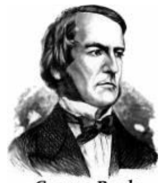
Chapitre 3 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

Corrigé de la série TD3 (2018-2019 Semestre 1)


George Boole

Séance 7

Q35 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

☐ Idempotence	☐ McClusky
✓ Commutativité	✓ Complémentarité
✓ Associativité	☐ Absorption
✓ Eléments neutre	☐ De Morgan
☐ Eléments symétrique	☐ Inhibition
☐ Karnaugh	✓ Double distributivité

⚠ Attention !

l'idempotence n'est pas un axiome !
Voici sa demonstration:

$x = x + 0$ ← element neutre
$= x + (x \cdot \overline{x})$ ← complémentarité
$= (x + x) \cdot (x + \overline{x})$ ← distributivité
$= (x + x) . 1$ ← Complémentarité
$= x + x$ ← element neutre

Q36 – L'ensemble des propositions ***P*** muni des lois ***ET***, OU et négation logique est une algèbre de Boole. ☑Vrai ☐ Faux

Q37 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
x + x = x	**Idempotence**
x + y = y + x	**Commutativité**
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	**Associativité**
x + 0 = x	**Elément neutre du OU**
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	**Distributivité**
$\overline{x} + x = 1$	**Complémentarité**

Loi "."	Nom de la propriété
x . x = x	**Idempotence**
x . y = y . x	**Commutativité**
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	**Associativité**
x . 1 = x	**Elément neutre du OU**
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	**Distributivité**
$\overline{x}.x = 0$	**Complémentarité**

Propriété	Nom de la propriété
$\overline{\sum_{i=0}^{n} x_i} = \prod_{i=0}^{n} \overline{x_i}$	**Théorème de DeMorgan**

Q38 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . ».

☐ Vrai ☐ Faux ☑ **Définition incomplète**

Q39 – Indiquez à quelle propriété correspondent les formules suivantes ?

$\overline{x + y + z} = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$ $\overline{x.y.z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ De Morgan

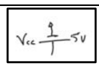
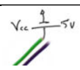
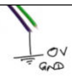
Q40 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ✓ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ✓ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ✓ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q41 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

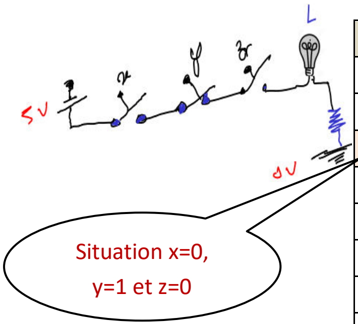
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ✓ Un niveau de tension de 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ✓ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ✓ Un interrupteur mis sur OFF

Q42 – Complétez le tableau ci-dessous :

Etat électrique	Etat logique	Etat électrique	Etat logique
	**« 1 »**		**« 1 »**
	**« 1 »**		**« 0 »**
	**« 0 »**		**« 1 »**
	**« 0 »**		**« 0 »**

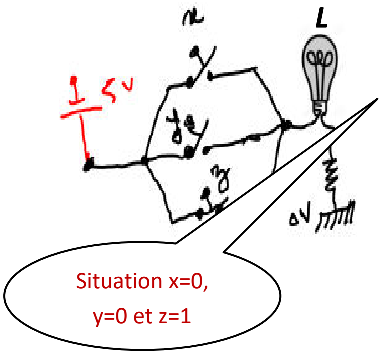
Q43 – En supposant que l'on représente 3 variables booléennes « ***x*** », « ***y*** » et « z » par 3 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



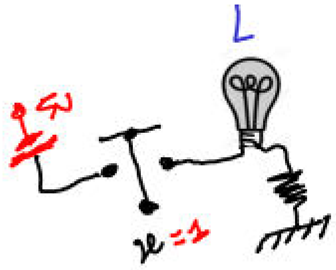
x	y	z	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



x	y	z	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Q44 – – Le schéma électrique suivant



$f(x) = \overline{x}$

Correspond à :

- ☐ La négation avec x=0 et L=1
- ☐ Le OU
- ✓ La négation avec x=1 et L=0
- ☐ Le ET
- ☐ Le OU exclusif
- ☐ Le NON OU exclusif

Q45 – Si vous avez ***8*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction ***F = f(x₇, x₆, …, x₁, x₀)*** :

2^8 = 256 lignes

Séance 8

Q46 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$a\overline{b}c + ab\overline{c} + \overline{a}bc + abc =$ $a\overline{b}c + ab\overline{c} + \overline{a}bc + abc$ $+abc + abc$	Idempotence
$= a\overline{b}c + abc + ab\overline{c} + abc$ $+\overline{a}bc + abc$	Commutativité
$= (a\overline{b}c + abc) + (ab\overline{c} +$ $abc) + (\overline{a}bc + abc)$	Associativité
$= (\overline{b} + b)ac + (\overline{c} + c)ab$ $+(\overline{a} + a)bc$	Distributivité
$= (1)ac + (1)ab + (1)bc$	Complémentarité
$= ac + ab + bc$	Elément neutre
$= ab + bc + ac$	Commutativité

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{(a+b+c).(a+\overline{b}+c)}$ $= \overline{(a+b+c)} + \overline{(a+\overline{b}+c)}$	DeMorgan
$= (\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}) + (\overline{a}.b.\overline{c})$	DeMorgan
$= \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c}$	Associativité
$= (\overline{b} + b)\overline{a}.\overline{c}$	Distributivité
$= (1)\overline{a}.\overline{c}$	Complémentarité
$= \overline{a}.\overline{c}$	Elément neutre

Transformation algébrique	Opérateur
$xy + \overline{x}.\overline{y} = x \overline{\oplus} y$	NON OU exclusif (NXOR)
$\overline{x}y + x.\overline{y} = x \oplus y$	OU exclusif XOR
$\overline{x.y} = x \uparrow y$	NAND
$\overline{x+y} = x \downarrow y$	NOR

Q47 – Soit la table de vérité suivante

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Indiquez les fonctions correspondent aux colonnes suivantes: f_0, f_1, f_6, f_7, f_8 et f_{14}

f_0	***Fonction constante « 0 »***
f_1	***Fonction ET (AND)***
f_6	***Fonction OU exclusif (XOR)***
f_7	***Fonction OU (OR)***
f_8	***Fonction Non OU (NOR)***
f_{14}	***Fonction constante « 1 »***

Q48 – Démontrer la propriété suivante :

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{x_i}$$

pour $n = 2$

$$\overline{\sum_{i=1}^{2} x_i} = \prod_{i=1}^{2} \overline{x_i}$$

ce qui donne

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} . \overline{x_2}$$

On peut le vérifier dans une Table de vérité

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_1+x_2	$\overline{x_1+x_2}$	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

idem !

On suppose que notre propriété est vraie pour n :

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{x_i}$$

Pour n+1

$$\overline{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}}$$

posons $\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha$

on a

$$\overline{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} = \overline{\alpha + x_{n+1}}$$

$$= \overline{\alpha} \cdot \overline{x_{n+1}}$$

$$= \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \overline{x_{n+1}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot \overline{x_{n+1}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} \overline{x_i}$$

DeMorgan pour n=2

Je remplace α par sa valeur

DeMorgan à l'ordre n

Donc

$$\overline{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} = \prod_{i=1}^{n+1} \overline{x_i}$$

Séance 9 (Semaine du 2 au 7 décembre 2018)

Q49 – Démontrer la propriété : « $x + x + \bar{x} = 1$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

$$x + x + \bar{x} = (x + x) + \bar{x} \quad \text{idempotence}$$

$$= x + \bar{x} \quad \text{complémentarité}$$

$$= 1$$

Q50 – Démontrer la propriété : « $(x + x) . 1 = x$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

$$(x + x) . 1 = x . 1 \quad \text{idempotence}$$

$$= x \quad \text{élément neutre}$$

Q51 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes

(x, y) ∈ V² où V = {0,1}

☞ On définit l'opérateur « **⊕** » de la manière suivante : ***x⊕y = 1* si et seulement si *x≠y***

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que $x \oplus y = \bar{x}.y + x.\bar{y}$

Réponse :

x y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}.y$	$x.\bar{y}$	$\bar{x}.y + x.\bar{y}$	$x \oplus y$
0 0	1	1	0	0	0	0
0 1	1	0	1	0	1	1
1 0	0	1	0	1	1	1
1 1	0	0	0	0	0	0

Identique !

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : ***$x \overline{\oplus} y = 1$* si et seulement si *$x=y$***

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que $x \overline{\oplus} y \;=\; \overline{x \oplus y}$

Réponse :

x y	$x \oplus y$	$\overline{x \oplus y}$	$x \overline{\oplus} y$	
0 0	0	0	1	
0 1	1	1	0	
1 0	1	1	0	
1 1	0	0	1	

Identique !

Q52 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **{O_1, O_2, … O_n}** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

<u>Réponse</u> : Système logique complet (SLC)

Q53 – Montrer que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {NOR} constituent des systèmes logiques complets.

<u>Réponse</u> : On fait de sorte à exprimer les opérateurs manquant à base des opérateurs disponibles. Ainsi pour montrer que {ET, NON} est une SLC, on doit remplacer les « OU » logiques par des « ET » et des négations.

$$x + y = \overline{\overline{x+y}}$$
$$= \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Pour montrer que {NOR} est une SLC, on doit remplacer les « OU » logiques, les « ET » et les négations par des « NOR ». Je rappelle que « NOR » correspond à la négation d'un « OU » logique

$$\bar{x} = \overline{x + x} = x \downarrow x$$
$$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$
$$= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$
$$x + y = \overline{\overline{x+y}} = \overline{x \downarrow y}$$
$$= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$

Q54 – Le OU Exclusif constitue-t-il un système complet ? Justifiez votre réponse.

<u>Réponse</u> : Non car on ne pourra pas remplacer l'opérateur négations ou des « ET » logiques par uniquement des « OU » logiques

Q55 – Soit $f(x,y,z) \;=\; x.y.z + y.\bar{z}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $x \uparrow y = \overline{x.y}$

  <u>Réponse</u> : Simplifions d'abord notre fonction :

  $\boldsymbol{f(x,y,z) \;=\; x.y.z + y.\bar{z} = y.(x.z + \bar{z})}$

  $\boldsymbol{= y.(\bar{z} + x.z) = y.(\bar{z} + x) = y.(x + \bar{z})}$

$$f(x,y,z) = x \cdot y + y \cdot \bar{z}$$
$$= \overline{\overline{x \cdot y + y \cdot \bar{z}}}$$
$$= \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot \bar{z}}}$$
$$= (x \uparrow y) \uparrow (y \uparrow \bar{z})$$
$$= (x \uparrow y) \uparrow [y \uparrow (z \uparrow z)]$$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $x \downarrow y = \overline{x + y}$

$$f(x,y,z) = y.(x + \bar{z})$$

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{y \cdot (x + \bar{z})}}$$
$$= \overline{\bar{y} + (\overline{x + \bar{z}})}$$
$$= \bar{y} \downarrow (x \downarrow \bar{z})$$
$$= (y \downarrow y) \downarrow [x \downarrow (z \downarrow z)]$$

Q56 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$f_1(a,b,c) \;=\; a.b + a.\bar{c} + b.c$$
$$f_2(a,b,c) \;=\; \overline{c\,.(\,\bar{a} + b\,)}$$

<u>Indication</u> : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

<u>Réponse</u> :

$f_1(a,b,c) \;=\; a.b + a.\bar{c} + b.c$

$= a.b.(c + \bar{c}) + a.\bar{c}.(b + \bar{b}) + (a + \bar{a}).b.c$

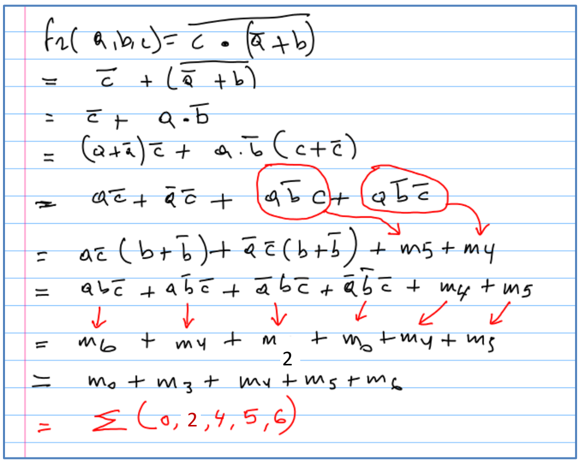
$= a.b.c + a.b.\bar{c} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.c + \bar{a}.b.c$

$= a.b.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.c$

$= m_7 + m_6 + m_4 + m_3$

$= \sum(3,4,6,7)$

$f_2(a,b,c) = \overline{c.(\overline{a}+b)}$



En résumé :

$f_1(a,b,c) = \sum(3,4,6,7)$

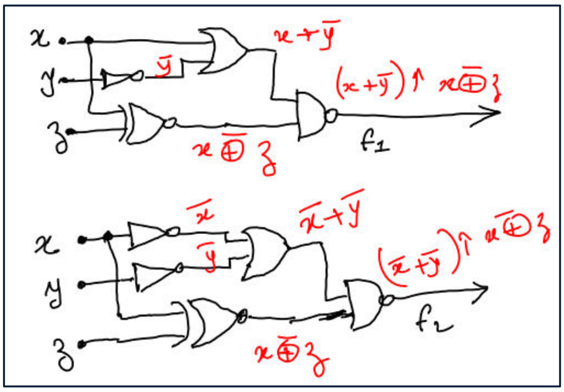
$f_2(a,b,c) = \sum(0,2,4,5,6)$

Ce qui nous donne la table de vérité suivante :

	a b c	$f_1(a,b,c)$	$f_2(a,b,c)$
m_0	0 0 0	0	1
m_1	0 0 1	0	0
m_2	0 1 0	0	1
m_3	0 1 1	1	0
m_4	1 0 0	1	1
m_5	1 0 1	0	1
m_6	1 1 0	1	1
m_7	1 1 1	1	0

Q57 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

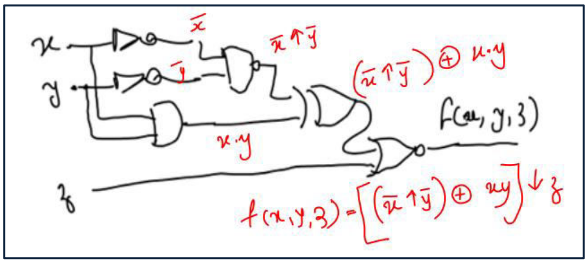
$f_1 = (x+\overline{y}) \uparrow (x \overline{\oplus} z)$ et $f_2 = (\overline{x}+\overline{y}) \downarrow (x \overline{\oplus} z)$

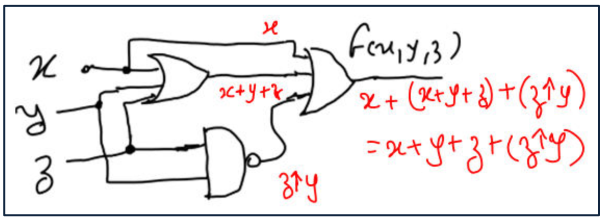


Séance 10 (Semaine : 9 au 13 décembre 2018)

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q58 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous :





Q59 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)*** = **Σ(0,2,4,8,11,13)**

	(x,y,z,t)	*F(x,y,z,t)*
m_0	0000	1
m_1	0001	0
m_2	0010	1
m_3	0011	0
m_4	0100	1
m_5	0101	0
m_6	0110	0
m_7	0111	0
m_8	1000	1
m_9	1001	0
m_{10}	1010	0
m_{11}	1011	1
m_{12}	1100	0
m_{13}	1101	1
m_{14}	1110	0
m_{15}	1111	0

Q60 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

yz→ / tu ↓	00	01	11	10
00				
01		X		
11	X	■	X	
10		X		

yz→ / tu ↓	00	01	11	10
00				
01				X
11	X		X	■
10				X

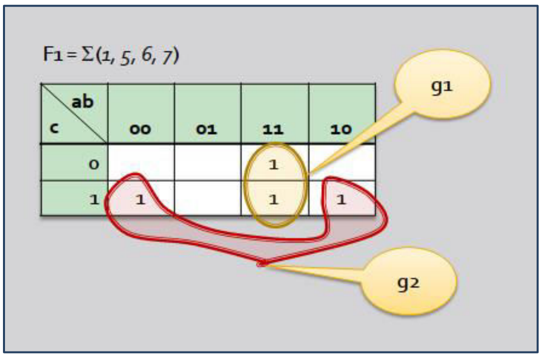
	x							
	0				1			
yz→ / tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00		X						
01	X		X				X	
11		X						
10								

Q61 – Simplifiez par la méthode de Karnaugh *F1 et F2* :

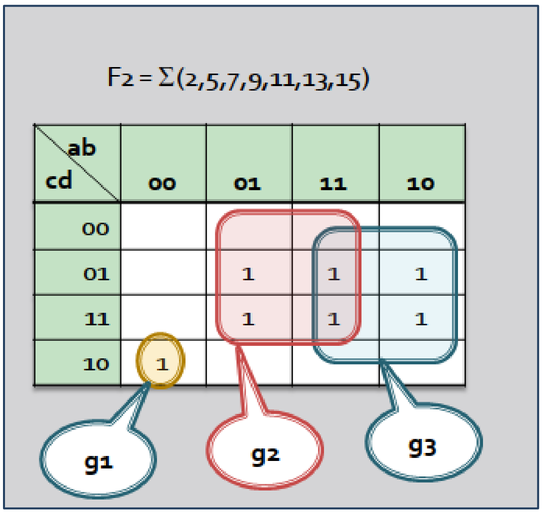
F1(a,b,c) = Σ(1, 5, 6, 7)

F2(a,b,c,d) = Σ(2, 5, 7, 9, 11, 13, 15)

Simplification de la fonction f1 :



$$g_1 = ab$$
$$g_2 = \bar{b}c$$
$$f_1(a,b,c) = ab + \bar{b}c$$



$$g_1 = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$$
$$g_2 = b.d$$
$$g_3 = a.d$$
$$f_2(a,b,c,d) = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + a.d + b.d$$