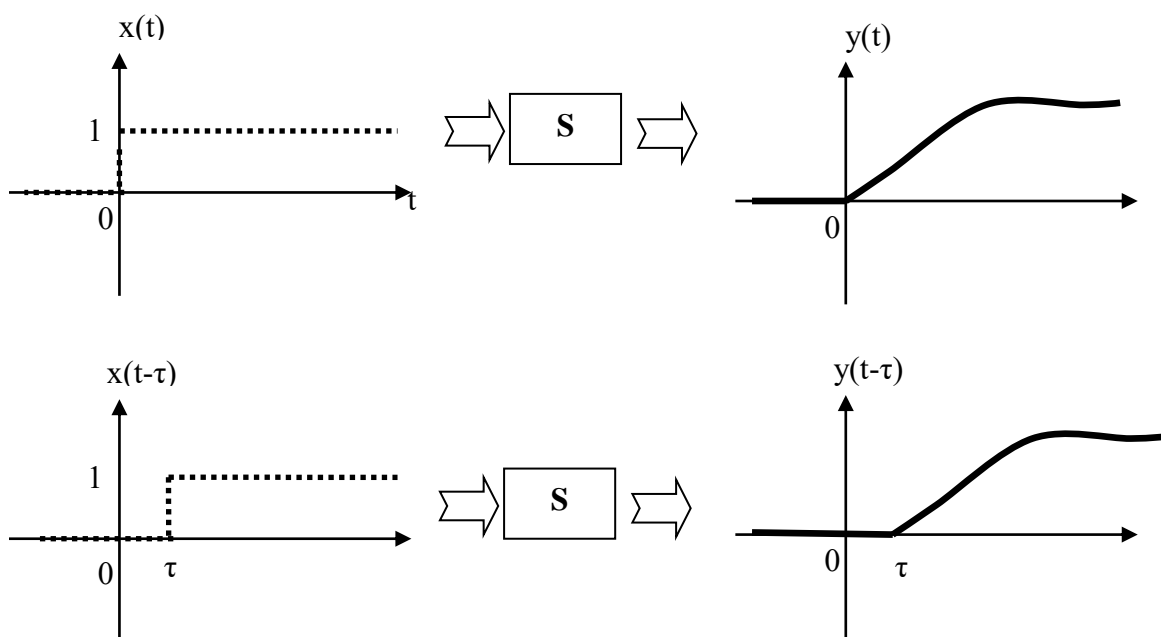


Figure I.6. Système à temps invariant

➤ Système EBSB (stable)

Un système est dit EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée) « **stable** » si pour n'importe quel signal borné $x(t)$ tel que $|x(t)| < k_1$, nous avons une sortie bornée $y(t)$ telle que :

$$|y(t)| < k_2, \{k_1, k_2\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{I-7}$$

Une autre définition de stabilité (la plus connue) est :

Un système est stable si et seulement si, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir.

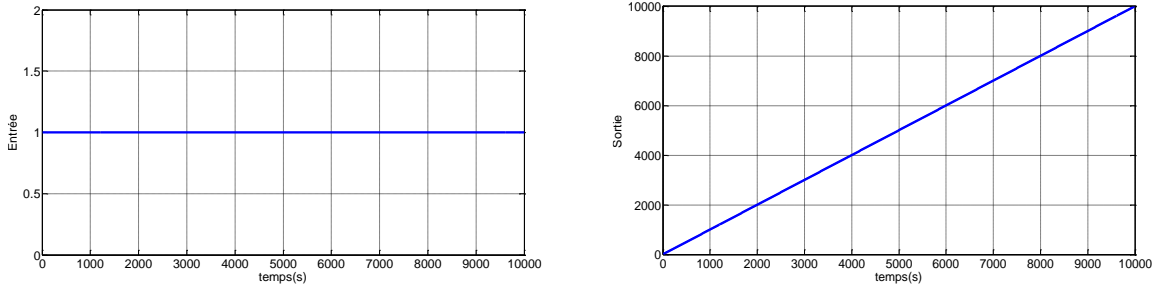


Figure I.7. Entrée-Sortie d'un système instable

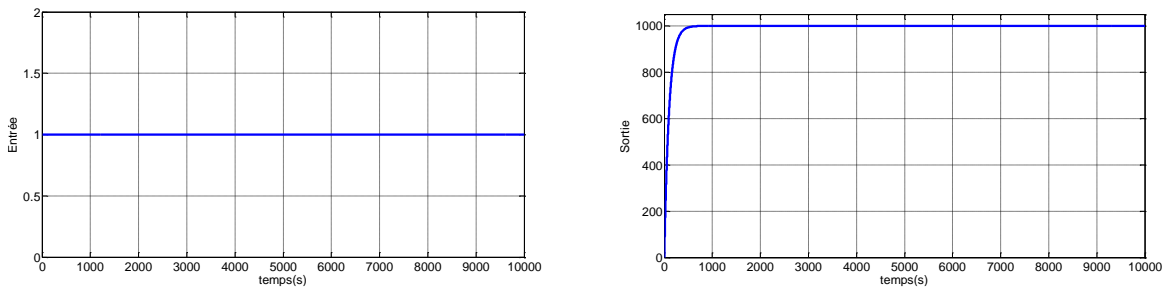


Figure I.8. Entrée-sortie d'un système stable

I.3. Classification des signaux

➤ **Signaux pairs et impairs**

Un signal pair est déterminé par :

$$x(-t) = x(t)$$

I-8

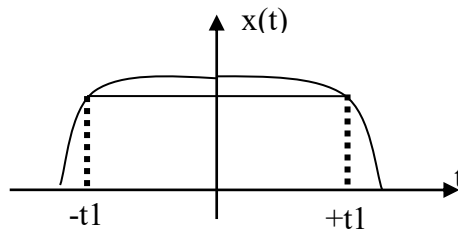


Figure I.9. Signal pair

Un signal est impair lorsque :

$$x(-t) = -x(t)$$

I-9

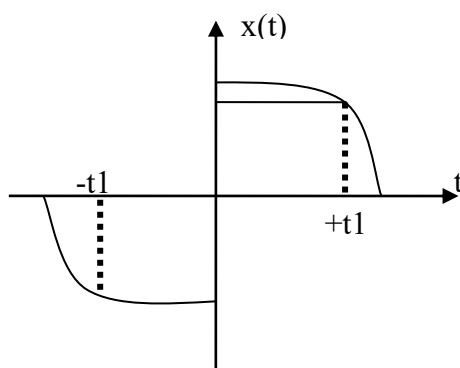


Figure I.10. Signal impair

➤ Signaux déterministes et aléatoires

• Signal aléatoire

Un signal aléatoire (processus stochastique) est un signal dont on ne peut prédire le comportement (allure).

- Exemple :

Un simple exemple d'un signal aléatoire est le bruit blanc (white noise).

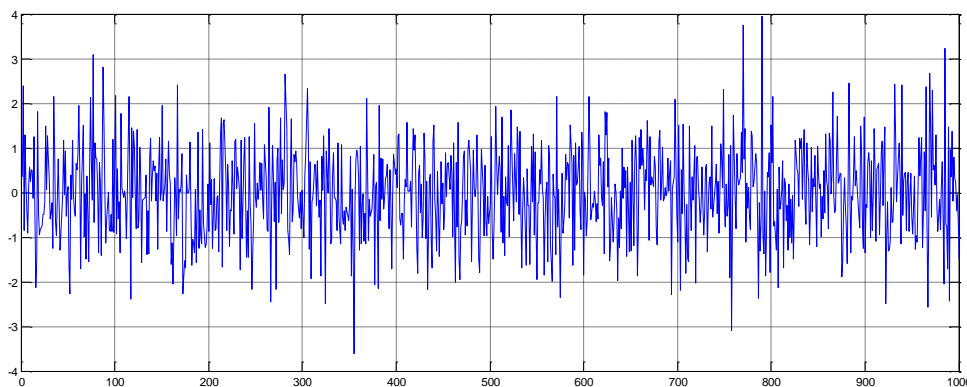


Figure I.11. Bruit blanc (White noise)

• Signal déterministe

Un signal déterministe représente une information dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique (au contraire d'un signal aléatoire stochastique).

Nous présentons dans cette section quelques fonctions mathématiques qui sont des signaux élémentaires seront utilisées tout au long de ce cours.

Echelon unitaire :

Le signal « échelon unitaire » est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{I-10}$$

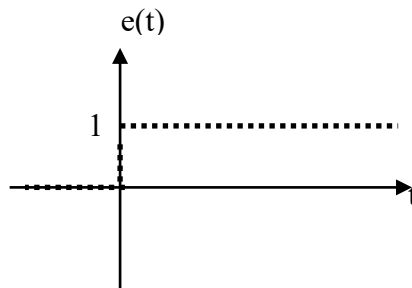


Figure I.12. Echelon unitaire

Signal rectangulaire :

$$\text{rect}_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{I-11}$$

$$\text{rect}_a(t) = e(t+a) - e(t-a)$$

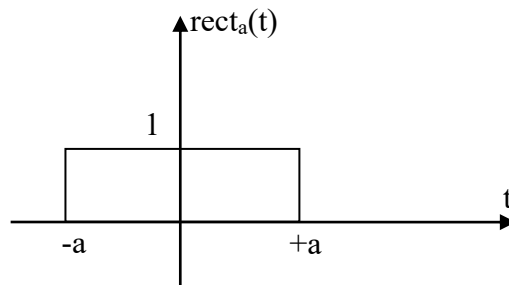


Figure I.13. Signal rectangulaire

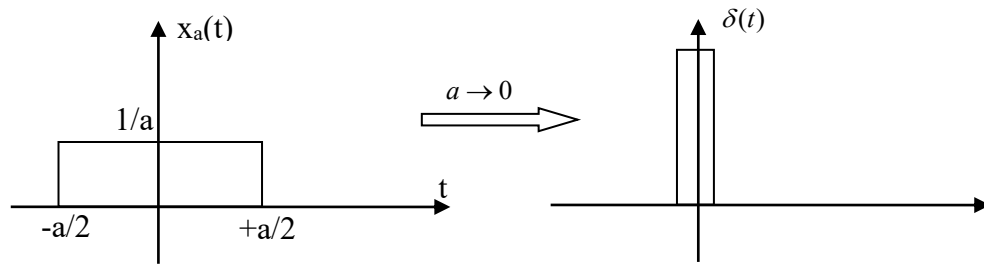
Impulsion de Dirac

Soit le signal :

$$x_a(t) = \frac{1}{a} \text{rect}_{a/2}(t) \quad \text{I-12}$$

On définit alors le signal « impulsion de Dirac », $\delta(t)$, tel que :

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} \text{rect}_{a/2}(t) \right) \quad \text{I-13}$$



Cette impulsion est représentée par :

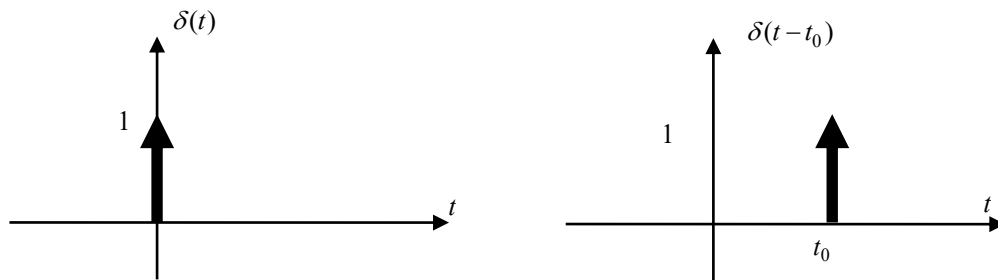


Figure I.14. Impulsion de Dirac

Sur la dernière figure, la valeur « 1 » correspond à l'aire sous la courbe et pas à la hauteur qui est infinie, la fonction de Dirac est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 = e(t) \quad \text{I-14}$$

On dit que l'échelon $e(t)$ est la primitive de $\delta(t)$ ou bien que $\delta(t)$ est la dérivée de $e(t)$ au sens des distributions.

L'impulsion de Dirac est un signal non réalisable physiquement, on tend à modéliser une impulsion de Dirac par un signal rectangulaire dont la largeur tend vers 0 et l'amplitude vers l'infini.

I.4. Propriétés de l'impulsion de Dirac

Le signal de Dirac possède les propriétés suivantes :

- $\delta(t) = 0, si : t \neq 0$ I-15

- $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$ I-16

- $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$ I-17

- $\delta(aT) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ I-18

I.5. Energies et puissances

Les signaux peuvent être classés selon leurs énergies et puissances, et on peut trouver des:

- **Signaux à énergie finie**

On dit qu'un signal $x(t)$ est à énergie finie si la condition suivante est satisfaite :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad \text{I-19}$$

Les signaux à énergie finie s'appellent aussi des « signaux de carré sommable » ou des « signaux de carré intégrable ».

Un exemple d'un signal à énergie finie est le signal :

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \text{I-20}$$

En calculant l'intégrale de l'énergie, on trouve :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} dt = T \quad \text{I-21}$$

Remarque : les signaux à énergie finie sont à puissance moyenne nulle.

- **Signaux à puissance moyenne finie**

Un signal $x(t)$ est à puissance moyenne finie si :

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad \text{I-22}$$

Cette définition exclut le cas des signaux à puissance moyenne nulle, qui correspondent à des signaux à énergie finie.

Le signal $x(t) = \sin \omega t$ est un signal à puissance moyenne finie sur \mathbb{R} , car:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (\sin \omega t)^2 dt \quad \text{I-23}$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{1}{2} \quad \text{I-24}$$

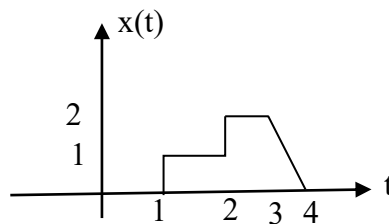
Ce signal n'est pas à énergie finie car le calcul de l'intégrale d'énergie diverge (tend vers l'infini).

I.6. Conclusion

Dans cette partie, les notions de base ainsi que les classifications possibles sur les signaux et les systèmes sont présentées en vue d'initier la compréhension du reste du cours.

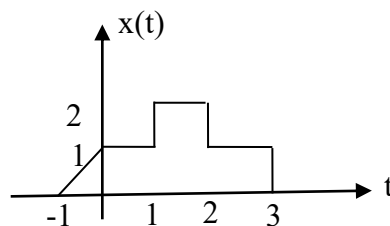
I.7. Exercices

1. Soit le signal $x(t)$ représenté par la figure suivante, représenter les signaux suivants :
 $x(t-1)$, $x(t+1)$, $x(2t)$, $x(0.5t)$, $x(-t)$, $x(1-2t)$.



2. Soit le signal représenté par la figure ci-dessous, représenter les signaux suivants :

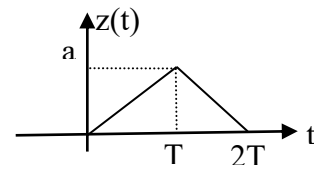
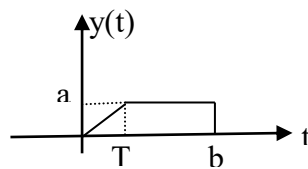
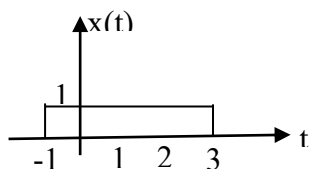
$$e(t)x(t), e(t-2)x(t), e(-t)x(t), \delta(t)x(t), \delta(t-3)x(t)$$



3. Trouver la composante paire et impaire du signal :

$$x(t) = \frac{1+t}{1+t^2}$$

4. Donner l'expression des signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de t et $e(t)$.



5. Simplifier les expressions suivantes :

$$x(t) = (t^2 - 2t + 3)\delta(t)$$

$$y(t) = (\cos t + 4t)\delta(t)$$

$$I1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 \cos 3t + 5)\delta(t)dt$$

$$I2 = \int_2^4 t\delta(t)dt$$

II. Convolution et Déconvolution

II.1. Introduction

Ce deuxième chapitre traite les relations entre les signaux et les systèmes, entre les entrées des systèmes et leurs sorties, ...etc.

Avant de commencer, deux définitions importantes sont à présenter :

- **Définition de la réponse indicielle**

La réponse indicielle est la réponse d'un système dont l'entrée est un échelon.

- **Définition de la réponse impulsionnelle**

La réponse impulsionnelle est la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac. Elle permet de caractériser les systèmes linéaires dans le domaine temporel.

II.2. Produit de convolution (réponse d'un système à une entrée quelconque)

Soit $x(t)$: l'entrée à un système (S) linéaire et invariant dans le temps et dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$ et $y(t)$ est la sortie de (S) à l'entrée $x(t)$.

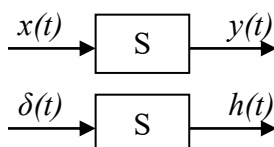


Figure II.1. Présentation d'un système LTI

Le signal $x(t)$ peut être représenté par une somme infinie de composantes $x(\tau)$ sur une base d'impulsions de Dirac comme suit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad \text{II-1}$$

On pose (f), l'application dans le temps qui donne la sortie du système (S) à l'entrée $x(t)$, c'est-à-dire :

$$f : x(t) \mapsto y(t) = f(x(t)) \quad \text{II-2}$$

Nous aurons donc :

$$y(t) = f(x(t)) = f\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right) \quad \text{II-3}$$

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(\tau)\delta(t-\tau))d\tau \quad \text{II-4}$$

Puisque l'application (f) n'a aucune relation avec la variable τ , cette dernière n'est qu'une variable muette qui disparaît lors de l'intégration, on peut écrire :

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)f(\delta(t-\tau))d\tau \quad \text{II-5}$$

Rappelons que la réponse impulsionnelle est la réponse du système (S) avec l'application f à une entrée de type Dirac, donc :

$$f(\delta(t-\tau)) = h(t-\tau) \quad \text{II-6}$$

On trouvera donc :

$$y(t) = f(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{II-7}$$

On définit donc le produit de convolution :

Si le système est LTI, nous avons :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad \text{II-8}$$

$$\text{Donc : } y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{II-9}$$

Le produit de convolution

Si les deux fonctions sont discrètes, on parle de « mesures de comptages », et nous aurons la somme suivante :

$$y(n) = (x * S)(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)S(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(n-i)S(i) \quad \text{II-10}$$

Pour un système linéaire à temps invariant, on peut construire la sortie (y) correspondante à toute entrée (x) en convoluant celle-ci par la réponse impulsionnelle : pour cela, on discrétise l'entrée (x) suivant le pas de temps choisi, ce qui la transforme en une suite de paliers ($x(0), x(1), \dots, x(n)$) ; la réponse impulsionnelle (S) va aussi être discrétisée avec le même pas de temps ($S(0), S(1), \dots, S(n)$).

On peut alors considérer chaque palier (i) de l'entrée comme une impulsion non plus unitaire mais d'amplitude ($x(i)$), il lui correspond une réponse qui est $x(i)S(0), \dots, x(i)S(n)$. Pour avoir la sortie, il faut suivre les sommes données par les équations suivantes :

Pour les systèmes physiques, si on prend la somme suivante :

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)S(n-i) \quad \text{II-11}$$

Pour les systèmes physiques, les indices i et n doivent commencer par la valeur « 0 », on aura donc :

$$y(n) = \sum_{i=0}^n x(i)S(n-i) \quad \text{II-12}$$

On trouve alors l'ensemble d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = x(0) \cdot S(0) \\ y(1) = x(0) \cdot S(1) + x(1) \cdot S(0) \\ y(2) = x(0) \cdot S(2) + x(1) \cdot S(1) + x(2) \cdot S(0) \\ y(3) = x(0) \cdot S(3) + x(1) \cdot S(2) + x(2) \cdot S(1) + x(3) \cdot S(0) \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ y(n) = x(0) \cdot S(n) + x(1) \cdot S(n-1) + x(2) \cdot S(n-2) + \dots + x(n) \cdot S(0) \end{array} \right. \quad \text{II-13}$$

II.3. Propriétés du produit de convolution

$$\bullet \quad x(t) * y(t) = y(t) * x(t) \quad \text{II-14}$$

$$\bullet \quad (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t)) \quad \text{II-15}$$

$$\bullet \quad x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad \text{II-16}$$

$$\bullet \quad x(t) * \delta(t) = x(t) \text{ car } \delta(t) \text{ est l'élément neutre.} \quad \text{II-17}$$

$$\bullet \quad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad \text{II-18}$$

$$\bullet \quad x(t) * e(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad \text{II-19}$$

$$\bullet \quad x(t) * e(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \quad \text{II-20}$$

Le produit de convolution est un produit bilinéaire et commutatif, généralement noté « * », c'est un opérateur qui fait correspondre aux deux fonctions f et g une autre fonction $f * g$ sur le même domaine de définition que f et g .

II.4. Explication graphique du produit de convolution

On peut expliquer le produit de convolution par un simple exemple :

Soit les deux signaux identiques représentés sur la figure ci-dessous :

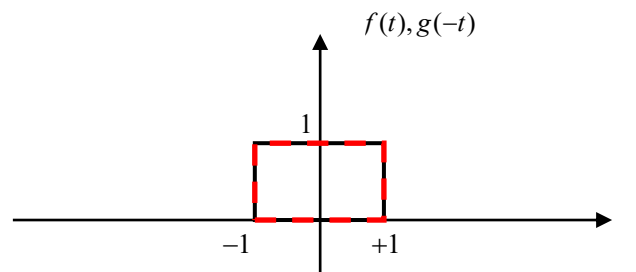


Figure II.2. Présentations de deux signaux rectangulaires identiques et inversés dans le temps

On fait glisser $g(-\tau)$ (le signal en rouge) de $-\infty \rightarrow +\infty$ et on effectue l'intégrale donnant le produit de convolution.

Pour $t = -2$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(-2 - \tau) d\tau = 0 \quad \text{II-21}$$

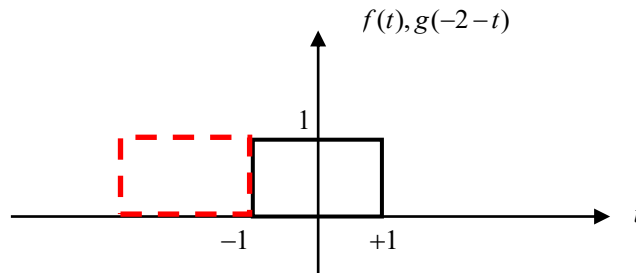


Figure II.3. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-2) unités de temps

Pour $t = -1.5$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(-1.5 - \tau) d\tau = 0.5$$

II-22

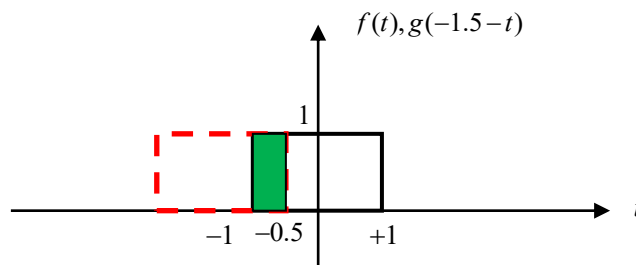


Figure II.4. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-1.5) unités de temps

Pour $t = -1$

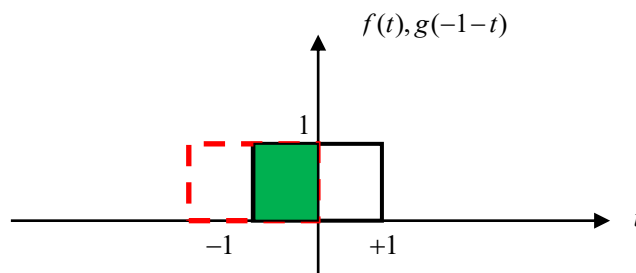


Figure II.5. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (-1) unités de temps

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(-1 - \tau) d\tau = 1$$

II-23

Pour $t = 0$

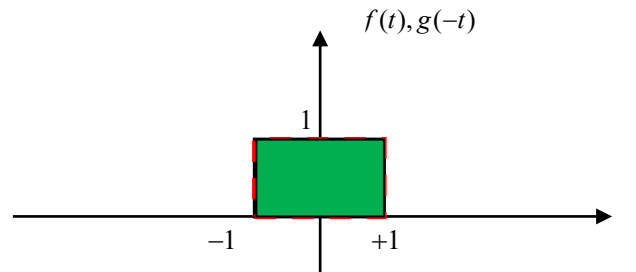


Figure II.6. Deux signaux rectangulaires identiques non décalés

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-\tau)d\tau = 2$$

II-24

On continue jusqu'à pour $t = 2$

$$\cdot (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(2-\tau)d\tau = 0$$

II-25

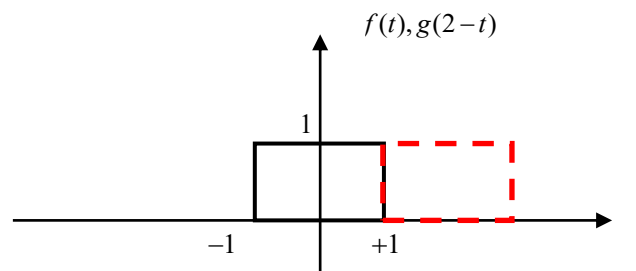


Figure II.7. Deux signaux rectangulaires identiques décalés de (+2) unités de temps

Enfin, on peut donner la fonction « convolution » de ces deux signaux et qui est représentée par la figure suivante :

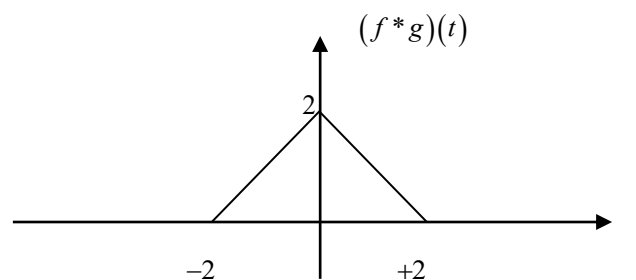


Figure II.8. Fonction de convolution des deux signaux rectangulaires identiques

II.5. Exemple de calcul du produit de convolution

Si on prend :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, g(x) = \frac{1}{x^2 + b} \quad \text{II-26}$$

$$\text{Alors: } (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(x-\tau)^2 + a^2} \cdot \frac{1}{\tau^2 + b} \right] d\tau \quad \text{II-27}$$

Le calcul de cette intégrale est assez compliqué, il est plus facile de passer aux transformées de Laplace et de Fourier où le produit de convolution basé sur une intégrale devient un simple produit arithmétique.

II.6. Déconvolution

La déconvolution est la recherche de la réponse impulsionnelle d'un système à partir d'un historique des mesures de l'entrée et de la sortie.

On propose deux principales méthodes :

II.6.1. Méthode des transformées de Fourier

Dans l'espace des transformées de Fourier, le produit de convolution se transforme en un simple produit.

Soit $Y(\omega)$ la transformée de Fourier de la sortie $y(t)$:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{II-28}$$

On définit aussi $X(\omega), S(\omega)$ qui sont respectivement les transformées de Fourier de l'entrée $x(t)$ et de la réponse impulsionnelle $s(t)$, on a alors :

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot S(\omega) \quad \text{II-29}$$

Donc :

$$S(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad \text{II-30}$$

La réponse impulsionnelle est donc déterminée par la transformée inverse de Fourier de $S(\omega)$.

II.6.2. Identification directe

Il s'agit de la résolution du système linéaire II-6 du paragraphe précédent, obtenu en posant les $(n+1)$ équations qui relient les $(n+1)$ sorties successives aux entrées précédentes, on trouvera sous forme matricielle l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S(1) & S(0) & 0 & \dots & 0 \\ S(2) & S(1) & S(0) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ S(n) & S(n-1) & S(n-2) & \dots & S(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(n) \end{bmatrix} \quad \text{II-31}$$

Ce système linéaire dont les inconnues sont $S(0), S(1), \dots, S(n)$ se résout facilement car la matrice donnant les $S(0), S(1), \dots, S(n)$ est triangulaire.

- **Remarque**

- Cette méthode peut être facilement implantée sur l'ordinateur.
- Toutefois, cette méthode est peu utilisable en pratique à cause de l'influence des perturbations et des bruits et de la relative instabilité numérique.

II.7. Conclusion

Vu la complexité de calcul de l'intégrale de convolution pour la majorité des systèmes physiques (équation II-22), deux chapitres intéressants seront présentés dans les deux prochaines sections et qui permettent de présenter la transformée de Laplace et la transformée de Fourier, elles permettent de transformer l'intégrale de convolution en un simple produit mathématique : ce qui simplifie énormément les calculs.

II.8. Exercices

1. Démontrer les propriétés suivantes :

- $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- $x(t) * e(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

2. Sachant que la réponse d'un système dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$ à une entrée quelconque $e(t)$ est $s(t)$ telle que :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Si $h(t) = e^{-2t}e(t)$, trouver la réponse indicielle de ce système

III. Transformée de Laplace

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier un outil mathématique important, permettant de faciliter l'étude des systèmes continus LTI.

III.2. Présentation de la Transformée de Laplace

Soit $x(t)$ un signal continu, la transformée de Laplace $X(p)$ de $x(t)$ est définie par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad \text{III-1}$$

Avec : $p = \sigma + j\omega$ est un opérateur complexe.

- **Notation**

On note la transformée de Laplace par :

$$X(p) = L(x(t)) \quad \text{III-2}$$

ou

$$x(t) = L^{-1}(X(p)) \text{ ou } x(t) \leftrightarrow X(p) \quad \text{III-3}$$

- **Exemple**

Si le signal à transformer $x(t)$ est un échelon unitaire, c'est-à-dire :

$$x(t) = e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{III-4}$$

La transformée de Laplace $X(p)$ du signal échelon unitaire est donnée par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \quad \text{III-5}$$

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \quad \text{III-6}$$

$$X(p) = \frac{-1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad \text{III-7}$$

Donc : $e(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$

III.3. Propriétés de la transformée de Laplace

Si $X(p)$ est la transformée de Laplace du signal $x(t)$, nous aurons :

- Produit de convolution :

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(p).Y(p) \quad \text{III-8}$$

- Linéarité :

$$ax(t) * by(t) \leftrightarrow aX(p).bY(p) \quad \text{III-9}$$

- Décalage temporel :

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0} X(p) \quad \text{III-10}$$

- Décalage fréquentiel :

$$e^{p_0 t} x(t) \leftrightarrow X(p - p_0) \quad \text{III-11}$$

- Dérivation temporelle :

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow pX(p) - x(0)$$

III-12

$$\frac{d^{(n)}x(t)}{dt^n} \leftrightarrow p^n X(p) - p^{n-1} X(p) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

- Intégration temporelle :

$$\int_0^t x(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{p} X(p) \quad \text{III-13}$$

- Changement d'échelle :

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{p}{a}\right) \quad \text{III-14}$$

- **Remarque**

Pour trouver $\dot{x}(0)$, on dérive le signal $x(t)$ pour trouver $\dot{x}(t)$, et on détermine après $\dot{x}(0)$.

On définit les théorèmes suivants :

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p) \quad \text{III-15}$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \quad \text{III-16}$$

III.4. Table des transformées de Laplace

$x(t)$	$X(p)$
$\delta(t)$	1
$e(t)$	$\frac{1}{p}$
$te(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^k e(t)$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$
$e^{-at} e(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$te^{-at} e(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega_0 t) e(t)$	$\frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)}$
$\sin(\omega_0 t) e(t)$	$\frac{\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) e(t)$	$\frac{p+a}{((p+a)^2 + \omega_0^2)}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t) e(t)$	$\frac{\omega_0}{((p+a)^2 + \omega_0^2)}$
$-e(-t)$	$\frac{1}{p}$
$-e^{-at} e(-t)$	$\frac{1}{p+a}$
$-te^{-at} e(-t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$

Table III.1. Transformée de Laplace

III.5. Exemple d'application sur les circuits électriques

Soit la résistance R suivante :

$$[u(t) = Ri(t)] \leftrightarrow [U(p) = RI(p)] \quad \text{III-17}$$

Soit l'inductance L :

$$\left[u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \right] \leftrightarrow [U(p) = LI(p) - Li(0)] \quad \text{III-18}$$

Avec $i(0)$ est le courant emmagasiné (mesuré) à l'instant initial du fonctionnement de l'inductance.

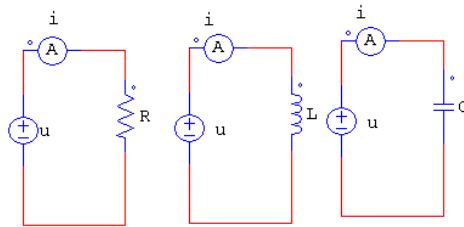


Figure III.1. Exemple de calcul avec la transformée de Laplace (circuits électriques)

Dans le cas d'un condensateur C :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) dt \quad \text{III-19}$$

Donc :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow I(p) = CpU(p) - Cu(0) \quad \text{III-20}$$

Avec : $u(0)$ est la tension de charge initiale du condensateur.

• Application

Dans le cas d'un circuit RC :

L'interrupteur est ouvert, on le ferme à l'instant $t = 0$, nous trouvons $U_c(0) = V_0$.

La tension d'entrée $U_e(t) = e(t)$ est un échelon unitaire.

Trouver la tension $U_c(p)$ aux bornes du condensateur.

- **Solution**

$$U_e(t) = Ri(t) + U_c(t)$$

$$U_e(t) = RC \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) \quad \text{III-21}$$

$$U_e(p) = RC[pU_c(p) - U_c(0)] + U_c(p) = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$U_c(p) = \frac{\frac{1}{p} + RC V_0}{1 + RCp} \quad \text{III-22}$$

III.6. Les systèmes et la transformée de Laplace (notion de la fonction de transfert):

Soit un système continu LTI de réponse impulsionnelle $h(t)$, la sortie du système $y(t)$ à l'entrée $x(t)$ est déterminée par le produit de convolution suivant :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{III-23}$$

En utilisant la transformée de Laplace, on trouve :

$$Y(p) = X(p).H(p) \Rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad \text{III-24}$$

$H(p)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle qu'on appelle **la Fonction de transfert** du système.

III.7. Transformée de Laplace inverse :

Si $X(p)$ est la transformée de Laplace de $x(t)$, alors ; $x(t)$ est **la transformée inverse** de $X(p)$, soit :

$$X(p) = L(x(t)) \Rightarrow x(t) = L^{-1}(X(p)) \quad \text{III-25}$$

La relation donnant la transformée inverse d'un signal $X(p)$ donné dans le domaine de Laplace est :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt} dp \quad \text{avec } c \in \Re \quad \text{III-26}$$

Cette relation n'est généralement pas utilisée, la meilleure méthode donnant facilement la transformée inverse d'un signal $X(p)$ est la **Décomposition en fractions simples**. Cette méthode, en plus de sa simplicité, donne une formule mathématique de la transformée inverse dans le domaine temporel.

- **Décomposition en fractions simples**

$$\text{Soit : } X(p) = k \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} \quad \text{III-27}$$

Avec :

- Les $z_{i(i=1,\dots,m)}$ sont des **zéros** ; les valeurs qui annulent $X(p)$
- Les $p_{i(i=1,\dots,n)}$ sont des pôles ; les valeurs qui annulent le dénominateur de $X(p)$.

On peut classer trois cas selon les valeurs de m et n :

- **Si $m < n$:**

Diviser l'expression de $X(P)$ en fractions simples revient à l'écrire sous la forme suivante :

$$X(p) = \frac{\lambda_1}{p-P_1} + \frac{\lambda_2}{p-P_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{p-P_n} \quad \text{III-28}$$

Avec :

$$\lambda_i = \lim_{p \rightarrow P_i} [(p-P_i)X(p)] \quad \text{III-29}$$

- **Exemple 1:**

$$\text{Soit : } X(p) = \frac{p+1}{p^2+p-2} \quad \text{III-30}$$

On trouve les pôles du dénominateur, et on écrit :

$$X(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \quad \text{III-31}$$

On essaye maintenant d'écrire $X(p)$ en fractions simples sous la forme suivante :

$$X(p) = \frac{\lambda_1}{p-1} + \frac{\lambda_2}{p+2} \quad \text{III-32}$$

On calcule les valeurs des variables λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \lim_{p \rightarrow 1} \left[(p-1) \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \right] = \frac{2}{3} \quad \text{III-33}$$

$$\lambda_2 = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\cancel{(p+2)} \frac{p+1}{(p-1)\cancel{(p+2)}} \right] = \frac{1}{3}$$
III-34

Dans le cas où p_i est un pole multiple de multiplicité r c'est-à-dire :

$$X(p) = k \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_i)^r}$$
III-35

La division de $X(p)$ en fractions simples est donnée sous la forme suivante :

$$X(p) = \frac{\lambda_1}{p-p_i} + \frac{\lambda_2}{(p-p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(p-p_i)^r}$$
III-36

Avec :

$$\lambda_{r-k} = \lim_{p \rightarrow p_i} \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dp^k} \left\{ (p-p_i)^r X(p) \right\} \right]$$
III-37

• Exemple 2

$$X(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)^3}$$
III-38

$$X(p) = \frac{\lambda_0}{p-1} + \frac{\lambda_1}{(p+2)} + \frac{\lambda_2}{(p+2)^2} + \frac{\lambda_3}{(p+2)^3}$$
III-39

Avec :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lim_{p \rightarrow 1} [(p-1)X(p)] = \frac{2}{27} \\ \lambda_3 &= \lim_{p \rightarrow -2} [(p+2)^3 X(p)] = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 &= \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{\partial}{\partial p} \langle (p+2)^3 X(p) \rangle \right] = \frac{-2}{9} \\ \lambda_1 &= \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \langle (p+2)^3 X(p) \rangle \right] = \frac{-2}{27} \end{aligned}$$
III-40

Donc :

$$X(p) = \frac{2}{27} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{27} \frac{1}{(p+2)} - \frac{2}{9} \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(p+2)^3}$$
III-41

En utilisant la table des transformées de Laplace, on trouve la relation suivante :

$$x(t) = \frac{2}{27} e^{-t} + \left(-\frac{2}{27} - \frac{2}{9}t + \frac{1}{3} \frac{t^2}{2} \right) e^{-2t} \quad \text{III-42}$$

- Si $m \geq n$:

$$\text{Soit } X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} + Q(p) \quad \text{III-43}$$

Avec : l'ordre de $R(p)$ est inférieur à l'ordre de $D(p)$

Le polynome $Q(p)$ est d'ordre :

$$- 0 : \text{c'est-à-dire une constante, donc : } (\alpha \leftrightarrow \alpha \delta(t)) \quad \text{III-44}$$

$$- 1 : \text{c'est-à-dire } \left(\alpha p \leftrightarrow \alpha \frac{d\delta(t)}{dt} \right) \quad \text{III-45}$$

$$- 2 : \text{c'est-à-dire } \left(\alpha p^2 \leftrightarrow \alpha \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} \right) \quad \text{III-46}$$

Avec $\alpha \in \mathfrak{R}$

III.8. Notion de la région de convergence :

La fonction « transformée de Laplace » n'est pas définie dans tout le plan complexe : elle n'existe que dans une partie du plan qu'on appelle : **Région de Convergence**.

- **Exemple :**

Si on prend par exemple la fonction :

$$x(t) = e^{-2t} e(t) \quad \text{III-47}$$

La transformée de Laplace de $x(t)$ est donnée par :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} e(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+2)t} dt \quad \text{III-48}$$

$$X(p) = \left[\frac{-1}{p+2} e^{-(p+2)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{p+2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(p+2)t} - 1 \right) \quad \text{III-49}$$

Pour que $X(p)$ existe et ne tend pas vers l'infini, il faut que la limite $\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(p+2)t} \right)$ soit finie, et

pour cela, il faut que $p > -2 \Rightarrow p+2 > 0 \Rightarrow e^{-(p+2)t} \rightarrow 0$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour $p \leq -2 \Rightarrow p+2 \leq 0 \Rightarrow e^{-(p+2)t} \rightarrow \pm\infty$

La région de convergence de la fonction $x(t)$ correspond au demi plan droit par rapport au pôle (-2) comme indiqué en vert sur la figure II.2.a :

Si on prend maintenant la fonction :

$$x(t) = -e^{-2t} e(-t) \quad \text{III-50}$$

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-2t} e(-t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-(p+2)t} dt \quad \text{III-51}$$

$$X(p) = \frac{1}{p+2} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(p+2)t} \right) \quad \text{III-52}$$

Pour que la limite $\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(p+2)t} \right)$ soit finie, il faut que $p+2 < 0 \Rightarrow p < -2$

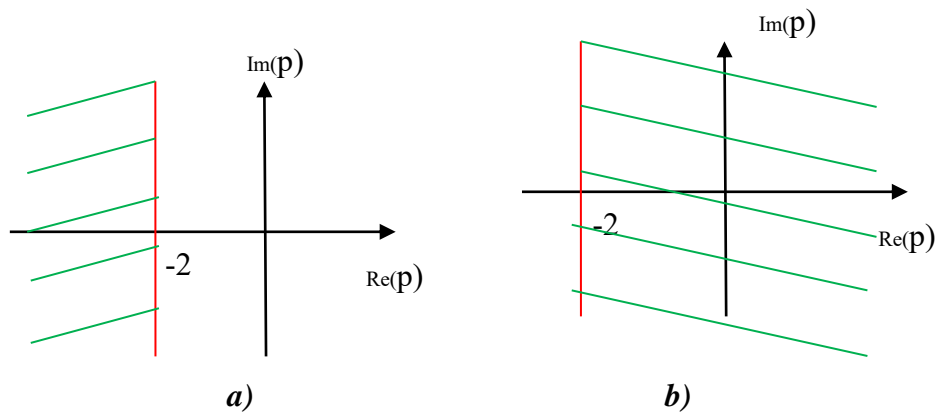


Figure III.2. Région de convergence de la transformée de Laplace

En général :

Soit $X(p)$, la fonction donnant la transformée de Laplace du signal $x(t)$.

On définit aussi les pôles $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ de la fonction $X(p)$, P_{\min}, P_{\max} sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale des pôles (on ne tient compte que des parties réelles des pôles).

- Si $X(p)$ est défini sur une région de convergence telle que : $\text{Re}(p) > P_{\max}$, alors la fonction $x(t)$ est définie par $t > 0$, et on écrit :

$$X(p) \leftrightarrow x(t)e(t)$$

- Si $X(p)$ est définie sur une région de convergence telle que : $\text{Re}(p) < P_{\min}$, alors la transformée inverse de $X(p)$ est :

$$X(p) \leftrightarrow -x(t)e(-t)$$

III.9. Région de convergence-stabilité-causalité

- **Définition1**

Un système est stable si la région de convergence contient l'axe des imaginaires :

- **Définition2**

Un système est causal si la région de convergence de la fonction de transfert est de la forme :

$$\operatorname{Re}(p) > P_{\max} \quad \text{III-53}$$

- **Définition3**

Un système est stable et causal si tous les pôles de la fonction de transfert appartiennent au demi-plan gauche, c'est-à-dire : tous les pôles sont à parties réelles négatives :

$$\operatorname{Re}(p) < 0 \quad \text{III-54}$$

III.10. Conclusion

Dans ce chapitre, la transformée de Laplace a été présentée, cette transformée représente un outil théorique essentiel dans la caractérisation des fonctions de transfert opérationnelles des systèmes linéaires à temps invariant, mais son utilisation pratique est très limitée surtout pour les signaux très compliqués.

Le chapitre suivant traitera l'analyse fréquentielle des signaux qui se prête facilement à l'analyse des signaux même les plus compliqués.

III.11. Exercices

1. Retrouver les transformées suivantes :

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$e(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$$

$$te(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$$

$$e^{-\alpha t} e(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha}$$

$$\sin(\omega_0 t) e(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

2. Calculer les transformées de Laplace des signaux suivants (utiliser la table des transformées) :

$$x_1(t) = \delta(t - 3)$$

$$x_2(t) = 5 \sin(3t)e(t)$$

$$x_3(t) = 10 \cos(20t)e(t)$$

$$x_5(t) = e^{5t} \cos(2t)e(t)$$

$$x_7(t) = \text{rect}_a(t)$$

$$x_8(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), T \in \mathfrak{R}$$

$$x_9(t) = 2e^{-4t}e(t) - 3e^{-3t}e(t)$$

3. Calculer les transformées de Laplace inverses des signaux suivants :

$$X_1(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}, \text{Re}(p) > -2$$

$$X_3(p) = \frac{p^2 + p - 9}{p^3(p+1)}, \text{Re}(p) > 0$$

4. Calculer les transformées de Laplace inverses du signal X(p) dans les cas suivants :

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3},$$

$$* \text{Re}(p) > -1$$

$$* \text{Re}(p) < -3$$

$$* -3 < \text{Re}(p) < -1$$

5. Soit un système LTI décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = kx(t)$$

Avec : x(t) est l'entrée du système et y(t) est sa sortie.

- Déterminer la fonction de transfert du système.
- Déterminer les pôles et les zéros du système.
- Déduire la stabilité du système.
- Calculer sa réponse impulsionnelle.

IV. Analyse fréquentielle

IV.1. Introduction

L'analyse fréquentielle ou harmonique est l'outil le plus important dans la science de la théorie du signal. Cette analyse est basée sur la transformée de Fourier (développement en série de Fourier) qui permet de réaliser la représentation spectrale des signaux.

L'analyse spectrale des signaux permet d'exprimer leurs amplitudes, phases, énergies, ou même la puissance en fonction de la fréquence.

IV.2. Rappels

On doit faire un petit rappel sur certaines notions nécessaires pour la maîtrise de cette partie du cours.

$$\bullet e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad \text{IV-1}$$

$$\bullet \cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{IV-2}$$

$$\bullet \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad \text{IV-3}$$

$$\bullet A \cos \varphi + B \sin \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left[\varphi + \operatorname{artg} \left(\frac{-B}{A} \right) \right] \quad \text{IV-4}$$

• Remarque importante

Soit S un système linéaire à temps invariant, si l'entrée du système S est de type sinusoïdal de fréquence f, la sortie est aussi de type sinusoïdal de fréquence f. cette propriété est réservée uniquement aux signaux sinusoïdaux.

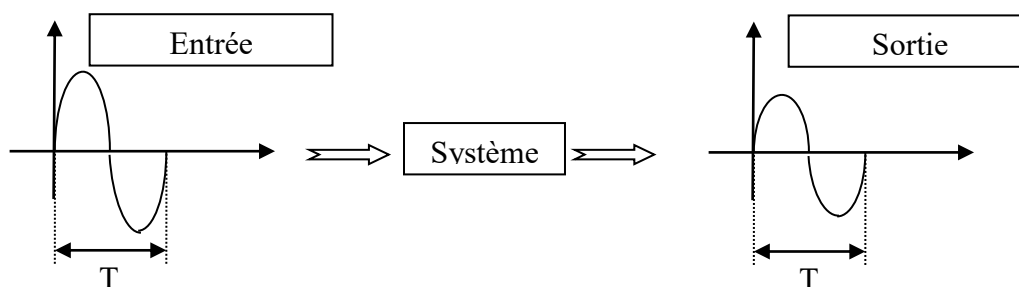


Figure IV.1. Propriété du signal sinusoïdal

IV.3. Représentation d'un signal

La forme naturelle (connue) de la représentation d'un signal est la représentation dans la base temporelle qui donne l'évolution de l'amplitude du signal en fonction du temps.

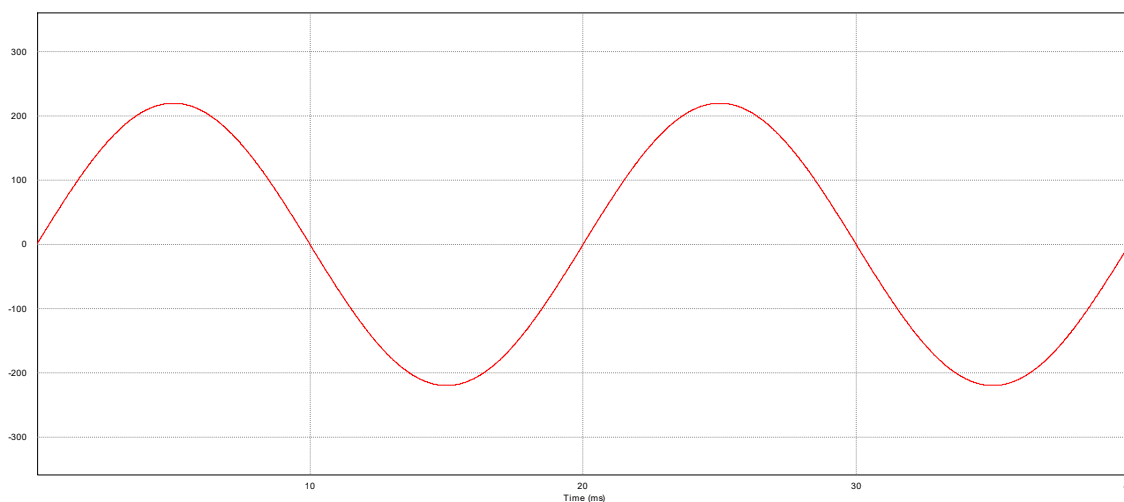
En plus de la base temporelle, on trouve aussi la représentation dans la base fréquentielle qu'on appelle « le spectre fréquentiel » d'un signal. Ce spectre permet de représenter l'amplitude et les différentes composantes présentes dans le signal (par exemple la phase) en fonction de la fréquence ou de la pulsation qui dépende linéairement de la fréquence.

• Exemple 1

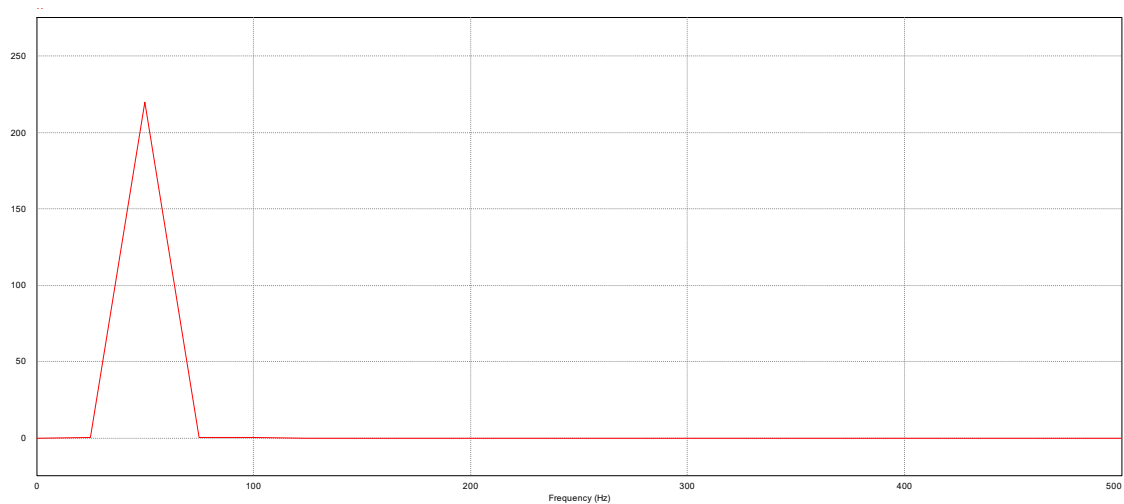
Si on prend le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence f par exemple :

$$x(t) = 220 \cos 100\pi t, f = 50 \text{ Hz}$$

La représentation temporelle et fréquentielle sont données par les figures suivantes :



a. Représentation temporelle



b. Représentation fréquentielle

Figure IV.2. Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal sinusoïdal

Donc la représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdal est donnée sous la forme d'un pic de même amplitude maximale du signal (220) au niveau de la fréquence de périodicité (ici 50Hz).

- **Exemple 2**

On refait le même travail pour le signal

$$y(t) = 30 \cos 5\pi t + 10 \cos 50\pi t, f_1 = 2.5\text{Hz}, f_2 = 25\text{Hz}$$

IV-5

Ce signal est composé de deux signaux sinusoïdaux de fréquences 2.5Hz et 25Hz.

Les représentations sont données par les deux figures suivantes :

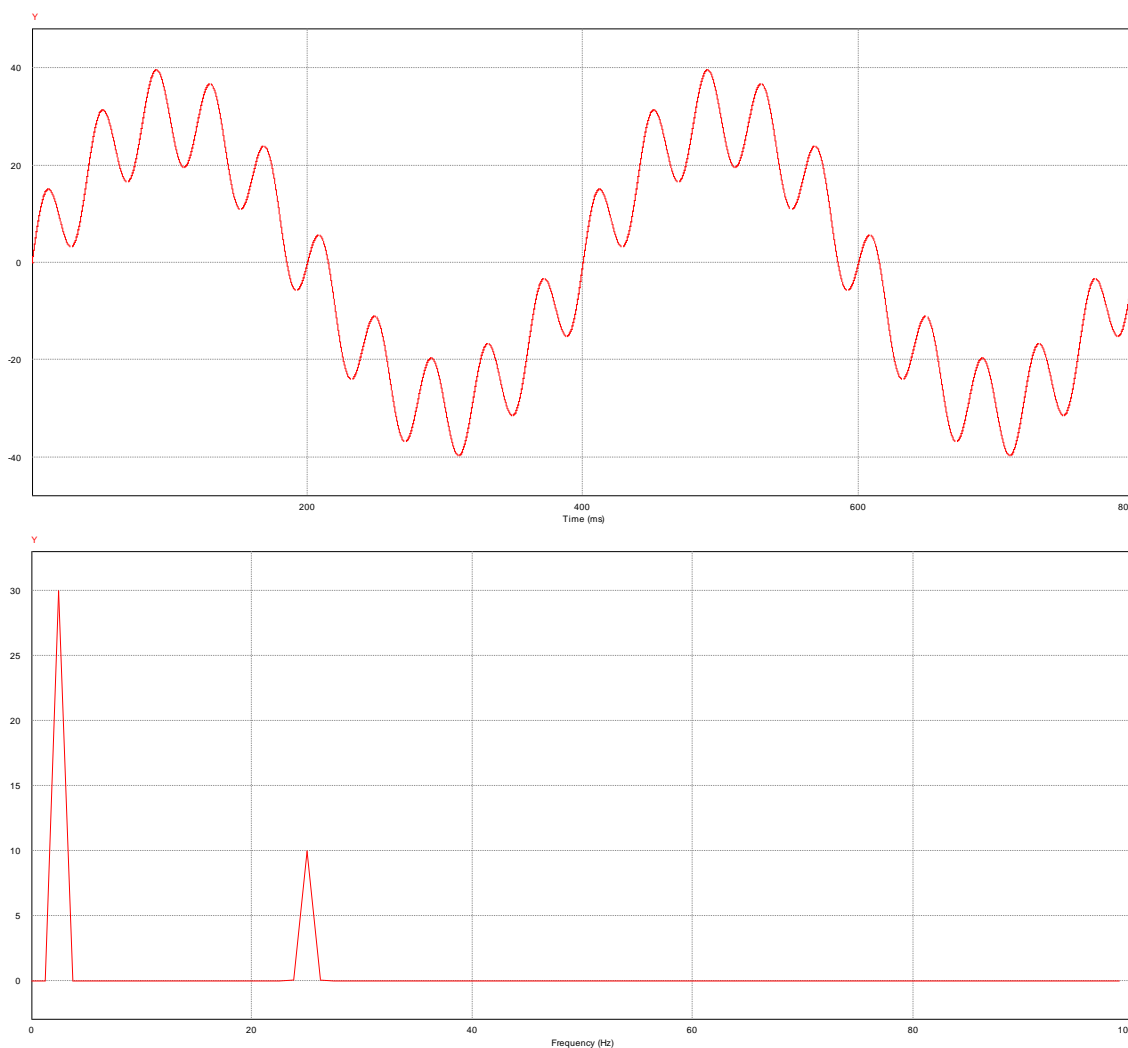


Figure 1v.5. Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal (exemple)

La représentation fréquentielle du signal $y(t)$ est composée de deux pics d'amplitudes 30 et 10 qui correspondent respectivement aux fréquences 2.5Hz et 25Hz.

IV.4. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

Considérons un signal continu $S(t)$, périodique de période T_0 , donc de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ et de

pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

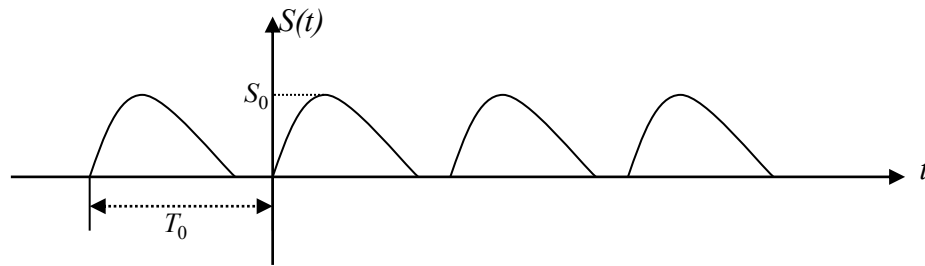


Figure IV.4. Signal périodique

Vu les propriétés un peu spéciales de la fonction sinusoïdale dans les systèmes LTI et de son spectre (exemple 1), le signal $S(t)$ peut être représenté par la somme de signaux sinusoïdaux (exemple 2) appelés « série de Fourier ».

Ce développement t donné par :

$$S(t) = C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{2j\omega_0 t} + \dots + C_n e^{nj\omega_0 t}$$

$$S(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{IV-6}$$

$$\text{Avec : } C_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} S(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{IV-7}$$

• Remarque

$$\bullet \text{ Pour } k=0, C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} S(t) dt \quad \text{IV-8}$$

Avec: C_0 : est la valeur moyenne du signal $S(t)$.

$$\bullet \text{ Pour } k=1, C_1 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} S(t) e^{-j\omega_0 t} dt \quad \text{IV-9}$$

Avec: C_1 : est une composante sinusoïdale de même fréquence que $S(t)$ et appelée « *fondamental* »

- Une série de composantes sinusoïdales de fréquences multiples entiers de f_0 ($f = k.f_0, k \geq 2$) sont appelées « *harmoniques* »

• Conditions de convergence des séries de Fourier (Conditions de Dirichlet)

Les conditions de convergence des séries de Fourier sont :

- $S(t)$ doit être intégrable sur n'importe quel intervalle de longueur T_0 .

- $S(t)$ doit avoir un nombre fini de maximums et de minimums sur n'importe quel intervalle fini.
- $S(t)$ doit avoir un nombre fini de discontinuités dans n'importe quel intervalle fini.

• Propriétés des coefficients de Fourier

Les propriétés des coefficients de Fourier sont données dans les points suivants :

- $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$ IV-10

Les harmoniques contribuent d'autant moins au signal que leur rang est élevé (k est le rang de l'harmonique)

- $|C_k| = |C_{-k}|$ IV-11

- La phase ϕ_k qui est l'argument de C_k a la propriété suivante :

$$\phi_{-k} = -\phi_k \quad \text{IV-12}$$

IV.5. Théorème de Parseval

Si la fonction $S(t)$ vérifie les conditions de Dirichlet, on a:

$$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} (S(t))^2 dt = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \quad \text{IV-13}$$

Le théorème de Parseval montre que la puissance d'un signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que le fréquentiel. En effet, comme dans l'espace des fréquences, le signal $x(t)$ est représenté par des générateurs d'amplitudes (C_k), il s'en suit que la puissance totale est égale à la somme des puissances fournies par chaque générateur.

IV.6. Représentation trigonométrique de la série de Fourier

En plus de sa représentation sous la forme exponentielle, la série de Fourier du signal $S(t)$ peut être représenté par la somme de signaux sinusoïdaux sous la forme suivante :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad \text{IV-14}$$

Avec :

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} S(t) \cos k\omega_0 t dt \quad \text{IV-15}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} S(t) \sin k\omega_0 t dt$$

- **Relations entre a_k, b_k, C_k**

$$\bullet a_0 = 2C_0 \quad \text{IV-16}$$

$$\bullet a_k = \frac{1}{2}(C_k + C_{-k}) \quad \text{IV-17}$$

$$\bullet b_k = -\frac{1}{2}j(C_k - C_{-k}) \quad \text{IV-18}$$

$$\bullet C_k = a_k - jb_k \quad \text{IV-19}$$

$$\bullet C_{-k} = a_k + jb_k \quad \text{IV-20}$$

IV.7. Spectre d'amplitude et de phase

Le spectre d'amplitude (ou de phase) permet de représenter la variation de l'amplitude (ou de la phase) du signal en fonction de la fréquence.

Nous avons le signal $S(t)$, décomposé en série de Fourier :

$$S(t) = C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + C_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{IV-21}$$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

le spectre d'amplitude est la représentation du terme $C_{k(k=0, \dots, n)}$ en fonction des fréquences $k\omega_0$ avec:

$$C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k = 0, \dots, n \quad \text{IV-22}$$

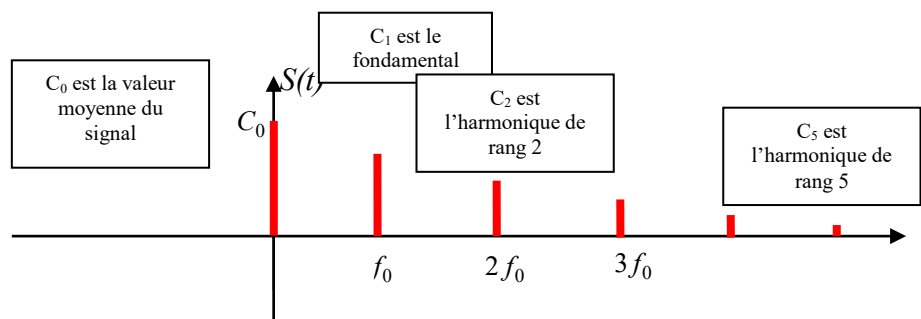
Le spectre de phase est donné par:

$$\phi_k = \text{artg} \left(\frac{-b_k}{a_k} \right) = \text{argument}(C_k), k = 0, \dots, n \quad \text{IV-23}$$

IV.8. Remarques importantes

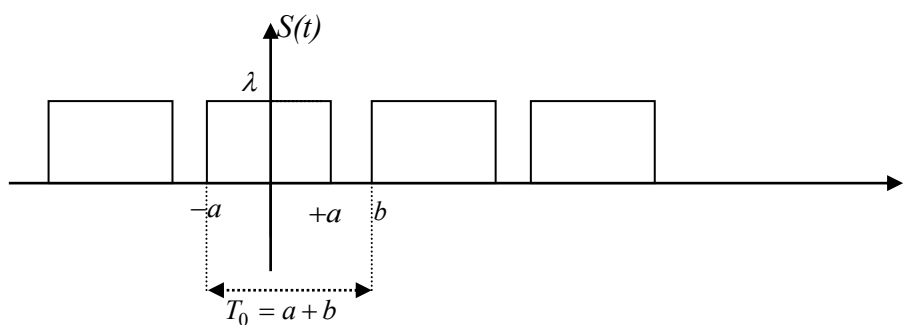
- Le spectre d'amplitude d'un signal périodique est toujours un spectre de raies situées au niveau des fréquences multiples de la fréquence périodique du signal $kf_{0, (k=0, \dots, n)}$

- Les fonctions paires ont un développement qui ne contient que les termes en cosinus $b_{k(k=0,\dots,n)} = 0$.
- Les fonctions impaires ne contiennent dans leurs développements que les termes en sinus $a_{k(k=0,\dots,n)} = 0$.
- Le spectre d'amplitude contient l'information sur l'amplitude et sa variation en fonction de la fréquence, c'est la raison qui lui donne une certaine priorité dans son utilisation par rapport au spectre de phase (dans certains domaines comme l'électronique par exemple), mais si le traitement tient compte de la forme du signal (traitement d'images), il ne faut jamais négliger le spectre de phase.



• Exemple

Soit le signal $S(t)$ représenté par la figure suivante :



Pour tracer le spectre d'amplitude du signal, on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \\
C_k &= \frac{1}{a+b} \int_{-a}^b S(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
C_k &= \frac{1}{a+b} \int_{-a}^b \lambda e^{-jk\omega_0 t} dt \\
C_k &= \frac{-\lambda}{(a+b)jk\omega_0} \left[e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-a}^{+a} = \frac{-\lambda}{(a+b)jk\omega_0} \left[e^{-jak\omega_0} - e^{jak\omega_0} \right] \\
C_k &= \frac{\lambda}{(a+b)k} \frac{\pi}{(a+b)} \left[\frac{e^{jak\omega_0} - e^{-jak\omega_0}}{2j} \right] \\
C_k &= \frac{\lambda}{\pi k} \sin(k\omega_0 a) \\
C_k &= \frac{\lambda k \omega_0 a \sin(k\omega_0 a)}{\pi k k \omega_0 a} = \frac{\lambda \omega_0 a}{\pi} \frac{\sin\left(k \frac{2\pi}{(a+b)} a\right)}{k \frac{2\pi}{(a+b)} a}
\end{aligned}
\tag{IV-24}$$

On trouve enfin :

$$C_k = \frac{2\lambda a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi k a}{(a+b)}}{\frac{2\pi k a}{(a+b)}}
\tag{IV-25}$$

- Application numérique : $\lambda = 1, a = 1, b = 2$

IV.9. Analyse fréquentielle des signaux apériodiques

La transformée de Fourier est une généralisation de la série de Fourier appliquée aux signaux apériodiques.

Soit $x(t)$, un signal à durée finie, périodique de période $T \rightarrow \infty$.

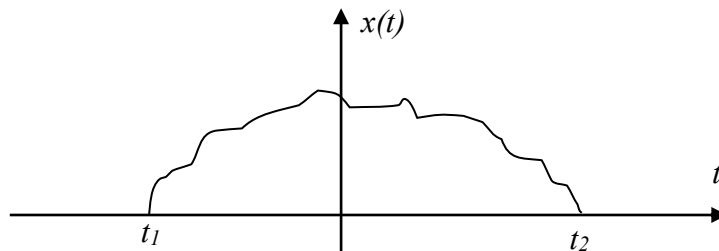


Figure IV.7. Signal apériodique

La fonction transformée de Fourier $X(\omega)$, dénotée TF est définie par l'intégrale suivante :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{IV-26}$$

ou

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{IV-27}$$

$$\text{On note : } X(\omega) = F(x(t)) \Leftrightarrow x(t) = F^{-1}(X(\omega)) \quad \text{IV-28}$$

Ou aussi :

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(\omega) \quad \text{IV-29}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

La transformée de Fourier $X(\omega)$ permet d'analyser le signal $x(t)$ en fournissant des informations sur sa distribution fréquentielle (énergie, amplitude ou phase).

a. Spectre d'amplitude

C'est la représentation de l'amplitude du signal $x(t)$ en fonction de la fréquence donc le graphe donnant $|X(\omega)|$ en fonction de ω ou de f .

b. Spectre de phase

C'est la représentation de la fonction $\Phi(\omega) = \arg(X(\omega))$ en fonction de ω ou de f .

• Remarque

Si la fonction $x(t) \in \mathfrak{R}$ donc :

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega) \end{cases} \quad \text{IV-30}$$

IV.10. Exemples de calcul de la TF

On prend $x(t) = \delta(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega(0)} dt \quad \text{IV-31}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

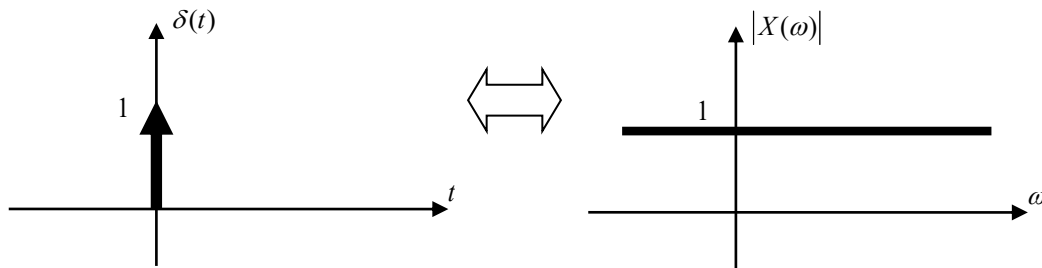


Figure IV.8. Spectre d'amplitude de l'impulsion de Dirac

On remarque que le spectre fréquentiel de l'impulsion de Dirac contient toutes les fréquences de $-\infty \rightarrow +\infty$.

On prend $x(t) = e^{-t}e(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}e(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{-1}{1+j\omega} \left[e^{-(1+j\omega)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

IV-32

Les spectres de fréquence et de phase sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} |X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\text{artg}(\omega) \end{cases}$$

IV-33

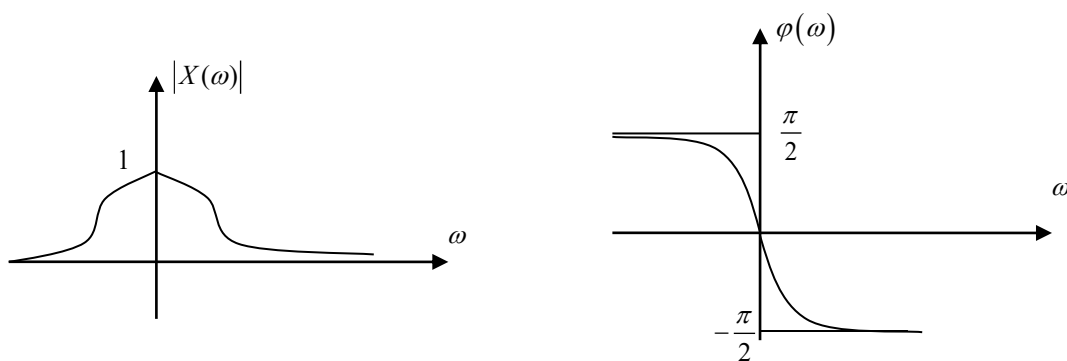


Figure IV.9. Spectre d'amplitude du signal exponentiel

IV.11. Conditions d'existence de la TF

Tous les signaux ne possèdent pas obligatoirement des TF, pour qu'un signal $x(t)$ ait une TF, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions de Dirichlet qui sont valables aussi bien pour la transformée de Fourier et celle de Laplace.

- Il faut que le signal $x(t)$ soit intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{IV-34}$$

- Le signal $x(t)$ possède un nombre fini d'extrémums (maximums ou minimums) dans chaque intervalle de temps fini
- Le signal $x(t)$ a un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle de temps fini.

A partir des conditions citées ci-dessus, on peut remarquer les points suivants :

- Tous les signaux à énergie finie vérifient ces conditions suffisantes.
- Certains signaux à puissance moyenne finie (signaux périodiques) ne sont pas absolument intégrables mais possèdent des transformées de Fourier en faisant intervenir l'impulsion de Dirac.

IV.12. Table des transformées de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e(t)$	$\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e(-t)$	$\pi \cdot \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at} e(t), a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t \cdot e^{-at} e(t), a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$e^{-a \omega }$

$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$rect_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < a \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$	$2a \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$
$\frac{\sin(at)}{\pi t}$	$rect_a(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega < a \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$\omega_0 \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Table IV.1. Table des transformées de Fourier

IV.13. Propriétés de la Transformée de Fourier

Les propriétés de la TF sont données comme suit :

- **Linéarité**

$$\text{Si } \begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ \{a, b\} \subset \mathfrak{R} \end{cases} \quad \text{IV-35}$$

Alors :

$$\begin{aligned} aX(\omega) + bY(\omega) &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ aX(\omega) + bY(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax(t) + by(t))e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad \text{IV-36}$$

Donc:

$$aX(\omega) + bY(\omega) = F(ax(t) + by(t)) \quad \text{IV-37}$$

- **Décalage temporel**

Nous avons à démontrer la propriété suivante :

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad \text{IV-38}$$

On pose: $\tau = t - t_0 \Rightarrow t = \tau + t_0$

$$\begin{aligned}
 x(t-t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t} dt \\
 x(t-t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\
 x(t-t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_0} d\tau \\
 x(t-t_0) &\leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}
 \tag{IV-39}$$

On aura donc:

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega) \tag{IV-40}$$

• Décalage fréquentiel

On veut montrer la propriété suivante : $e^{j\omega_0 t} x(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$

$$\begin{aligned}
 e^{j\omega_0 t} x(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 e^{j\omega_0 t} x(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt
 \end{aligned}
 \tag{IV-41}$$

On trouve donc:

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(\omega - \omega_0) \tag{IV-42}$$

• Changement d'échelle

Soit à démontrer que:

$$x(at) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{IV-43}$$

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \tag{IV-44}$$

On pose: $\tau = at \Rightarrow t = \frac{1}{a} \tau$, donc : $dt = \frac{1}{|a|} d\tau$

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{1}{|a|} d\tau \quad \text{IV-45}$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau$$

Donc:

$$x(at) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{IV-46}$$

• Dualité

La propriété de dualité s'énonce comme suit :

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(\omega) \quad \text{IV-47}$$

$$X(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$

Exemple

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(\omega) = 1$$

$$X(t) = 1 \Rightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{Regardez la table des transformées})$$

• Théorème de Parseval

Le calcul de l'énergie totale d'un signal peut se faire dans les deux bases temporelles ou fréquentielle, ce calcul est régit par le théorème de Parseval, énoncé par l'équation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{IV-48}$$

IV.14. Réponse fréquentielle d'un système LTI (Filtrage linéaire)

Soit un système LTI de réponse impulsionnelle $h(t)$, d'entrée $x(t)$, et de sortie $y(t)$.

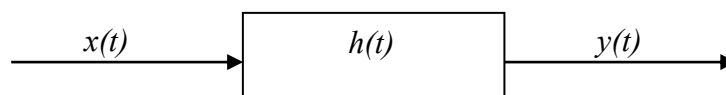


Figure IV.10. Système LTI

L'expression reliant tous ces paramètres est donnée comme suit :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{IV-49}$$

En réalisant la transformée de Fourier de cette équation, on trouve :

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad \text{IV-50}$$

On tire l'expression de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad \text{IV-51}$$

$H(\omega)$: est appelée Réponse fréquentielle du système (fonction de transfert dans le domaine de Laplace) et c'est aussi la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système.

$|H(\omega)|$: est la réponse du système en amplitude.

$\varphi(\omega)$: est la réponse du système en phase.

Avec :

$$\varphi(\omega) = \arg(H(\omega)) = \arg(Y(\omega)) - \arg(X(\omega)) \quad \text{IV-52}$$

• Exemple

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad \text{IV-53}$$

1. Trouver la réponse fréquentielle du système
2. Tracer la réponse en amplitude et en phase de ce système.

• Solution

1. La réponse fréquentielle

On applique la transformée de Fourier sur l'équation décrivant le système, on trouve :

$$j\omega \cdot Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) \quad \text{IV-54}$$

Donc:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega} \quad \text{IV-55}$$

2. Les tracés

- $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$ IV-56

$$\varphi(\omega) = \arg(1) - \arg(2 + j\omega)$$

- $$\varphi(\omega) = 0 - \operatorname{atg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

IV-57

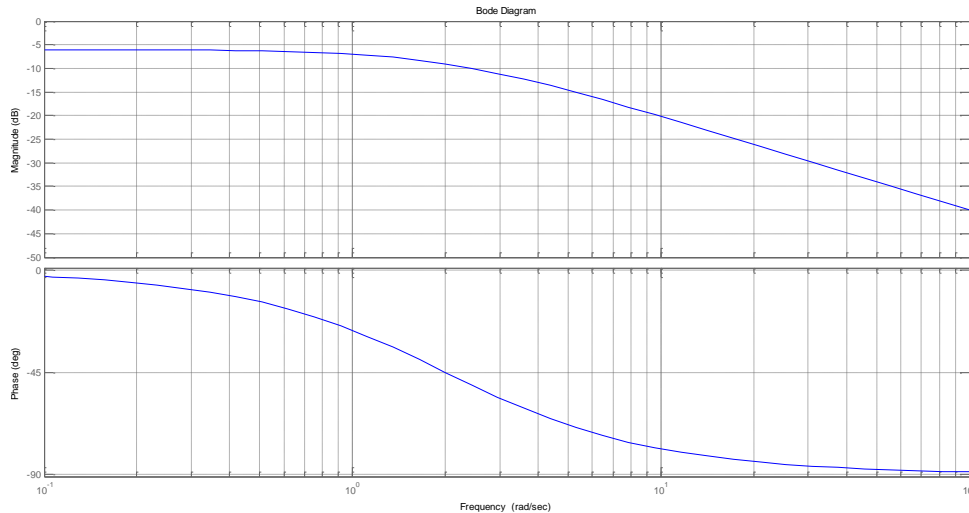


Figure IV.11. Spectre d'amplitude et de phase d'un signal apériodique

Le tracé de cette dernière figure est réalisé en utilisant le diagramme de Bode. Il permet de classer le système étudié comme un **filtre passe-bas**.

IV.15. Conclusion

Les notions de la transformée de Fourier, du spectre et de la réponse fréquentielle ont été présentés. Dans ce qui suit, on complètera cette analyse par l'étude des énergies et des puissances dans le domaine fréquentiel.

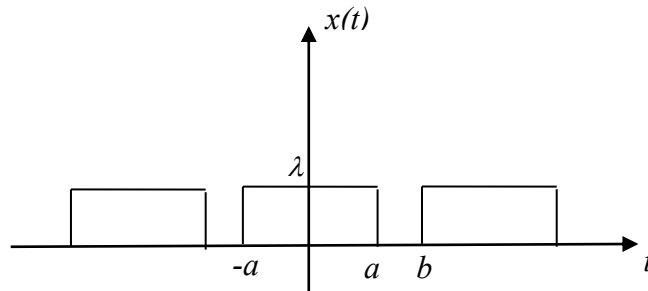
IV.16. Exercices

1. Donner le développement en série de Fourier ainsi que le spectre de fréquence des signaux suivants :

$$x_1(t) = 3 \sin 100\pi t$$

$$x_2(t) = 20 \sin 5\pi t + 3 \sin 100\pi t$$

$$x_3(t) = 1 + 3 \cos 100\pi t + 6 \sin 100\pi t$$



2. Soit le signal $x(t)$ représenté par la figure suivante :

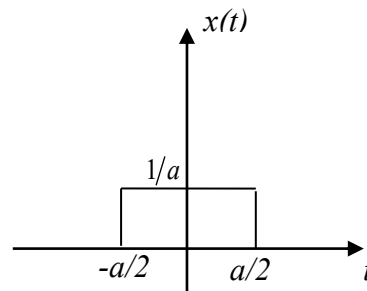
Donner le spectre fréquentiel $X(\omega), |X(\omega)|$

du signal $x(t)$ si $a = \lambda = 1, b = 2$

3. Soit le signal $x(t)$ représenté par la figure suivante:

Tracer le spectre de fréquence $X(f)$ de $x(t)$

Discuter lorsque $a \rightarrow 0$



V. Energies et puissances des signaux

V.1. Introduction

La notion des puissances ou (d'énergie) d'un signal est très importante du fait que toutes transmission de signaux dans les systèmes est liée à une transmission de puissance ou (d'énergie).

V.2. Puissance temporelle d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ s'exprime sous la forme :

$$P(t) = x(t) \cdot \overline{x(t)} = |x(t)|^2$$

V-1

Donc: l'énergie totale du signal $x(t)$ est donnée par la relation:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{x(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{V-2}$$

La puissance moyenne de $x(t)$ sur une durée T_0 finie est :

$$P(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} |x(t)|^2 dt \quad \text{V-3}$$

On peut définir aussi la puissance instantanée d'interaction entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sous la forme suivante :

$$P_{xy}(t) = x(t) \overline{y(t)} \text{ et } P_{yx}(t) = y(t) \overline{x(t)} \quad \text{V-4}$$

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux réels, les deux expressions déjà citées sont identiques, c'est-à-dire :

$$P_{xy}(t) = P_{yx}(t) = x(t)y(t) \quad \text{V-5}$$

On définit aussi la puissance moyenne d'interaction des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T_0 :

$$P_{xy}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \overline{y(t)} dt \quad \text{V-6}$$

$$P_{yx}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \overline{x(t)} dt \quad \text{V-7}$$

On peut définir la puissance moyenne d'interaction des signaux $x(t)$ et $y(t)$ non limités dans le temps par :

$$P_{xy}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \overline{y(t)} dt \right) \quad \text{V-8}$$

$$P_{yx}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \overline{x(t)} dt \right)$$

V.3. Puissance fréquentielle d'un signal (DENSITE SPECTRALE)

Si le signal $x(t)$ a une transformée $X(\omega)$, on définit le spectre de puissance d'un signal ou sa densité spectrale par :

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega) \cdot \overline{X(\omega)} = 2\pi |X(f)|^2 \quad \text{V-9}$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquence de largeur Δf autour d'une fréquence f_0 est :

$$E_x(\Delta f, f_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{xx}(\omega) d\omega \quad \text{V-10}$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(\omega)$ s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \\ E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \overline{X(\omega)} d\omega \\ E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \\ E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned} \quad \text{V-11}$$

Donc :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df \quad \text{V-12}$$

Cette équation exprime le théorème de Parseval qui insiste sur le fait que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie.

V.4. Autocorrélation et Intercorrélation des signaux

La fonction d'autocorrélation (ou d'intercorrélation) est l'étude de la ressemblance du signal avec lui-même (ou avec un autre signal) au cours du temps ou tout simplement, elle traduit la similitude d'un signal (ou de deux signaux) au niveau de la forme, amplitude, ou la position dans le temps.

La fonction d'autocorrélation est définie par l'intégrale suivante :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \overline{x(t-\tau)} d\tau \quad \text{V-13}$$

V.4.1. Propriétés de la fonction d'autocorrélation

Si le signal $x(t)$ est réel, les propriétés de l'autocorrélation sont :

$$\begin{cases} C_{xx}(t) = C_{xx}(-t) \\ |C_{xx}(t)| < C_{xx}(0) \end{cases} \quad \text{V-14}$$

Cette dernière propriété correspond au fait que la ressemblance est maximale lorsque le décalage est nul.

La fonction d'intercorrélation est définie par :

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \overline{y(t-\tau)} d\tau \quad \text{V-15}$$

V.4.2. Remarque importante

Soit : $S_{xx}(f)$ la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$.

On applique la transformée de Fourier au signal densité :

$$\begin{aligned} F^{-1}(S_{xx}(f)) &= F^{-1}(|X(f)|^2) \\ F^{-1}(S_{xx}(f)) &= F^{-1}(X(f) \overline{X(f)}) \\ F^{-1}(S_{xx}(f)) &= F^{-1}(X(f)) * F^{-1}(\overline{X(f)}) \\ F^{-1}(X(f)) &= x(t) * \overline{x(-t)} \\ F^{-1}(X(f)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau \\ F^{-1}(X(f)) &= C_{xx}(t) \end{aligned} \quad \text{V-16}$$

Donc :

$$C_{xx}(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} S_{xx}(f) \quad \text{V-17}$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ est la densité spectrale d'énergie du signal lui même.

Il sera donc plus facile de calculer la fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation des signaux en passant par leurs spectres ou leurs densités spectrales.

$$C_{xy}(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} S_{xy}(f), C_{yx}(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} S_{yx}(f) \quad \text{V-18}$$

V.5. Conclusion

Nous avons présenté à travers les cinq chapitres précédents les notions de base essentielles pour l'étude et l'analyse des signaux continus, dans le dernier chapitre de ce cours, nous essayerons d'introduire la notion de l'échantillonnage et l'analyse des signaux et des systèmes discrets.

V.6. Exercices

1. Calculer l'énergie totale du signal (utiliser le théorème de Parseval)

$$x(t) = \frac{\sin t}{t}$$

2. Donner la fonction d'autocorrélation des signaux :

$$x_1(t) = 3 \sin 100\pi t$$

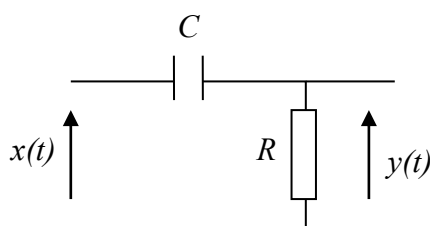
$$x_2(t) = 1$$

Indication: on utilise la densité spectrale.

3. Soit le circuit électrique (filtre) de la figure suivante :

Avec : $x(t)$ est la tension d'entrée du filtre et $y(t)$ est sa tension de sortie

3. Donner la réponse fréquentielle de ce filtre.
4. Tracer la réponse en amplitude et en phase de ce filtre.
5. Déduire la nature de ce filtre.



VI. Echantillonnage et systèmes discrets

VI.1. Introduction à l'échantillonnage

Les systèmes continus (linéaires ou non-linéaires) ont comme principale fonction de traiter continuellement, en temps réel, des signaux eux-mêmes continus, c'est-à-dire des signaux représentés par des fonctions continues du temps. On parle alors de signaux et de systèmes à temps continus.

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités. Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatibles avec un système de traitement numérique, on a recours à des opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever à intervalles de temps (généralement réguliers), des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique/numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire.

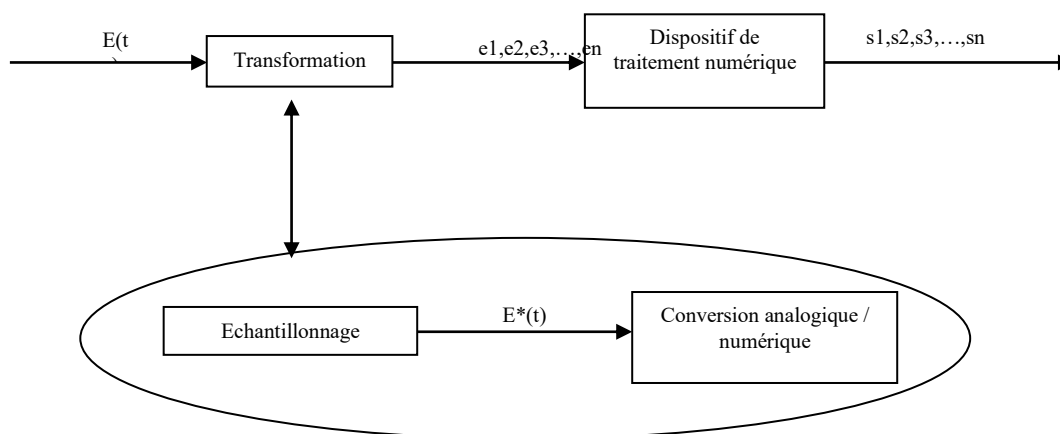


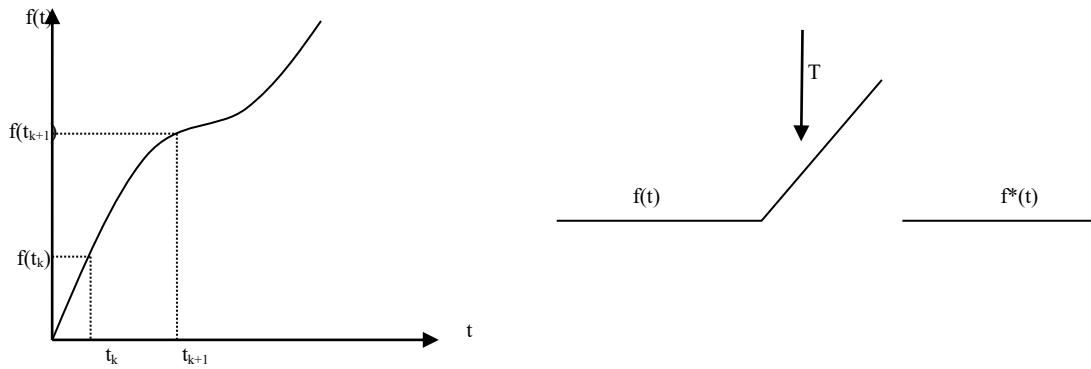
Figure VI.1. Traitement numérique d'un signal

$E^*(t)$: signal échantillonné dans le temps.

On a souvent tendance à appeler échantillonnage l'ensemble de la chaîne de transformation du signal, conversion comprise. Dans ce cours, on s'intéressera aux modèles qui concernent la description globale de la transformation du signal continu jusqu'à la suite de nombres correspondante.

VI.2. Système échantillonné

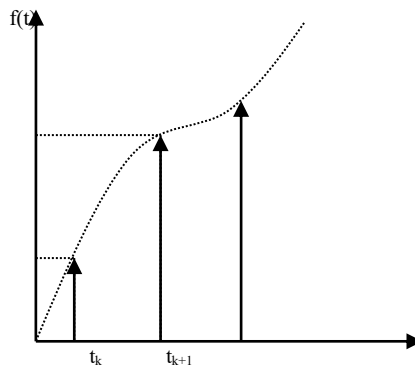
Un système échantillonné est un système à évolution continue pour lequel la prise et la transmission d'information s'effectuent à des instants discrets (t_k) du temps appelés « instants d'échantillonnage ». Le système qui réalise cette fonction est un échantillonneur ; tout système numérique dispose d'un échantillonneur.



VI.2. Symbole d'un échantillonneur.

T : période d'échantillonnage.

Le cas le plus fréquent est celui de l'échantillonnage à période constante « T », pour lequel $(t_{k+1}-t_k=T)$ quelque soit k. donc : l'échantillonnage d'une fonction f(t) consiste à remplacer une fonction par la suite discontinue de ces valeurs f(nT) (n=0,1,...).



VI.3. Echantillonnage avec peigne de Dirac :

$$\delta_T(t) = \delta(t - nT). (n = 0, 1, \dots, N) \tag{VI-1}$$

$$f^*(t) = f(nT) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT) \tag{VI-2}$$

$$f^*(t) = f(0) + f(T)\delta(t - T) + f(2T)\delta(t - 2T) + \dots + f(nT)\delta(t - nT) \tag{VI-3}$$

En utilisant la transformée de Laplace :

$$L(f^*(t)) = f(0) + f(T)e^{-Tp} + \dots + f(nT)e^{-nTp} = F^*(p) \tag{VI-4}$$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-nTp} \tag{VI-5}$$

VI.3. Choix de la fréquence d'échantillonnage (théorème de Shannon)

Lorsqu'on échantillonne un signal $f(t)$, on ne connaît que les valeurs $f(kT)$. Une question se pose : dans quelles conditions peut-on considérer que toute l'information contenue dans $f(t)$ est aussi contenue dans $f^*(t)$? ou en d'autres termes, peut-on reconstituer le signal $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ pour n'importe quelle valeur de la période d'échantillonnage T ?

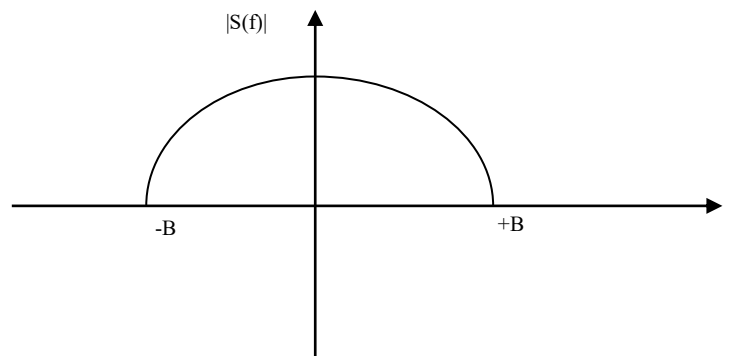
Il paraît évident que si on a beaucoup d'échantillons ($T \ll \ll$), on pourra reconstituer $f(t)$. Par contre, la fréquence d'échantillonnage n'étant pas infinie, il sera difficile de reconstituer des signaux de très hautes fréquences.

- Spectre d'un signal échantillonné

La transformée de fourrier d'un signal continu $s(t)$ à énergie finie est donnée par :

$$S(f) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{VI-6}$$

avec $\omega = 2\pi f$: est la fréquence d'échantillonnage

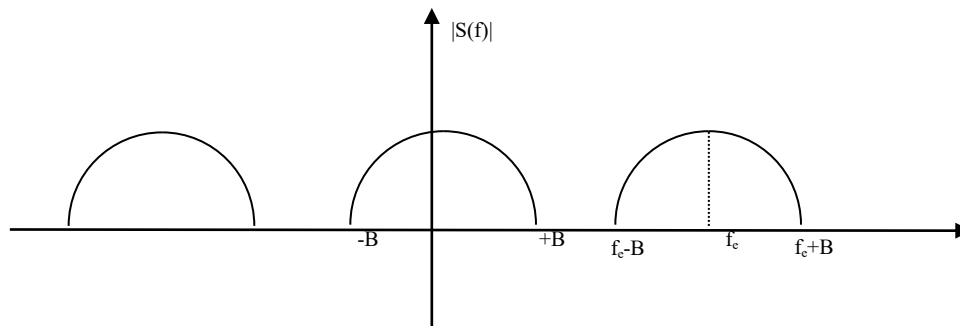


VI.4. Spectre d'un signal continu

La transformée de fourrier du signal $s^*(t)$ est donnée par :

$$S^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n S(f - nf_e) \quad \text{VI-7}$$

avec $f_e = \frac{1}{T_e}$: est la fréquence d'échantillonnage



VI.5. Spectre d'un signal échantillonné

La transformée de fourrier du signal échantillonné apparait comme une superposition des transformés de fourrier de $s(t)$ aux points $(f-nf_c)$. pour $n=0$, on retrouve le spectre $|S(f)|$ du signal initial. Pour $n \neq 0$, on retrouve ce même spectre mais décalé par rapport à $|S(f)|$ de nf_c avec $n=-\infty \rightarrow +\infty$, on dit aussi que $S(f)$ est périodique de fréquence f_c .

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre $|S^*(f)|$ nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun « recouvrement », « repliement », ou « over-lapping » entre les différents segments de spectre.

La condition de non recouvrement est donc :

$$f_e > 2B$$

VI-8

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon, ce théorème fournit une limite théorique. En pratique, on se rend compte que c'est insuffisant ; en pratique, on adopte la condition suivante :

$$5B < f_e < 25B$$

VI-9

VI.4. Reconstitution d'un signal échantillonné

Dans le cas où la condition de Shannon est satisfaite, on peut reconstituer le signal continu initial $x(t)$ par la relation suivante :

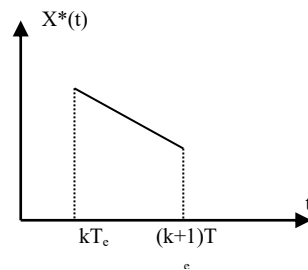
$$x(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\sin \pi f_e (t - nT_e)}{\pi f_e (t - nT_e)} \quad \text{VI-10}$$

- **Interpolation linéaire :**

On admet dans ce cas que $x(t)$ varie linéairement entre les instants d'échantillonnage :

$$x(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T_e} (t - kT_e) + x(k) \quad \text{pour } kT_e \leq t \leq (k+1)T_e \quad \text{VI-11}$$

L'interpolation linéaire n'est pas causale, elle nécessite un retard d'une seule période d'échantillonnage pour la reconstitution.



VI.6. Interpolation linéaire

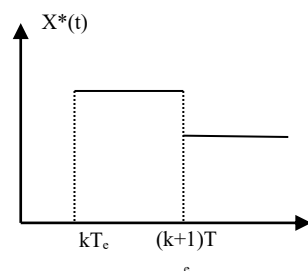
- **Bloqueur d'ordre zéro :**

Il est très utilisé en pratique et correspond simplement à admettre que le signal $x(t)$ reste inchangé entre deux instants d'échantillonnage :

$$x(t) = x(k) \quad \text{pour } kT_e \leq t \leq (k+1)T_e \quad \text{VI-12}$$

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \quad \text{VI-13}$$



VI.7. Bloqueur d'ordre zéro

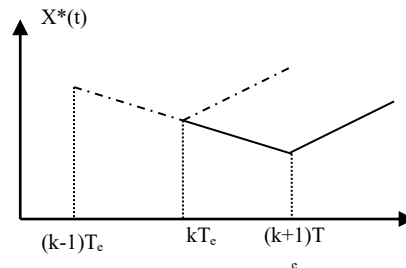
- **Bloqueur d'ordre un :**

On réalise une interpolation linéaire de la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage à partir de la variation entre les deux instants précédents.

$$x(t) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e} (t - kT_e) + x(k) \text{ pour : } kT_e \leq t \leq (k+1)T_e \quad \text{VI-14}$$

La fonction de transfert est donnée par :

$$B_1(p) = \frac{1 + T_e p}{T_e} \left(\frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \right)^2 \quad \text{VI-15}$$



VI.8. Bloqueur d'ordre un

VI.5. Transformée en Z

Soit $s(t)$ un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence ($f_e=1/T_e$), en respectant le théorème de Shannon.

$$S(k) = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$$

Cette suite est la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées chacune par le coefficient S_k correspondant :

$$S^*(t) = S_0 \delta^*(t) + S_1 \delta^*(t - T_e) + S_2 \delta^*(t - 2T_e) + \dots + S_n \delta^*(t - nT_e) \quad \text{VI-16}$$

$$S^*(t) = \sum_{k=0}^n S_k \delta^*(t - kT_e) \quad \text{VI-17}$$

En utilisant la transformation de Laplace, on trouve :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n S_k e^{-pkT_e} \quad \text{VI-18}$$

On pose $Z=e^{pT_e}$, on définit la transformée en Z du signal $s(t)$ par :

$$S(Z) = \sum_{k=0}^n S_k z^{-k} \quad \text{VI-19}$$

On note aussi:

$$S(z) = Z(s(t))$$

La transformée en Z joue le même rôle dans les systèmes discrets que la transformée de Laplace dans les systèmes continus.

Elle permet d'obtenir facilement la solution d'une équation de récurrence et de définir une fonction de transfert entre l'entrée et la sortie d'un système discret.

VI.6. Propriétés de la transformée en Z

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux quelconques possédant chacune une transformée en Z, $S_1(z)$ et $S_2(z)$ et λ_1 et λ_2 sont des valeurs réelles.

a/ Linéarité

$$Z[\lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t)] = \lambda_1 S_1(z) + \lambda_2 S_2(z) \quad \text{VI-20}$$

b/ Théorème du retard

$$Z[S(t - aT)] = z^{-a} S(z) \quad \text{VI-21}$$

c/ Théorème d'avance

$$Z[S(t + aT)] = z^a \left[S(z) - \sum_{n=0}^{a-1} S(nT) z^{-n} \right] \quad \text{VI-22}$$

d/ Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) S(z) \right] \quad \text{VI-23}$$

e/ Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{k \rightarrow 0} S_k = \lim_{z \rightarrow \infty} [S(z)] \quad \text{VI-24}$$

VI.7. Table des transformées en Z

Suites	Transformée en z	Domaine de convergence
$u_0 = 1$ $u_n = 0$ si $n > 0$	1	\mathbb{C}
$u_k = 1$ $u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}	\mathbb{C}^*
1	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a$
$\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - az \cos(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$	$ z > a$
$a^n \sin(\omega n)$	$\frac{az \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$	$ z > a$

Table VI.1. Table des transformées en Z

VI.8. Résolution d'équations récurrentes

On peut, en utilisant la transformée en Z, remplacer la solution d'une relation récurrente à coefficients constants par la résolution d'un simple système algébrique.

Exemple : Connaissant l'entrée U, trouver la sortie y d'un système régi par l'équation récurrente suivante :

$$y_{k+1} + ay_k = bU_k \quad \text{VI-25}$$

En utilisant la transformée en Z, on trouve,

$$zy(z) = zy_0 + ay(z) = bU(z) \quad \text{VI-26}$$

$$y(z) = \frac{b}{z+a} U(z) + \frac{z}{z+a} y_0 \quad \text{VI-27}$$

Donc : $y_k = Z^{-1}(y(z))$ est obtenu en remplaçant le signal U(z) par sa valeur.

VI.9. Transmittance en présence d'un bloqueur d'ordre zéro

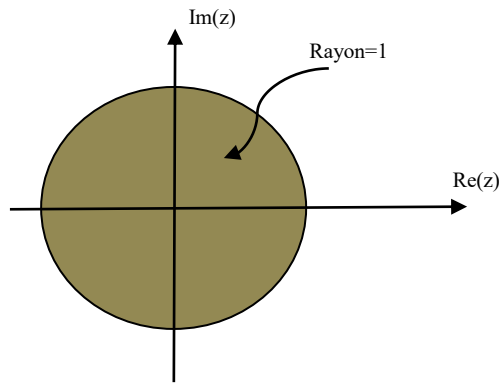
Si le système échantillonné en entrée est bloqué sur la période (cas le plus fréquent dans la commande), la fonction de transfert pulsée du système est donnée par :



Figure VI.9. Système continu bloqué avec un bloqueur d'ordre zéro

VI.10. Stabilité des systèmes échantillonnés

La condition générale de stabilité pour un système échantillonné linéaire est que toutes les racines de l'équation caractéristique (en module) soient situées à l'intérieur du cercle de rayon (1) dans le plan (Z).



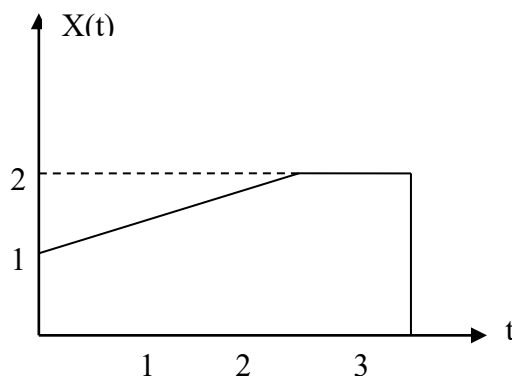
VI.10. Condition de stabilité

VI.11. Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre n'est qu'une petite initiation à l'étude des signaux numériques.

VI.12. Exercices

1. Calculer les transformées en Z de : $x(t) = (2 + 5t + 3t^2)e(t)$.
2. Calculer la transformée en Z du signal représenté par le graphique suivant :
on prendra $T=0.5s$.



3. En utilisant la transformée en Z, résoudre les équations suivantes :

$$U_{n+1} + 0.5U_n = 1$$

$$U_{n+2} + 5U_{n+1} - 6u_n = 1$$

4. Déterminer les fonctions de transfert échantillonnées (avec un bloqueur d'ordre zéro) des systèmes suivants :

$$H(p) = \frac{k}{p^2+3p+2}$$
$$H(p) = \frac{k}{p^2+p}$$

Conclusion

Dans ce cours, les notions essentielles de la théorie du signal ont été présentées, ces notions diffèrent des notions du traitement du signal qui traite l'ensemble des méthodes permettant l'élaboration et l'interprétation des signaux comme l'identification, le filtrage, le codage-décodage, le changement de fréquence,...etc.

Actuellement, les méthodes de traitement du signal sont essentiellement basées sur un traitement numérique, ce qui nécessite, en plus de l'échantillonnage temporel, la numérisation du signal par conversion Analogique/Numérique (quantification).

Ces notions seront détaillées dans un autre cours de « Traitement du Signal »

Références

- [BAU 98] G. Baudoin, J. F. Bercher, Eléments de Traitement du Signal, Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique, Septembre 1998, Version 0.89.
- [BEK 08] Rais El'Hadi Bekka, Fondements du traitement du signal, Office des Publications Universitaires, 4ème Edition, 2008
- [COT 09] Francis Cottet, Traitement des signaux et acquisition de données, Cours et exercices corrigés, DUNOD, 3ème Edition, 2009
- [EMS 74] Y. Emsellem, G. de Marsily, D. Poitral, M. Ratsimiebo, Déconvolution et identification automatique de paramètres en hydrologie, 2nd Warsaw Symposium in Mathematical models in Hydrology, pp :709-735, 1974.
- [HEY 03] S.Haykin, Signals and systems, John Wiley and sons Edition, 2ème édition, 2003
- [JUT 09] Christian Jutten, Théorie du signal, Université Joseph Fourier, Polytechnique Grenoble, Novembre 2009.
- [OPP 04] A. V. Oppenheim, Signals and systems, Prentice-Hall Edition, 2004
- [MON 13] J. M. Monier, Analyse MP-Cours, Méthodes et Exercices corrigés, Edition DUNOD, 2013
- [MUD 11] F. Mudry, Traitement des signaux, Université des Montagnes (UDM), Novembre 2011.
- [MUL 02] J. P. Muller, Analyse spectrale, Version Juillet 2002.