Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2022-2023

Examen de l'analyse II   Parcours Ingénieur   Durée :1h30

Remarque *Les étapes nécessaires de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(07 points)*

1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = -y + 1 - 2e^x \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

2) Résoudre l'équation différentielle linéaire de second ordre suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2$$

Exercice 2 *(07 points)*

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & si \quad (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ 0, & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2) Montrer que $\forall (x,y) \in D_f : f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.
3) Etudier la continuité de f sur D_f.
4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
5) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 3 *(06 points)*

1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
   Calculer sur D l'intégrale double suivante :
   $$\iint (1 + x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$
2) Soit $V = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2] \times [0,3]$
   Calculer sur V l'intégrale triple suivante :
   $$\iiint (1+z)(e^y)(\cos x)\, dx\, dy\, dz.$$

Bonne chance

Dr. BOUKOUCHA

—————— **Corrigé de l'Examen de l'Analyse II** ——————

Exercice 1. *1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :*

07 points

$$\begin{cases} y' = -y + 1 - 2e^{x}, \\ y(0) = -3. \end{cases} \tag{1}$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2. \tag{2}$$

Solution.

1) Résoudre le problème de Cauchy (1) :

On va résoudre d'abord l'équation différentielle suivante :

$$y' = -y + 1 - 2e^{x} \tag{3}$$

L'équation homogène associée est

$$y' = -y \tag{4}$$

Remarquons que: $y = 0$ *est une solution évidente de* (4).

On suppose que $y \neq 0$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -1 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (-1)\, dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = -x + k, \ \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^{k} e^{-x}, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = ce^{-x}, \ c \in \mathbb{R} \quad \text{où } (c = \pm e^{k}). \end{aligned}$$

1,5

Alors, $y_h(x) = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$, *est la solution générale de* (4).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)\, e^{-x}$, *donc on a:* $y'(x) = c'(x)\, e^{-x} - c(x)\, e^{-x}$. *En remplaçant* y *et* y' *dans* (3) *on obtient :*

$$\begin{aligned} (3) \quad \Rightarrow \quad & c'(x)\, e^{-x} - c(x)\, e^{-x} = -c(x)\, e^{-x} + 1 - 2e^{x}, \\ \Rightarrow \quad & c'(x)\, e^{-x} = 1 - 2e^{x}, \\ \Rightarrow \quad & c'(x) = e^{x} - 2e^{2x}, \\ \Rightarrow \quad & c(x) = e^{x} - e^{2x} + \lambda, \ \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1,5

Donc, $y(x) = (e^x - e^{2x} + \lambda) e^{-x} = 1 - e^x + \lambda e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $y(x) = 1 - e^x + \lambda e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (3).

Pour le problème de Cauchy (1) on a : $y(0) = -3 \ \Rightarrow \ \lambda = -3$.

Donc, $y(x) = 1 - e^x - 3e^{-x}$, est la solution du problème de Cauchy (1).

1

2) Résoudre l'équation différentielle (2) *suivante:*

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{5}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{6}$$

On a : $\triangle = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$, les racines de l'équation (6) sont : $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (5) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

1

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (2) :

On a le second membre de l'équation (2) est

$$f(x) = 4 - 4x^2 = (1 - x^2) e^{0.x}.$$

0,5

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (6), donc on cherche la solution particulière de (2) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) e^{0.x} = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \ \ a, b, c \in \mathbb{R},$$

0,5

alors, $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$.

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans l'équation (2) on obtient :

$$(2) \Rightarrow 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 4 - 4x^2,$$
$$\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 1 - x^2.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = -4 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = -6, \\ c = -5 \end{cases}$$

0,5

donc, la solution particulière y_p *de* (2) *est* $y_p(x) = -2x^2 - 6x - 5$.

Alors, $Y(x) = y(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} - 2x^2 - 6x - 5$, A *et* $B \in \mathbb{R}$.

est la solution générale de l'équation (2).

0,5

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie comme suit:*

07 points

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \\ \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Déterminer D_f *le domaine de définition de la fonction* f.

2) Montrer que: $\forall (x,y) \in D_f : f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

3) Etudier la continuité de f *sur* D_f.

4) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *pour tout couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

5) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solution.

1) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction* f*:*

On a: $D_f = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\}$.

1

2) Montrons que: $\forall (x,y) \in D_f : 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

On a: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)^2 \geq 0$, *d'où* $x^2+y^2-2xy \geq 0$, *donc:* $x^2+y^2 \geq 2xy$, *alors* $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Donc, $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(xy).(xy)}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$,

d'où, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

1

3) Etudions la continuité de f *sur* D_f.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$*: la fonction* f *est une fonction rationnelle, elle est continue.*

Pour $(0,0)$, *on a:* $0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

Donc,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) = 0$, *d'après théorème d'encadrement on a:* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, *alors* f *est continue en* $(0,0)$.

D'où, f *est continue sur* D_f. 1

4) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *pour tout couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

On a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\left(2xy^2\right)\left(x^2+y^2\right) - (2x)\left(x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$ 1

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\left(2yx^2\right)\left(x^2+y^2\right) - (2y)\left(x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$ 1

5) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0,$$ 1

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0.$$ 1

Exercice 3. *1) Soit* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

Calculer sur D *l'intégrale double suivante :* $\iint_D \left(1+x^2+y^2\right) dxdy$

2) Soit $V = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2] \times [0,3]$

Calculer sur V *l'intégrale triple suivante:* $\iiint_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz$

Solution.

1) Calculons $\iint_D \left(1+x^2+y^2\right) dxdy$, *où* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$

En utilisant les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad et \quad |\det J| = r$$ 0,5

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D \left(1+x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_\triangle \left(1+r^2\right) rdrd\theta,$

où $\triangle = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$ 0,5

Alors,

$1+x^2+y^2$

$$\iint\limits_D \cancel{y^2}\, dxdy = \iint\limits_\triangle \left(1+r^2\right) rdrd\theta = \int_0^2\int_0^{2\pi} \left(r+r^3\right) drd\theta = \left(\int_0^2 \left(r+r^3\right) dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right)$$ 1

$$= \left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 . \left[\theta\right]_0^{2\pi} = (2+4)\,(2\pi) = 12\pi.$$ 1

2) Calculons $\displaystyle\iiint\limits_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz$ *où* $V = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2] \times [0,3]$

On a :

$$\iiint\limits_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^3 (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz,$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\, dx\right)\left(\int_0^2 e^y dy\right)\left(\int_0^3 (1+z)\, dz\right)$$ 1

$$= \left(\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\left[e^y\right]_0^2\right)\left(\left[z + \frac{1}{2}z^2\right]_0^3\right)$$ 1

$$= (1)\left(e^2-1\right)\left(3+\frac{9}{2}\right) = \frac{15}{2}\left(e^2-1\right).$$

Donc, $\displaystyle\iiint\limits_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz = \frac{15}{2}\left(e^2-1\right).$ 1

Chargé de Cours: R. BOUKOUCHA