Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Mai 2023
Durée :01 heure 30

Examen de remplacement de MATHS 2

Exercice 1. (**06 pts**)

1. En utilisant l'intégration par par parties, calculer $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.
2. a) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx$.

   b) En déduire : $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-3e^{-x}+2}dx$.

Exercice 2. (**08 pts**)

I. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - x^2 y = \sqrt{x+1}e^{\frac{x^3}{3}} \qquad (E_1)$$

II. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 4y = \sin x \qquad (E_2)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2. Déterminer les constantes α et β pour que $y_p(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ soit une solution particulière de (E_2).
3. Déterminer la solution générale de (E_2).
4. Trouver la solution de l'équation (E_2) vérifiant $y(0) = \frac{1}{5}$ et $y'(0) = \frac{1}{5}$.

Exercice 3. (**06 pts**)

On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S})\begin{cases} x-3y+6z=-1 \\ 6x-8y+12z=2 \\ 3x-3y+4z=3 \end{cases}$$

1. Écrire le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle $A\cdot X = B$.
2. Calculer $A\left(\dfrac{A+Id_3}{2}\right)$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1}.
4. Résoudre le système linéaire $(\mathcal{S})$:
   a. En utilisant la méthode de la matrice inverse.
   b. En utilisant la méthode de Gauss.

Bon courage

Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Mai 2023
Durée :01 heure 30

Corrigé de l'examen de remplacement de MATHS 2

Exercice 1. (**06 pts**)

1. Intégrons par partie : $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$
   Posons : $u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u(x) = \operatorname{tg} x$
   $v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$ (**1 pt**)
   D'où :
   $$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}. \qquad (\textbf{1 pt})$$

2. a) Calculons l'intégrale suivante : $\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx$
   On a : $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ et
   $$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}. \qquad (\textbf{0.5 pt})$$
   Par identification, on obtient :
   $$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 3-4b=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}, \qquad (\textbf{0.5 pt})$$
   d'où
   $$\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x+3)}\right)dx$$
   $$\int \frac{x}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| + c, c \in \mathbb{R}. \qquad (\textbf{1 pt})$$
   b)En déduire : $\int \frac{e^x}{e^x-3e^{-x}+2}dx$

   Posons : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ (**0.5 pt**)
   $$\int \frac{e^x}{e^x-3e^{-x}+2}dx = \int \frac{1}{t-3\frac{1}{t}+2}dt = \int \frac{t}{t^2+2t-3}dt \qquad (\textbf{1 pt})$$
   d'après la question précédente
   $$\int \frac{e^x}{e^x-3e^{-x}+2}dx = \frac{1}{4}\ln|e^x-1| + \frac{3}{4}\ln|e^x+3| + c, c \in \mathbb{R}. \qquad (\textbf{0.5 pt})$$

Exercice 2. (**8 pts**)

I. L'équation $y' - x^2 y = \sqrt{x+1}e^{\frac{x^3}{3}}$ est une équation différentielle du premier ordre linéaire.

- Résolution de l'équation sans second membre :

$$\begin{aligned} y' - x^2 y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = x^2 dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \qquad \textbf{(1 pt)} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{\frac{1}{3}x^3 + c} = \pm e^c e^{\frac{1}{3}x^3} \end{aligned}$$

$$D' \text{ où : } y_h = k e^{\frac{x^3}{3}} \text{ avec } k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

- Recherche d'une solution particulière en utilisant la variation de la constante :

On cherche une solution particulière $y_p = k(x)e^{\frac{x^3}{3}}$,**(0,5 pt)** alors

$$y_1' = k'(x)e^{\frac{x^3}{3}} + x^2 k(x) e^{\frac{x^3}{3}} \textbf{(0,5 pt)}$$

On remplace y_p et y_p' dans (E_1) on trouve :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{E_1}) \Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x^3}{3}} + x^2 k(x)e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 k(x) e^{\frac{x^3}{3}} &= \sqrt{x+1}e^{\frac{x^3}{3}} \\ \Rightarrow k'(x) &= \sqrt{x+1} \qquad \textbf{(1,5 pt)} \\ \Rightarrow k(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{et } y_p = (\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c)e^{\frac{x^3}{3}}, c \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \gamma\right) e^{\frac{x^3}{3}}, \gamma \in \mathbb{R}. \textbf{(0,5 pt)}$$

II. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 4y = \sin x$$

1. Résolution de l'équation différentielle homogène correspondante.

L'équation homogène associé est

$$y'' - 4y = 0 \quad (Eh_2) \textbf{ (0,5 pt)}$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0 \quad (Er)$(**0,5 pt**)

$$\Delta = 1 - > 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -2$$

La solution générale est $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}, A, B \in \mathbb{R}$ (**0,5 pt**).

2. Détermination des constantes α et β pour que $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ soit une solution particulière de (E_2).

On a :

$$y_p' = -\alpha \sin x + \beta \cos x$$

et

$$y_p'' = -\alpha \cos x - \beta \sin x$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans l'équation (E_2) on obtient :

$$(E_2) \Rightarrow -\alpha \cos x - \beta \sin x - 4\alpha \cos x - 4\beta \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow -5\alpha \cos x - 5\beta \sin x = \sin x$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} -5\alpha = 0 \\ -5\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \frac{-\sin x}{5}. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

3. Déterminons la solution générale de (E_2).

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{-2x} - \frac{\sin x}{5}, A, B \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(0,5 pt)} \end{aligned}$$

est l'équation générale de (E_2).

4. Trouver la solution de l'équation (2) vérifiant $y(0) = \dfrac{1}{5}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{5}$.

$y'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} - \dfrac{\cos x}{5}$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{5} \\ y'(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{5} \\ 2A - 2B = \frac{2}{5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = 0 \end{cases}.$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{\sin x}{5} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Exercice 3. (**06 pts**)

On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S})\begin{cases} x-3y+6z=-1 \\ 6x-8y+12z=2 \\ 3x-3y+4z=3 \end{cases}$$

1.Écriture matricielle : $(S) \Longleftrightarrow A\times X=b$, avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \textcolor{red}{(\textbf{1 pt})}$$

2. Calculons $A\left(\dfrac{A+Id_3}{2}\right)$

On a :

$$A+Id_3=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

puis

$$\frac{A+Id_3}{2}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \ \textcolor{red}{(\textbf{0,5 pt})}$$

et

$$A\left(\frac{A+Id_3}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \textcolor{red}{(\textbf{1 pt})}$$

3. En déduire A^{-1}.

On a : $A\left(\dfrac{A+Id_3}{2}\right)=Id_3$.Donc A est inversible $\textcolor{red}{(\textbf{0,5 pt})}$

et son inverse est :

$$A^{-1}=\frac{A+Id_3}{2}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \ \textcolor{red}{(\textbf{0,5 pt})}$$

4. Résolution le système linéaire $(\mathcal{S})$:

a. En utilisant la méthode de la matrice inverse.

On a : $X=A^{-1}b$ $\textcolor{red}{(\textbf{0,5 pt})}$, donc

$$\textcolor{red}{(\textbf{0,5 pt})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

b. En utilisant la méthode de Gauss.

$$(\text{S2}) \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 6z = -1 & L_1 \\ 6x - 8y + 12z = 2 & L_2 \\ 3x - 3y + 4z = 3 & L_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 6z = -1 & L_1 \\ 0 + 10y - 24z = 8 & L_2 - 6L_1 \\ 0 + 6y - 14z = 6 & L_3 - 3L_1 \end{array} \right. \qquad \textcolor{red}{(\mathbf{0{,}5\ pt})}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 3y + 6z = -1 & L_1 \\ 0 + 10y - 24z = 8 & L_2 \\ 0 + 0 + \frac{4}{10}z = \frac{12}{10} & L_3 - \frac{6}{10}L_2 \end{array} \right. \qquad \textcolor{red}{(\mathbf{0{,}5\ pt})}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{8 + 24z}{10} \\ x = -1 - 6z + 3y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ y = 8 \\ x = 5 \end{array} \right. \qquad \textcolor{red}{(\mathbf{0{,}5\ pt})}$$

Le système (S) possède donc l'unique solution $(5, 8, 3)$.