Université Abderrahmane Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Cours et exercices corrigés d'analyse II
Matière : Analyse II

Conformément au Programme de
Première Année Parcours Ingénieur
Domaine Sciences de Technologie

Rédigé Par :
Dr. Rachid BOUKOUCHA

Année Universitaire 2022 –2023

Table des matières

Préface

Ce polycopié couvre le programme officiel d'Analyse II de première année du Domaine Sciences et Technique - Parcours Ingénieur-, qui est consacré au programme du deuxième semestre de la matière Analyse 2. Dans ce polycopié, nous avons inclus de nombreux exemples typiques d'applications et nous avons proposé quelques exercices importants à la fin de chaque chapitre. Nous espérons que ce polycopié apportera une aide aux étudiants et leur permettra de mieux aborder les notions et méthodes nouvelles introduites au début des études supérieures en Analyse qui constituent la base des mathématiques à l'université.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes qui ont expertisé ce modeste ouvrage. Grâce à leurs commentaires nous avons pu améliorer la présentation du présent manuscrit dans sa forme et dans son contenu. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes. Comme toute première version de tout ouvrage, ce recueil peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous les signaler afin d'améliorer la présentation et le contenu du présent manuscrit, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr) ou (rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz).

Le contenu de la matière d'Analyse II est :

Chapitre I : Equations différentielles ordinaires

I-1. Equations différentielles ordinaires du premier ordre

1- Note Historique, modèle physique conduisant à une équation différentielle.

2- Notions générales sur les équations différentielles du premier ordre.

2.1 Equations à variables séparées et séparables. 2.2 Equations homogènes du premier ordre. 2.3 Equations se ramenant aux équations homogènes.

2.4 Equations linéaire du premier ordre. 2.5 Equation de Bernoulli.

2- Equations différentielles du second ordre

2.1 Note Historique. 2.2 Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales.

2.3 Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants.

2.4 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants.

2.5 Equations linéaires non homogènes du second ordre.

2.6 Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants.

Chapitre 2 : Fonctions de plusieurs variables. Notions de limite, continuité, dérivées partielles, différentiabilité

2.1 Note historique. 2.2 Domaine de définition.

2.3 Notion de limite. Introduction. Notion de voisinage. Définition de la limite d'une fonction de deux variables.

2.4 Continuité des fonctions de deux variables.

2.5 Dérivées partielles d'ordre un. Dérivées partielles d'ordre deux. Continuité et existence des dérivées partielles d'ordre un.

2.6 Définition des fonctions différentiables.

- Cas des fonctions d'une variable réelle. Définition des fonctions différentiables.

- Cas des fonctions de deux variables. Relation entre fonction différentiable et existence des dérivées partielles. Relation entre différentiabilité et continuité.

2.7 Notion de différentielle d'une fonction de deux variables.

2.8 Dérivées partielles des fonctions composées. Dérivées partielles des fonctions composées du type 1. Dérivées des fonctions composées du type 2.

2.9 Formule de Taylor des fonctions de 2 variables. Dérivées partielles d'ordre $n, n > 2$.

2.10 Optimisation différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Définitions d'optimum local et global. Conditions nécessaires d'optimalité. Conditions suffisantes d'optimalité.

Chapitre 3 : **Intégrales Doubles, Intégrales Triples**

1. Intégrales doubles

1.1 Définition de l'intégrale double. 1.2 Exemples. 1.3 Propriétés de l'intégrale double

1- Linéarité, 2- Conservation de l'ordre, 3- Additivité.

1.4 Théorème de Fubini dans le cas d'un domaine borné $\mathbb{R}$.

1.5 Calcul des intégrales doubles. 1- Calcul direct,

2- Changement de variables dans une intégrale double (Formule de changement de variables).

1.6 Applications : Centre de gravité, Moment d'inertie.

2. Intégrales Triples

2.1 Généralisation de la notion d'intégrales doubles aux intégrales triples.

2.2 Calcul d'une intégrale triple

1- Calcul direct, 2- Calcul par changement de variables (Formule de changement de variables pour une intégrale triple),

3- Volume sous le graphe d'une fonction de deux variables, 4-Calcul de volume de certains corps solides. 2.3 Applications : Centre de gravité, Moment d'inertie.

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Les lois de la physique et de la mécanique ainsi que de nombreux phénomènes chimiques, biologiques ou économiques se ramènent à la recherche de fonctions dont les dérivées vérifient certaines relations.

1.1.1 Un exemple en Physique

Considérons l'exemple d'un mobile glissant sur un plan incliné avec frottements. Il s'agit d'appliquer le principe fondamental de la Dynamique. Voici le schéma correspondant à cette situation : On peut écrire, d'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Les forces mises en jeu sont $\vec{P}$, le poids du mobile, $\vec{R}$ la réaction au support et $\vec{f}$, la force de frottement telle que $\vec{f} = -\beta\vec{v}$, avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.Projetons sur l'axe du mouvement, on obtient :

$$mg\sin\alpha - \beta v = m\frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m}v = g\sin\alpha.$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La plupart des situations en Physique peuvent se modéliser à l'aide d'équations différentielles. Évidemment, plus le modèle est sophistiqué, plus les équations différentielles seront compliquées à résoudre.

1.2 Généralités

Définition 1.1 *On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue y d'une variable x et ses dérivées de différents ordres*

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

où F est une relations liant x à la fonction y et ses dérivés $y', ..., y^{(k)}$.

*On appelle "**ordre**" de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée, figurant dans l'équation.*

Une telle équation différentielle (1.1) est dite équation différentielle ordinaire (EDO).

Exemple 1.1 $y'' + (y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.
$y' + xy + \frac{x}{x+1} = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.
$x^2 y'' + xy' + 2y^4 = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.
$xy''' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 3.
$y''' + 2y^{(8)} = xe^x y'$ *est une équation différentielle d'ordre* 8.

Définition 1.2 *On appelle "solution" (ou intégrale) de l'équation différentielle* (1.1) *tout couple* (I, f) *formé d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et d'une fonction* f, *vérifiant les conditions suivantes :*

1) f *est* $k-$*fois dérivable sur* I.

2) $\forall x \in I$, $F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(k)}(x)\right) = 0$.

Si f *est une solution de l'équation différentielle* (1.1), *alors le graphe de* f *est appelé courbe intégrale de cette équation.*

Définition 1.3 *Si la seule solution prolongeant* f, *est* f *elle même, on dira alors que* f *est une "solution maximale".*

Exemple 1.2 $y = e^x$ *est une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y'' - y = 0$. *(*$y = e^x$ *est une solution maximale).*

Remarque 1.1 *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.*

1.3 Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.4 *La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est :*

$$F(x, y, y') = 0,$$

où F *est une relations liant* x *à la fonction* y *et sa dérivée* y'.

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$, *où* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple 1.3 $xy' + 2y^4 + \ln x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.
$xy' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.
$x(y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.
$y' = xy^3 + \dfrac{x}{x+1}$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

Problème de Cauchy : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation $y' = f(x,y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0), x_0 \in I$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x,y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

1.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Définition 1.5 *On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme :*

$$f(y)\, y' = g(x),$$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

On a : $y' = \dfrac{dy}{dx}$, donc l'équation peut s'écrire aussi comme :

$$f(y)\, dy = g(x) dx.$$

Résolution d'une équations différentielles à variables séparées :

Une telle équation différentielle à variables séparées se résout par calcul de primitives de f et g comme suit :

On a :

$$\begin{aligned} f(y)\, y' = g(x) &\Longrightarrow f(y)\, dy = g(x)dx \\ &\Longrightarrow \int f(y)\, dy = \int g(x)dx \\ &\Longrightarrow F(y) = G(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur J .

Enfin, on va résoudre cette équation (algébrique) : $F(y) = G(x) + c$ de l'inconnu y.

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.4 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + e^y = 0. \tag{1.2}$$

On commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned}
(1.2) &\Rightarrow xy' = -e^{y},\\
&\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -e^{y},\\
&\Rightarrow -e^{-y}dy = \frac{1}{x}dx, \ \textit{(en supposant } x \neq 0\textit{)},\\
&\Rightarrow \int \left(-e^{-y}\right) dy = \int \frac{1}{x}dx,\\
&\Rightarrow e^{-y} = \ln|x| + c, \ c \in \mathbb{R}.\\
&\Rightarrow -y = \ln\left(\ln|x| + c\right), \ c \in \mathbb{R} \ \textit{(en supposant } \ln|x| + c > 0\textit{)},\\
&\Rightarrow y\left(x\right) = -\ln\left(\ln|x| + c\right), \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alors

$$y\left(x\right) = -\ln\left(\ln|x| + c\right) \ \textit{où } c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle (1.2).

Exemple 1.5 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\left(1 + x^2\right) y' - xy = 0. \tag{1.3}$$

On a : $y = 0$ *est une solution triviale (évidente) de* (1.3). *On suppose que* $y \neq 0$, *et on commence par séparer les variables :* x *d'un côté et* y *de l'autre côté.*

On a :

$$\begin{aligned}
(1.3) &\Rightarrow \left(1 + x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy,\\
&\Rightarrow \left(1 + x^2\right) dy = xydx,\\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{1 + x^2}dx,\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1 + x^2}dx,\\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + c/ \ c \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow |y| = e^{\ln\sqrt{1+x^2} + \ln k}/ \ k \in \mathbb{R}, \ \textit{où } \left(c = \ln k\right),\\
&\Rightarrow |y| = e^{\ln\left(k\sqrt{1+x^2}\right)}/ \ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow |y| = k\sqrt{1 + x^2}/ \ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow y = \pm k\sqrt{1 + x^2}/ \ k \in \mathbb{R},\\
&\Rightarrow y = \lambda\sqrt{1 + x^2}/ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \textit{où } \left(\lambda = \pm k\right).
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation (1.3) *sont :*

$$y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2}/\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Equations différentielles homogènes en x et y.

Définition 1.6 *On appelle "équations différentielles homogènes en x et y" toute équation de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équations différentielles homogènes :

On utilise ce changement d'inconnue $u = \frac{y}{x}$ $(y = xu)$ qui donne $y' = u + xu'$. Par suite on a :

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = f(u), \\ &\Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u,\ (u' = \frac{du}{dx}), \\ &\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + c/\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On détermine u puis y, on obtient la solution générale grâce à la relation $y = xu$.

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0. \tag{1.4}$$

Si on suppose que $xy \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1.4) &\Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \\ &\Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}, \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$, *on remplace dans* (1.4)

$$
\begin{aligned}
(1.4) \quad &\Rightarrow \quad u + xu' = u - \frac{1}{u}, \\
&\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-1}{u}, \\
&\Rightarrow \quad udu = -\frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \int udu = \int -\frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = -\ln|x| + c/\ c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{-2\ln|x| + 2c}/\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Mais : $y = xu$, *d'où*

$$y(x) = \pm x\sqrt{-2\ln|x| + 2c}/\ c \in \mathbb{R},$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (1.4) .

Exemple 1.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$x^2y' - xy + y^2 = 0. \tag{1.5}$$

Si on suppose que $x \neq 0$, *on a :*

$$
\begin{aligned}
(1.5) \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}, \\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2,
\end{aligned}
$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$, *on* *remplace dans* (1.5) :

$$
\begin{aligned}
(1.5) \quad &\Rightarrow \quad u + xu' = u - u^2, \\
&\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = -u^2, \\
&\Rightarrow \quad \frac{-du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{u} = \ln|x| + c / \ c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad u = \frac{1}{c + \ln|x|} / \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Mais : $y = xu$, *d'où,* $y(x) = \dfrac{x}{c + \ln|x|} / \ c \in \mathbb{R}$, *est la solution générale de l'équation différentielle* (1.5) .

1.3.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.7 *On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{1.6}$$

où a *et* b *sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)\, y. \tag{1.7}$$

L'équation (1.7) *est dite équation différentielle homogène associée à l'équation* (1.6) *(ou l'équation sans second membre).*

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

a) Résolution de l'équation homogène (1.7) :

Soit l'équation (1.7)

$$y' = a(x)\, y.$$

Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(1.7) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = \int a(x)dx + k / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |y| = \exp\left(\int a(x)dx + k\right) / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où, $y_h(x) = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.7).

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 1.1 *La solution générale y de (1.6) est la somme de la solution générale y_h de (1.7) et d'une solution particulière de (1.6).*

$$y = y_p + y_h = y_p + c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.$$

b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a : $y_h(x) = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.7) avec c une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = c(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)$, où c est maintenant une fonction de la variable x à déterminer.

On pose :

$$y(x) = c(x)\exp\left(\int a(x)dx\right),$$

donc,

$$y'(x) = c'(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)$$

En remplaçant y et y' dans (1.6) on obtient :

$$c'(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)+a(x)c(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)=a(x)c(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)+b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)=b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x)=b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right),$$

par conséquent

$$c(x)=\int\left(b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)\right)dx+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (1.6) est

$$y(x)=\left(\int\left(b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)\right)dx+\lambda\right)\exp\left(\int a(x)dx\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Exemple 1.8 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'=3y+1-2e^x, \tag{1.8}$$

puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'=3y+1-2e^x, \\ y(0)=2. \end{cases} \tag{1.9}$$

L'équation homogène associée est

$$y'=3y \tag{1.10}$$

Remarquons que : $y=0$ est une solution évidente de (1.84).

On suppose que $y\neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y}=3 \quad &\Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y}=\int 3dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y|=3x+k,\ \ k\in\mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y=\pm e^k e^{3x},\ k\in\mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y=ce^{3x},\ c\in\mathbb{R}\ \ (c=\pm e^k). \end{aligned}$$

Alors,

$$y_h(x)=ce^{3x}, c\in\mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.84).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)e^{3x} \Rightarrow y'(x) = c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x}$. *En remplaçant* y *et* y' *dans* (1.83) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.83) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x} = 3c(x)e^{3x} + 1 - 2e^{x},\\ &\Rightarrow \quad c'(x)e^{3x} = 1 - 2e^{x},\\ &\Rightarrow \quad c'(x) = e^{-3x} - 2e^{-2x},\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \left(\frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda\right)e^{3x} = \frac{-1}{3} + e^{x} + \lambda e^{3x}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(x) = \lambda e^{3x} + e^{x} - \frac{1}{3}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.83).

Pour le problème de Cauchy (1.9) *on a :*

$$\begin{aligned}y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad \lambda + 1 - \tfrac{1}{3} = 2,\\ &\Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + e^{x} - \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy (1.9).

1.3.4 Equation différentielle de Bernoulli

Définition 1.8 *On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :*

$$y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0. \tag{1.11}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ *et* a, b *sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2 *On sait déjà traiter les cas* $\alpha = 0$ *et* $\alpha = 1$, *car* (1.11) *est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (1.11), on divise par y^{α}

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)\left(\frac{y}{y^{\alpha}}\right) + b(x) = 0,$$

puis on pose : $z = \frac{y}{y^{\alpha}} = y^{1-\alpha}$ comme un changement de variable, et par conséquent : $z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}y'$ d'où $y' = \dfrac{y^{\alpha}}{1-\alpha}z'$. En remplaçant y et y' dans (1.11) on obtient :

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

Exemple 1.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + y + x^2y^2 = 0. \tag{1.12}$$

Cette équation (1.12) est de Bernoulli.

$$(1.12) \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) + x = 0, \ \textit{pour } xy \neq 0$$

En posant $z = \dfrac{1}{y}$, *on aura :* $z' = \dfrac{-1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2z'$. *En remplaçant* y *et* y' *dans (1.12) on obtient :*

$$z' = \frac{1}{x}z + x, \tag{1.13}$$

l'équation (1.13) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

L'équation homogène associée à (1.13) est

$$z' = \frac{1}{x}z. \tag{1.14}$$

Résolution de l'équation (1.14) :

$$\begin{aligned} (1.14) \quad &\Rightarrow \quad \frac{z'}{z} = \frac{1}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + k, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad |z| = e^{\ln|x|+k}, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad z = \pm e^{k}x, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad z = cx, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.14) *.*

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x$, *donc :* $z'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* z *et* z' *dans* (1.13), *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.13) \quad &\Rightarrow \quad c'(x) = 1,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \int 1dx,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où,

$$z(x) = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.13) *.*

Par conséquent : $z = \dfrac{1}{y} = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, *c'est à dire :*

$$y(x) = \frac{1}{x(x+\lambda)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (1.12) *.*

1.3.5 Equation de Riccati

Définition 1.9 *On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{1.15}$$

où a, b *et* c *sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_p pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable : $y = y_p + z$, donc $y' = y_p' + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.15) on obtient :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad y_p' + z' = a(x)(y_p+z)^2 + b(x)(y_p+z) + c(x),\\ &\Leftrightarrow \quad y_p' + z' = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_pz + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x),\\ &\Leftrightarrow \quad y_p' + z' = a(x)\left(y_p^2 + 2y_pz + z^2\right) + b(x)(y_p+z) + c(x),\\ &\Leftrightarrow \quad \left[y_p' - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right)\right] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,\\ \text{on a} \quad &: \quad y_p' - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution } (1.15).\end{aligned}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)\, y_p + b(x))\, z + a(x)\, z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

Exemple 1.10 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}. \tag{1.16}$$

(Indication : $y_p = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (1.16)).

On a : (1.16) est une équation différentielle de Riccati. Donc on pose le changement de variable : $y = \frac{1}{x} + z$, alors : $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.16) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.16) \quad &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{x^2} + z' = -\left(\tfrac{1}{x} + z\right)^2 + \tfrac{1}{x}\left(\tfrac{1}{x} + z\right) - \tfrac{1}{x^2}, \\ &\Leftrightarrow \quad z' + \tfrac{1}{x}z + z^2 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0, \tag{1.17}$$

l'équation (1.17) est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

En posant $u = \frac{1}{z}$, on aura $u' = \frac{-1}{z^2}z'$, d'où $z' = -z^2u'$. En remplaçant z et z' dans (1.17) on obtient :

$$\begin{aligned} (1.17) \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{-z^2u'}{z^2} + \tfrac{1}{x}u + 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad -u' + \tfrac{1}{x}u + 1 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$u' = \frac{1}{x}u + 1, \tag{1.18}$$

l'équation (1.18) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue u.

L'équation homogène associée à (1.18) est

$$u' = \frac{1}{x}u. \tag{1.19}$$

On a :

$$\begin{aligned} (1.19) \quad &\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}u, \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{x}dx, \quad (u' = \frac{du}{x}), \\ &\Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x| + k \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad |u| = e^{\ln|x|+k} \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad |u| = e^k\,|x| \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad u = cx, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors

$$u(x) = c(x)x, \ c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.19).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $u(x) = xc(x)$, *donc :* $u'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* u *et* u' *dans* (1.18) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.18) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)x + c(x) = \tfrac{1}{x}xc(x) + 1,\\ &\Rightarrow \quad c'(x)x = 1,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{1}{x}dx,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \ln|x| + \lambda, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.18).

On a $u = \dfrac{1}{z}$, *donc* $z = \dfrac{1}{u}$, *d'où*

$$z = \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}, \ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.17).

Mais, $y = \dfrac{1}{x} + z$, *donc*

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}, \ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.16).

1.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 1.10 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :*

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1.20}$$

où a, b sont deux constantes réelles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On lui associe l'équation sans second membre :

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{1.21}$$

Problème de Cauchy :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \text{ où } x_0 \in I, \\ y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation (1.20) et aux deux conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y_0' = y'(x_0), x_0 \in I$ consiste à chercher la solution maximale de l'équation (1.20) telle que : $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0)$.

1.4.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

On cherche des solutions du type $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $y = e^{rx}$, alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$ en remplace dans (1.21) on obtient :

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a l'équation suivante :

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{1.22}$$

L'équation (1.22) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (1.20).

Dans l'étude de l'équation caractéristique (1.22), trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\triangle = a^2 - 4b$.

Premier cas : Si $\triangle > 0$, l'équation (1.22) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si $\triangle = 0$, l'équation (1.22) admet une racine réelle double r, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{rx},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si $\triangle < 0$, l'équation (1.22) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)\, e^{\alpha x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Exemple 1.11 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{1.23}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$. *Ainsi, la solution générale de* (1.23) *est*

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.12 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \tag{1.24}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 10r + 25 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 5$. *Ainsi, la solution générale de* (1.24) *est*

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{5x}, \;\; A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.13 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = 0. \tag{1.25}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Ainsi, la solution générale de (1.25) est

$$\begin{aligned} y_0 &= (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{0x}, \\ &= A\cos 3x + B\sin 3x, \;\; A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.4.2 Résolution de l'équation linéaire non homogène

Théorème 1.14 *La solution générale maximale Y de l'équation linéaire non homogène (1.20) est la somme d'une solution maximale particulière y_p de l'équation (1.20) et de la solution générale y de l'équation homogène associée (1.21) c'est à dire :*

$$Y = y + y_p,$$

où y est la solution générale de l'équation homogène associée (1.21),
et y_p est une solution particulière de l'équation avec second membre (1.20).

Recherche de la solution particulière y_p de (1.20)

- Cas le second membre est du type $\mathbf{e^{\alpha x}P(x)}$:

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^m e^{\alpha x}Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P et m la multiplicité de solution α dans l'équation caractéristique (1.22), c'est à dire :

• On pose : $y_p = e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 0)$, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).

• On pose : $y_p = xe^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique (1.22).

• On pose : $y_p = x^2e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique (1.22).

Exemple 1.15 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1. \tag{1.26}$$

Puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases} \tag{1.27}$$

On a :

$$(1.26) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0,$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0. \tag{1.28}$$

On a : $\triangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$*, les racines de l'équation* (1.28) *sont :* $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 1$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (1.21) *est*

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^{x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de* (1.26) *:*

On a :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}\right)e^{0x}.$$

Comme 0 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.28)*, donc on cherche la solution particulière de* (1.26) *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{0x} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, alors*

$$y_p^{'}(x) = c + 2bx + 3ax^2,$$

et

$$y_p^{''}(x) = 2b + 6ax.$$

On remplace y_p*,* y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.26) *on a :*

$$(1.26) \Rightarrow (2b + 6ax) + \frac{1}{2}\left(c + 2bx + 3ax^2\right) - \frac{3}{2}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}ax^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x^2 + \left(6a + b - \frac{3}{2}c\right)x + \left(2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \\ 6a + b - \frac{3}{2}c = 1, \\ 2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p *de* (1.26) *est*

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x} \ , \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.26).

Pour le problème de Cauchy (1.27) *on a :*

$$y(0) = 0, \ \text{d'où : } 3 + A + B = 0,$$

et

$$\begin{aligned} y'(0) = 4 \quad &\Rightarrow \left(x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}\right)'_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow \left(3x^2 + 2x + 4 + Ae^x - \frac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}\right)_{x=0} = 4, \\ &\Rightarrow 4 + A - \frac{3}{2}B = 4, \\ &\Rightarrow A - \frac{3}{2}B = 0. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} 3 + A + B = 0, \\ A - \frac{3}{2}B = 0. \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} A = -\frac{9}{5}, \\ B = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3 - \frac{9}{5}e^x - \frac{6}{5}e^{-\frac{3}{2}x} \ ,$$

est la solution de problème du Cauchy (1.27).

Exemple 1.16 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}. \tag{1.29}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \tag{1.30}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0. \tag{1.31}$$

On a : $\triangle = (-4)^2 - 4(4) = 0$, *la racine double de l'équation* (1.31) *est* $r_1 = r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.30) *est*

$$y(x) = (Ax + B)e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de* (1.29) *:*

On a : $f(x) = e^{2x} = 1e^{2x}$.

Comme 2 *est une racine double de l'équation caractéristique* (1.31), *nous devons chercher une solution particulière de l'équation* (1.29) *sous la forme :*

$$y_p(x) = kx^2e^{2x}, k \in \mathbb{R},$$

donc

$$y_p'(x) = \left(2kx^2 + 2kx\right)e^{2x},$$

et

$$y_p''(x) = \left(4kx^2 + 8kx + 2k\right)e^{2x},$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans* (1.29) *on a :*

$$\left(4kx^2 + 8kx + 2k\right)e^{2x} - 4\left(2kx^2 + 2kx\right)e^{2x} + 4\left(kx^2e^{2x}\right) = e^{2x},$$

on obtient : $2ke^{2x} = e^{2x}$ *d'où* $k = \frac{1}{2}$.

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.29) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.29).

Exemple 1.17 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' + y = (x+2)\,e^{x}. \tag{1.32}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0, \tag{1.33}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0. \tag{1.34}$$

On a : $\triangle = (-2)^2 - 4\,(1) = 0$*, la racine double de l'équation* (1.34) *est* $r_1 = r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (1.33) *est*

$$y\,(x) = (Ax + B)\,e^{x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (1.32) *:*

On a : $f\,(x) = (x+2)\,e^{1x}$.

Comme 1 *est une racine double de l'équation caractéristique* (1.34)*, nous devons chercher une solution particulière* y_p *de* (1.32) *sous la forme :*

$$y_p\,(x) = x^2\,(ax+b)\,e^{x} = \left(ax^3 + bx^2\right)e^{x},$$

où a *et* $b \in \mathbb{R}$.

Donc

$$y_p'\,(x) = \left(ax^3 + (3a+b)\,x^2 + 2bx\right)e^{x},$$

et

$$y_p''\,(x) = \left(ax^3 + (6a+b)\,x^2 + (6a+4b)\,x + 2b\right)e^{x},$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.32) *on a :*

$$(1.32) \Rightarrow (6ax + 2b)\,e^{x} = (x+2)\,e^{x}.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6a = 1, \\ 2b = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6}, \\ b = 1. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.32) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)e^x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax+B)e^x + \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2\right)e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est une solution générale de (1.32).

- Cas le second membre est du type : $(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Si $f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

• $y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).

• $y_p = xe^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique (1.22).

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré n avec

$$n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}.$$

Exemple 1.18 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 4y = \cos x. \tag{1.35}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0, \tag{1.36}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0. \tag{1.37}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, *l'équation (1.37) admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 2i, \overline{r} = -2i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.36) est*

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation (1.35) :

On a : $f(x) = \cos x$

Comme i *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.37)*, donc on cherche la solution particulière* y_p *de* (1.35) *sous la forme :*

$$y_p(x) = h\cos x + k\sin x, h \text{ et } k \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p^{'}(x) = -h\sin x + k\cos x,$$

et

$$y_p^{''}(x) = -h\cos x - k\sin x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.35) *on a :*

$$\begin{aligned}(1.35) \quad &\Rightarrow \quad (-h\cos x - k\sin x) + 4(h\cos x + k\sin x) = \cos x,\\ &\Rightarrow \quad 3h\cos x + 3k\sin x = \cos x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3h = 1, \\ 3k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{3}, \\ k = 0. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.35) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{3}\cos x$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.35).

Exemple 1.19 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = \sin 3x. \tag{1.38}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 9y = 0, \tag{1.39}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0. \tag{1.40}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(9) = -36 < 0$, *donc l'équation* (1.40) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 3i, \overline{r} = -3i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (1.39) *est*

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (1.38) *:*

On a : $f(x) = \sin 3x$.

Comme $3i$ *est une racine de l'équation caractéristique* (1.40), *donc on cherche la solution particulière* y_p *de l'équation* (1.38) *sous la forme :*

$$y_p(x) = x(h\cos 3x + k\sin 3x)e^{0x} = hx\cos 3x + kx\sin 3x, h \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y_p^{'}(x) = (3kx + h)\cos 3x + (k - 3hx)\sin 3x,$$

et

$$y_p^{''}(x) = (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.38) *on a :*

$$\begin{aligned}(b) \quad &\Rightarrow (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x + 9(hx\cos 3x + kx\sin 3x) = \sin 3x,\\ &\Rightarrow 6k\cos 3x + (-6h)\sin 3x = \sin 3x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6k = 0, \\ -6h = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0, \\ h = \dfrac{-1}{6}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.38) *est*

$$y_p(x) = \frac{-1}{6}x\cos 3x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A\cos 3x + B\sin 3x - \frac{1}{6}x\cos 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (1.38).

Principe de superposition :

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière y_p est donnée par :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

et y_{p_2} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Exemple 1.20 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \tag{1.41}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \tag{1.42}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{1.43}$$

On a : $\triangle = (-5)^2 - 4(6) = 1,$ *les racines de l'équation* (1.43) *sont :* $r_1 = 2, r_2 = 3.$

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.42) *est :*

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (1.41) *:*

D'après le principe de superposition des solutions, pour trouver une solution particulière de l'équation (1.41)*, il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}, \tag{1.44}$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}. \tag{1.45}$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_1} *de l'équation* (1.44) *:*

On a : $f_1(x) = 2e^{3x}$.

Comme 3 *est une racine de multiplicité* 1 *(racine simple) de l'équation caractéristique* (1.43)*, on cherche une solution particulière de l'équation* (1.44) *sous la forme :*

$$y_{p_1}(x) = \lambda x e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y'_{p_1}(x) = \lambda e^{3x} + 3\lambda x e^{3x},$$

et

$$y''_{p_1}(x) = 6\lambda e^{3x} + 9\lambda x e^{3x},$$

on remplace y_{p_1}, y'_{p_1} *et* y''_{p_1} *dans l'équation* (1.44)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.44) \quad &\Rightarrow \quad y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \\ &\Rightarrow \quad \lambda e^{3x} = 2e^{3x},\end{aligned}$$

d'où $\lambda = 2$. *Donc la solution particulière de l'équation* (1.44) *est*

$$y_{p_1}(x) = 2xe^{3x}.$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_2} *de l'équation* (1.45) *:*

On a : $f_2(x) = e^{4x}$.

Comme 4 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.43)*, on cherche une solution particulière de* (1.45) *sous la forme :*

$$y_{p_2}(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y'_{p_2}(x) = 4ke^{4x} \ ,$$

et

$$y''_{p_2}(x) = 16ke^{4x}$$

on remplace y_{p_2}, y'_{p_2} *et* y''_{p_2} *dans l'équation* (1.45) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.45) \quad &\Rightarrow \quad 16ke^{4x} - 20ke^{4x} + 6ke^{4x} = e^{4x} \\ &\Rightarrow \quad 2ke^{4x} = e^{4x}\end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{2}$. *Donc* y_{p_2} *la solution particulière de l'équation* (1.45) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.41).

1.5 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Définition 1.11 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants toute équation de la forme :*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{1.46}$$

où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des constantes réelles.

Pour résoudre (1.46) on procède comme suit :

On cherche les solutions sous la forme : $y = e^{\lambda x}$ où λ une constante à déterminer.

Donc,

$$y = e^{\lambda x}, \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad ...., \quad y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

En remplaçons (1.46) obtient

$$\begin{aligned} (1.46) &\Leftrightarrow a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + a_n e^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda x}\left(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n\right) = 0 \end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda x} \neq 0$, on aura :

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{1.47}$$

L'équation (1.47) est appelé équation caractéristique associée à (1.46).

On cherche les racines de l'équation caractéristique (1.47). Suivant ces racines on écrit les solutions particulières en tenant compte du fait que :

a) A chaque racine réelle simple λ correspond une seule solution particulière $y_p = e^{\lambda x}$.

b) A chaque couple de racines complexe conjugué $\lambda = a \pm bi$ correspond deux solutions particulières : $e^{ax} \cos bx$ et $e^{ax} \sin bx$.

c) A chaque racine réelle λ de multiplicité s correspond des solutions particulières: $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2 e^{\lambda x}$, $x^{s-1} e^{\lambda x}$.

d) A chaque couple $\lambda = a \pm bi$ de racines complexe conjugué de multiplicité s correspond des solutions particulières:

$$\begin{array}{l} e^{ax} \cos bx, \quad xe^{ax} \cos bx, \quad x^2 e^{ax} \cos bx, ..., \quad x^{s-1} e^{ax} \cos bx. \\ e^{ax} \sin bx, \quad xe^{ax} \sin bx, \quad x^2 e^{ax} \sin bx, ..., \quad x^{s-1} e^{ax} \sin bx. \end{array}$$

Le nombre de ces solutions particulières est égal au l'ordre de équation différentielle proposée (qui aussi degré de l'équation de l'équation caractéristique).

Si $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sont n solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (1.46), alors on écrit la solution générale de équation différentielle (1.46) sous la forme :

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x),$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des constantes réelles.

Exemple 1.21 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y''' + 2y'' + y' = 0 \tag{1.48}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \tag{1.49}$$

On a : $(1.49) \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)^2 = 0$. *Les racines de* (1.49) *sont :* $\lambda_1 = 0$ *et* $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ *.*

On a : -1 *est une racine double de* (1.49), *donc la solution générale de l'équation* (1.48) *est :*

$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3 *sont des constantes réelles.*

Exemple 1.22 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y''' + y'' + y' + y = 0 \tag{1.50}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \tag{1.51}$$

On a :

$$\left(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0\right) \Leftrightarrow (\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

Les racines de (1.51) *sont :* $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$ *, donc la solution générale de l'équation* (1.50) *est :*

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^0 \sin(x) + C_3 e^0 \cos(x), \\ &= C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 *sont des constantes réelles.*

Exemple 1.23 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y^{(4)} + 4y = 0 \tag{1.52}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 + 4 = 0 \tag{1.53}$$

On a :

$$\left(\lambda^4 + 4 = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + 2i\right)\left(\lambda^2 - 2i\right) = 0$$

Les racines de (1.53) *sont :* $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = 1 + i$ *et* $\lambda_4 = 1 - i$ *, donc la solution générale de l'équation* (1.52) *est :*

$$Y(x) = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^{x} \sin x + C_4 e^{x} \cos x,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 *sont des constantes réelles.*

Exemple 1.24 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y^{(4)} - y = 0 \tag{1.54}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 - 1 = 0 \tag{1.55}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left(\lambda^4 - 1 = 0\right) &\Rightarrow \left(\lambda^2 + 1\right)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 1 = 0 \\ \\ \lambda^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de (1.55) *sont :* $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$ *et* $\lambda_4 = -1$, *donc la solution générale de l'équation* (1.54) *est :*

$$Y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 *sont des constantes réelles.*

1.6 Exercices corrigés

Exercise 1.25 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' - y - 3 = 0 \tag{1.56}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
(1.56) &\Rightarrow xy' = y + 3, \\
&\Rightarrow \frac{y'}{y+3} = \frac{1}{x} \;(\textit{est à variables séparées}) \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{1}{x} dx, \\
&\Rightarrow ln\,|y+3| = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow |y+3| = e^{\ln|x|+c}, c \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow y + 3 = \pm e^{c} e^{\ln|x|}, c \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow y + 3 = \pm e^{c}\,|x|\,, c \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow y = -3 + kx, k = \pm e^{c} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = -3 + kx \;\; \textit{où} \;\; k \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.56).

Exercise 1.26 *a) Résoudre l'équation différentielle de premier ordre suivante :*

$$y' = 2y + \left(x^2 + 3x + 1\right) e^{2x} = 0 \tag{1.57}$$

b) Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = 2y + (x^2 + 3x + 1)\, e^{2x} = 0, \\ \\ y\,(0) = 2. \end{cases}$$

Solution.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2y + \left(x^2 + 3x + 1\right) e^{2x} = 0$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 2y \tag{1.58}$$

Remarquons que : $y = 0$ *est une solution évidente de* (1.58)*.*

On suppose que $y \neq 0$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 2 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = 2x + k,\ \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^k e^{2x},\ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = ce^{2x},\ c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors,

$$y_h\,(x) = ce^{2x}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.58)*.*

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y\,(x) = c\,(x)\, e^{2x} \Rightarrow y'\,(x) = c'\,(x)\, e^{2x} + 2c\,(x)\, e^{2x}$*. En remplaçant* y *et* y' *dans* (1.57) *on obtient :*

$$\begin{aligned} (1.57) \quad &\Rightarrow \quad c'\,(x)\, e^{2x} + 2c\,(x)\, e^{2x} = 2c\,(x)\, e^{2x} + (x^2 + 3x + 1)\, e^{2x}, \\ &\Rightarrow \quad c'\,(x)\, e^{2x} = (x^2 + 3x + 1)\, e^{2x}, \\ &\Rightarrow \quad c'\,(x) = (x^2 + 3x + 1)\,, \\ &\Rightarrow \quad c\,(x) = \textstyle\int (x^2 + 3x + 1)\, dx \\ &\Rightarrow \quad c\,(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \lambda,\ \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \lambda\right) e^{2x}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de (1.57).

b) Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = 2y + (x^2 + 3x + 1) e^{2x} = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Pour le problème de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}.0^3 + \frac{3}{2}.0^2 + 0 + \lambda\right) e^{2(0)} = 2 \\ &\Rightarrow \lambda = 2. \end{aligned}$$

Donc,

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 2\right) e^{2x},$$

est la solution du problème de Cauchy .

Exercise 1.27 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\left(1 + x^2\right)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0 \tag{1.59}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
(1.59) \quad &\Rightarrow \quad (1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} = -2x(1 + y^2) \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx \quad \textit{(cette équation est à variables séparées)} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}dy = \int \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx = -\int 2x(1+x^2)^{-2}dx \\
&\Rightarrow \quad \arctan y = -\frac{1}{-2+1}(1+x^2)^{-2+1} + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \arctan y = \frac{1}{1+x^2} + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

donc, $y(x) = \tan\left(\frac{cx^2 + c + 1}{1 + x^2}\right), c \in \mathbb{R}$ *est la solution générale de* (1.59) .

Exercise 1.28 *Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\,dx - xydy = 0, \\ \\ y\,(1) = 2. \end{cases} \tag{1.60}$$

Solution.

On va résoudre d'abord l'équation :

$$\left(x^2+y^2\right)dx - xydy = 0 \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned}
(1.61) \quad &\Rightarrow \quad (x^2+y^2)\,dx = xydy \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots (E)
\end{aligned}$$

cette équation (E) *est homogène car elle est de la forme* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

On pose le changement de variable suivant :

$$U = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xU \Rightarrow y' = U + xU',$$

puis on remplace dans (E) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Rightarrow U + xU' = \frac{1}{U} + U \\
&\Rightarrow xU' = \frac{1}{U} \\
&\Rightarrow U\frac{dU}{dx} = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow UdU = \frac{1}{x}dx \ \textit{(cette équation est à variables séparées d'inconnu } U\textit{)} \\
&\Rightarrow \int UdU = \int \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}U^2 = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow U^2 = 2\ln|x| + 2c, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow U = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2c}, c \in \mathbb{R}, \ \textit{est la solution générale de } (E)
\end{aligned}$$

Mais on a posé $y = xU$, *alors*

$$y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + 2c}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1.61).

On a $y(1) = 2$ *donc* $y(1) = \pm 1\sqrt{2\ln|1| + 2c} = 2 \Rightarrow \sqrt{2c} = \pm 2 \Rightarrow c = 2$

Alors

$$y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + 4}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution de problème de Cauchy (1.60).

Exercise 1.29 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' + y = x^2 \tag{1.62}$$

Solution.

On a : (1.62) $\Leftrightarrow y' = -y + x^2$ *(cette équation est linéaire de premier ordre).*

On va résoudre d'abord l'équation homogène associée

$$y' = -y \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}
(1.63) \quad &\Rightarrow \quad y' = -y \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -dx \quad \textit{(est variables séparées)} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = -x + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{-x+c}, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad y = \pm e^c e^{-x}, c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad y = ke^{-x}, k \in \mathbb{R} \quad \textit{est la solution de } (1.63).
\end{aligned}$$

On utilise la variation de la constante.

Posons $y = k(x)e^{-x}$ *où* k *est fonction réelle.*

On a : $y = k(x) e^{-x} \Rightarrow y' = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$, *puis on remplace dans* (1.62) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.62) \quad &\Rightarrow \quad k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x} = -k(x) e^{-x} + x^2 \\ &\Rightarrow \quad k'(x) e^{-x} = x^2 \\ &\Rightarrow \quad k'(x) = x^2 e^x \\ &\Rightarrow \quad k(x) = \int x^2 e^x dx\end{aligned}$$

Dans ce cas pour avoir $k(x)$ *on peut utilisé l'intégration par partie deux fois pour calculer* $\int x^2 e^x dx$. *Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive* $x^2 e^x$ *sous la forme :* $(ax^2 + bx + c) e^x$, *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned}\left[(ax^2 + bx + c) e^x\right]' = x^2 e^x \quad &\Rightarrow \quad (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x = x^2 e^x \\ &\Rightarrow \quad (ax^2 + (2a + b) x + b + c) e^x = x^2 e^x\end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

d'où,

$$k(x) = \int x^2 e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + c, c \in \mathbb{R}.$$

On a : $y = k(x) e^{-x}$, *donc* $y = ((x^2 - 2x + 2) e^x + c) e^{-x}, c \in \mathbb{R}$

Alors,

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1.62) .

Exercise 1.30 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + 6y - 3xy^{\frac{4}{3}} = 0 \tag{1.64}$$

Solution.

On a :

$$(1.64) \Longleftrightarrow \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6\left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}}\right) - 3x = 0, \text{ pour } y \neq 0.$$

Cette équation (1.64) *est de Bernoulli.*

En posant le changement de variable $z = \frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} = y^{\frac{-1}{3}}$, *on aura :*

$$z' = \frac{-1}{3} y^{\frac{-4}{3}} y' \Rightarrow y' = -3y^{\frac{4}{3}} z'.$$

Substituant dans l'équation (1.64) *les expressions* y *et* y' *on obtient :*

$$\begin{aligned}
(1.64) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6\left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}}\right) - 3x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -3xz' + 6z - 3x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z' = \frac{2}{x} z - 1 \ldots\ldots (E).
\end{aligned}$$

L'équation (E) *est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnu* z.

L'équation homogène associée à (E') *est*

$$z' = \frac{2}{x} z \ldots\ldots\ldots (EH)$$

Résolution de l'équation (EH) :

$$\begin{aligned}
(EH) \quad &\Rightarrow \quad \frac{z'}{z} = \tfrac{2}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \ln|z| = 2\ln|x| + k, \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |z| = e^{\ln x^2 + k}, \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad z = \pm e^k x^2, \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad z = cx^2, \ c \in \mathbb{R}. \ (c = \pm e^k)
\end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx^2, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (EH).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)\, x^2$, *où* c *est une fonction réelle.*

donc : $z(x) = c(x)\,x^2 \Rightarrow z'(x) = c'(x)\,x^2 + 2xc(x)$.
En remplaçant z *et* z' *dans* (E), *on obtient :*

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)\,x^2 + 2xc(x) = \tfrac{2}{x}c(x)\,x^2 - 1\\ &\Rightarrow \quad c'(x) = \frac{-1}{x^2},\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{-1}{x^2}dx,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \frac{1}{x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d'où $z(x) = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x^2, \lambda \in \mathbb{R}$, *donc*

$$z(x) = x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E).
Mais on a : $z = y^{\frac{-1}{3}}$ *d'où* $y = \frac{1}{z^3}$. *donc :*

$$y(x) = \frac{1}{(x + \lambda x^2)^3} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (1.64).

Exercise 1.31 *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :*

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$. *b)* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

c) $y'' - 4y + 13 = 0$. *d)* $y'' + 6y' + 13y = 0$.

e) $y'' - 2\alpha y' + y = 0$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$. *f)* $y'' - 2y' + my = 0, m \in \mathbb{R}$.

Solution.
a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ *et* $r_2 = -3$*. Ainsi, la solution générale est*

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

b) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 6r + 9 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 3$*. Ainsi, la solution générale est*

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{3x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

c) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y + 13 = 0$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

On a : $\triangle = 16 - 4(1)(13) = -36 = (6i)^2$*, cette équation admet deux racines complexes conjuguées*

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{4 - (6i)}{2} = 2 - 3i$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{4 + (6i)}{2} = 2 + 3i.$$

Ainsi, la solution générale est

$$y(x) = (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{2x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

d) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 6r + 13 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexe conjugué $r_1 = -3-2i$ *et* $r_2 = -3+2i$. *Ainsi, la solution générale est*

$$y(x) = A(\cos 2x)\, e^{-3x} + B(\sin 2x)\, e^{-3x},\ \ A \ \ et\ B \in \mathbb{R}.$$

e) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2\alpha y' + y = 0,\ \ où\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0$$

On a : $\triangle = 4\alpha^2 - 4$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique, trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\triangle$.

$$\begin{array}{lll} \triangle > 0 & si & \alpha \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\\ \triangle = 0 & si & \alpha \in \{-1, 1\} \\ \triangle < 0 & si & \alpha \in \left]-1, 1\right[\end{array}$$

Premier cas : *Si* $\alpha \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ *on a :* $\triangle > 0$, *l'équation admet deux racines réelles distinctes*

Alors la solution générale est

$$y(x) = Ae^{\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right)x} + Be^{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)x}, A \ \ et\ B \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas :

- *Si* $\alpha = -1$, *on a :* $\triangle = 0$, *l'équation caractéristique admet une racine réelle double* $r = -1$, *alors la solution générale est*

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{-x}, A \ \ et\ B \in \mathbb{R}.$$

- *Si* $\alpha = 1$ *on a :* $\triangle = 0$, *l'équation caractéristique admet une racine réelle double* $r = 1$, *alors la solution générale de* (E_4) *est*

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{x}, A \ \ et\ B \in \mathbb{R}.$$

où A, B *sont deux constantes réelles.*

Troisième cas : *Si* $\alpha \in]-1,1[$ *on a :* $\triangle < 0$, *l'équation admet deux racines complexes conjuguées*

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha + i\sqrt{4-4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1-\alpha^2} \\ r_2 &= \frac{2\alpha - i\sqrt{4-4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

alors la solution générale est

$$y(x) = \left(A\sin\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x + B\cos\left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)x\right)e^{\alpha x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

f) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + my = 0, m \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + m = 0$$

On a : $\triangle = 4 - 4m$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique, trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\triangle$.

$$\begin{array}{lll} \triangle > 0 & si & m \in]-\infty, 1[\\ \triangle = 0 & si & m = 1 \\ \triangle < 0 & si & m \in]1, +\infty[\end{array}$$

Alors la solution est

$$\begin{array}{ll} Si\ m \in]-\infty, 1[, & y(x) = Ae^{\left(1+\sqrt{1-m}\right)x} + Be^{\left(1-\sqrt{1-m}\right)x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R} \\ Si\ m \in]1, +\infty[, & y(x) = \left(A\sin\left(\sqrt{m-1}\right)x + B\cos\left(\sqrt{m-1}\right)x\right)e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R} \\ Si\ m = 1, & y(x) = (Ax+B)e^x,\ A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exercise 1.32 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{3x} \tag{1.65}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{1.66}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{1.67}$$

On a : $\triangle = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$, *les racines de l'équation* (1.67) *sont :* $r_1 = 1, r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.66) *est*

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p ***de l'équation*** (1.82) ***:***

On a le second membre de l'équation (1.82) *est*

$$f(x) = (x+1)e^{3x}.$$

Comme 3 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.67), *donc on cherche la solution particulière de* (1.82) *sous la forme :*

$$y_p(x) = (ax+b)e^{3x} \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p'(x) = ae^{3x} + 3(ax+b)e^{3x} = (3ax + a + 3b)e^{3x}$$

et

$$y_p''(x) = 3ae^{3x} + 3(3ax + a + 3b)e^{3x} = (9ax + 6a + 9b)e^{3x}$$

On remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.82) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
&(1.82) \Rightarrow (9ax + 6a + 9b)e^{3x} - 3(3ax + a + 3b)e^{3x} + 2(ax+b)e^{3x} = (x+1)e^{3x}, \\
&\Rightarrow (9ax + 6a + 9b) - 3(3ax + a + 3b) + 2(ax+b) = (x+1), \\
&\Rightarrow 2ax + (3a + 2b) = x + 1
\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p *de* (1.82) *est*

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{3x}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= Ae^{x} + Be^{2x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{3x} \ , \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.82).

Exercise 1.33 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - y = x^2 + x + 1 \tag{1.68}$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - y = 0 \tag{1.69}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0 \tag{1.70}$$

les racines de l'équation (1.70) *sont :* $r_1 = -1, r_2 = 1.$

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.69) *est*

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p ***de*** (1.68) ***:***

On a le second membre de l'équation (1.68) *est*

$$f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)e^{0x}.$$

Comme 0 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.70), *donc on cherche une solution particulière de* (1.68) *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, *alors*

$$y_p^{'}(x) = 2ax + b \ \text{ et } \ y_p^{''}(x) = 2a.$$

Substituant dans l'équation (1.68) *les expressions* y_p *et* y_p'' *on obtient :*

$$(1.68) \Rightarrow 2a - \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + x + 1,$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1,$$

par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3, \end{cases}$$

d'où la solution particulière y_p de (1.68) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Alors

$$Y(x) = y_p(x) + y(x) = -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^{x}\ ,\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (1.68).

Exercise 1.34 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' - 8y = e^x \tag{1.71}$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \tag{1.72}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \tag{1.73}$$

les racines de l'équation (1.73) sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.72) est

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.71) :

On a le second membre de l'équation (1.71) est

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.73), donc on cherche une solution particulière de (1.71) sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$, alors

$$y_p^{'}(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p^{''}(x) = ae^x.$$

Substituant dans l'équation (1.71) *les expressions* y_p, y_p' *et* y_p'' *on obtient :*

$$(1.71) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -9a = 1 \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{-1}{9}. \end{aligned}$$

donc la solution particulière y_p *de* (1.71) *est*

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.71).

Exercise 1.35 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' = \sin x \tag{1.74}$$

Solution.

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' = 0 \tag{1.75}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r = 0 \tag{1.76}$$

les racines de l'équation (1.76) *sont :* $r_1 = 0r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.75) *est*

$$y(x) = Ae^{0x} + Be^{2x} = A + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p ***de*** (1.74) ***:***

On a le second membre de l'équation (1.74) *est*

$$f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}.$$

Comme $0+1i$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.76), *donc on cherche une solution particulière* y_p *de l'équation* (1.74) *sous la forme :*$y_p(x) = (a\sin x + b\cos x)\, e^{0x} = a\sin x + b\cos x,$ *où* a *et* $b \in \mathbb{R}$

On a :

$$y_p^{'}(x) = a\cos x - b\sin x \quad et \quad y_p^{''}(x) = -a\sin x - b\cos x.$$

Substituant dans l'équation (1.74) *les expressions* y_p, y_p' *et* y_p'' *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.74) \quad &\Rightarrow \quad -a\sin x - b\cos x - 2(a\cos x - b\sin x) = \sin x,\\ &\Rightarrow \quad (-a+2b)\sin x + (-b-2a)\cos x = \sin x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a+2b = 1, \\ -b-2a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.74) *est*

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (1.74).

Exercise 1.36 *Résoudre le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\, e^{-x}, \\ \\ y(0) = 0 \quad et \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.77}$$

Solution.

On va résoudre d'abord l'équation :

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\, e^{-x} \tag{1.78}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \tag{1.79}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \tag{1.80}$$

Les racines de l'équation (1.80) *sont :* $r_1 = 1$, $r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.79) *est*

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p ***de*** (1.78) ***:***

On a le second membre de l'équation (1.78) *est*

$$f(x) = (2x+1)\, e^{-x}.$$

Comme -1 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.80)*, donc on cherche une solution particulière de* (1.78) *sous la forme :*

$$y_p(x) = (ax+b)\, e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p^{'}(x) = (-ax+a-b)\, e^{-x} \text{ et } y_p^{''}(x) = (ax-2a+b)\, e^{-x}.$$

Substituant dans l'équation (1.78) *les expressions* y_p, y_p' *et* y_p'' *on obtient :*

$$(1.78) \Rightarrow (ax-2a+b)\, e^{-x} - 4(-ax+a-b)\, e^{-x} + 3(ax+b)\, e^{-x} = (2x+1)\, e^{-x},$$

$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}, \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p *de* (1.78) *est*

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x}.$$

Alors

$$Y(x) = y_p(x) + y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right) e^{-x} + Ae^{x} + Be^{3x}\ ,\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (1.78).

Pour le problème de Cauchy (1.77) on a :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0.....(1)$$

et on a :

$$y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right)e^{-x} + Ae^{x} + 3Be^{3x},$$

d'où

$$y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0.....(2)$$

De (1) *et* (2) *on a :*

$$\begin{cases} \dfrac{5}{16} + A + B = 0 \\ \\ \dfrac{-1}{16} + A + 3B = 0 \end{cases} \quad d'où : \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}, \\ \\ B = \dfrac{3}{16}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{3}{16}e^{3x} \ ,$$

est la solution de problème du Cauchy (1.77).

Exercise 1.37 *1) Résoudre le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y' = -y + 1 - 2e^{x}, \\ \\ y(0) = -3. \end{cases} \tag{1.81}$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2. \tag{1.82}$$

Solution.

1) Résoudre le problème de Cauchy (1.81) :

On va résoudre d'abord l'équation différentielle suivante :

$$y' = -y + 1 - 2e^{x} \tag{1.83}$$

L'équation homogène associée est

$$y' = -y \tag{1.84}$$

Remarquons que : $y = 0$ *est une solution évidente de* (1.84).

On suppose que $y \neq 0$ *:*

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = -1 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (-1)\, dx, \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = -x + k, \ \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = \pm e^{k} e^{-x}, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad y = ce^{-x}, \ c \in \mathbb{R} \quad \textit{où } (c = \pm e^{k}).\end{aligned}$$

Alors, $y_h(x) = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$, *est la solution générale de* (1.84).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)\, e^{-x}$, *donc on a :* $y'(x) = c'(x)\, e^{-x} - c(x)\, e^{-x}$. *En remplaçant* y *et* y' *dans* (1.83) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.83) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)\, e^{-x} - c(x)\, e^{-x} = -c(x)\, e^{-x} + 1 - 2e^{x}, \\ &\Rightarrow \quad c'(x)\, e^{-x} = 1 - 2e^{x}, \\ &\Rightarrow \quad c'(x) = e^{x} - 2e^{2x}, \\ &\Rightarrow \quad c(x) = e^{x} - e^{2x} + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc, $y(x) = \left(e^{x} - e^{2x} + \lambda\right) e^{-x} = 1 - e^{x} + \lambda e^{-x}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, $y(x) = 1 - e^{x} + \lambda e^{-x}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$, *est la solution générale de* (1.83).

Pour le problème de Cauchy (1.81) *on a :* $y(0) = -3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3$.

Donc, $y(x) = 1 - e^{x} - 3e^{-x}$, *est la solution du problème de Cauchy* (1.81).

2) Résoudre l'équation différentielle (1.82) *suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = 4 - 4x^2.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{1.85}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{1.86}$$

On a : $\triangle = (-3)^2 - 4\,(1)\,(2) = 1$, *les racines de l'équation* (1.86) *sont :* $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.85) *est*

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{2x},\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de l'équation* (1.82) *:

On a le second membre de l'équation (1.82) *est*

$$f(x) = 4 - 4x^2 = \left(1 - x^2\right) e^{0.x}.$$

Comme 0 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.67)*, donc on cherche la solution particulière de* (1.82) *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{0.x} = ax^2 + bx + c \quad \text{où } \ a, b, c \in \mathbb{R},$$

alors, $y_p'(x) = 2ax + b$ *et* $y_p''(x) = 2a.$

On remplace y_p*,* y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.82) *on obtient :*

$$\begin{aligned} &(1.82) \Rightarrow 2a - 3(2ax + b) + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 4 - 4x^2, \\ &\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 1 - x^2. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a = -4 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = -6, \\ c = -5 \end{cases}$$

donc, la solution particulière y_p *de* (1.82) *est* $y_p(x) = -2x^2 - 6x - 5$.

Alors, $Y(x) = y(x) + y_p(x) = Ae^{x} + Be^{2x} - 2x^2 - 6x - 5$, A *et* $B \in \mathbb{R}$.

est la solution générale de l'équation (1.82)*.*

Exercise 1.38 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \tag{1.87}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \tag{1.88}$$

Remarquons que 1 *et* -1 *sont des racines de l'équation* (1.88)*, donc on a :*

$$\begin{aligned} \left(\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0\right) \ &\Rightarrow \ \left(\lambda^2 - 4\right)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ \\ \lambda^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_4 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, la solution générale de l'équation (1.87) *est :*

$$Y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x},$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 *sont des constantes réelles.*

Exercise 1.39 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \tag{1.89}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \tag{1.90}$$

Remarquons que 1 *et* -1 *sont des racines de l'équation* (1.90), *donc on a :*

$$\begin{aligned}\left(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0\right) &\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2\end{cases}\end{aligned}$$

Alors, la solution générale de l'équation (1.89) *est :*

$$Y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x},$$

où C_1, C_2, C_3 *sont des constantes réelles.*

Exercise 1.40 *Soit* $m \in \mathbb{R}$. *Résoudre l'équation suivante :*

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \tag{1.91}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 - 3m\lambda^2 + 3m^2\lambda - m^3 = 0 \tag{1.92}$$

Remarquons que $\lambda^3 - 3m\lambda^2 + 3m^2\lambda - m^3 = (\lambda - m)^3$, *alors* $\lambda = m$ *est une racine triple de l'équation* (1.92), *alors, la solution générale de l'équation* (1.91) *est :*

$$Y(x) = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} + C_3x^2e^{mx},$$

où C_1, C_2, C_3 *sont des constantes réelles.*

Exercise 1.41 *Résoudre l'équation suivante :*

$$y'''' + 2y'' + 9y = 0 \tag{1.93}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 9 = 0 \tag{1.94}$$

On pose $t = \lambda^2$, *donc* (1.94) $\Leftrightarrow t^2 + 2t + 9 = 0$, $\Delta = 4 - 36 = -32 = \left(4\sqrt{2}i\right)^2$

D'où,

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{-2 - 4\sqrt{2}i}{2} = -1 - 2\sqrt{2}i \\ t_1 = \dfrac{-2 + 4\sqrt{2}i}{2} = -1 + 2\sqrt{2}i \end{cases}$$

Si : $t_1 = -1 - 2\sqrt{2}i$, *on pose* $\lambda = x + iy$, *donc*

$$t = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 ....(1) \\ 2xy = -2\sqrt{2} ....(2) \\ x^2 + y^2 = 3 ....(3) \end{cases}$$

De $(1) + (3)$ *on a :* $2x^2 = 2$ *d'où* $x = \pm 1$, *de l'équation* (2) *on aura :* $y = -\sqrt{2}$ *si* $x = 1$ *et* $y = \sqrt{2}$ *si* $x = -1$.

Donc, $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$ *et* $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}$.

Si : $t_1 = -1 - 2\sqrt{2}i$, *on pose* $\lambda = x + iy$, *donc*

$$t = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 ....(1) \\ 2xy = 2\sqrt{2} ....(2) \\ x^2 + y^2 = 3 ....(3) \end{cases}$$

De $(1) + (3)$ *on a :* $2x^2 = 2$ *d'où* $x = \pm 1$, *de l'équation* (2) *on aura :* $y = \sqrt{2}$ *si* $x = 1$ *et* $y = -\sqrt{2}$ *si* $x = -1$.

Donc, $\lambda_3 = 1 + i\sqrt{2}$ *et* $\lambda_4 = -1 - i\sqrt{2}$.

Alors les racines de l'équation (1.94) *sont*

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - i\sqrt{2} \\ \lambda_2 = -1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_3 = 1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_4 = -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

Alors, la solution générale de l'équation (1.93) *est :*

$$Y(x) = \left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) e^{x} + \left(C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x\right) e^{-x},$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 *sont des constantes réelles.*

Exercise 1.42 ***(Exercices supplémentaires)***

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $x\dfrac{dy}{dx}-(x+1)\,y=0.$
Réponse : $y(x)=\lambda x e^{x},\lambda\in\mathbb{R}$

2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}.$
Réponse : $y(x)=\lambda x+x\ln x,\lambda\in\mathbb{R}.$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=\dfrac{1}{2}x^{3}.$
Réponse : $y(x)=\dfrac{1}{2}x^{3}+\lambda x^{2},\lambda\in\mathbb{R}.$

4) $xy'+3y-x^{2}y^{2}=0.$
Réponse : $y(x)=0,y(x)=\dfrac{1}{x^{2}+\lambda x^{3}},\lambda\in\mathbb{R}.$

5) $y''-5y'+6y=0.$
Réponse : $y(x)=Ae^{2x}+Be^{3x},A\ \textit{et}\ B\in\mathbb{R}.$

6) $4y''+4y'+y=0$.
Réponse : $y(x)=(A+Bx)\,e^{-\frac{1}{2}x},\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

7) $y''+y'+y=0.$
Réponse : $y(x)=\left(A\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x},\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

8) $y''-y'=12x-10$.
Réponse : $y(x)=A+Be^{x}-6x^{2}-2x-2,\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

9) $4y''+4y'+y=e^{\frac{-1}{2}x}$.
Réponse : $y(x)=\left(A+Bx+\dfrac{1}{8}x^{2}\right)e^{-\dfrac{1}{2}x},\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

10) $y''+4y=\cos x$.
Réponse : $y(x)=A\sin 2x+B\cos 2x+\dfrac{1}{3}\cos x,\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

11) $y''-2y'+y=(x+2)\,e^{x}.$
Réponse : $y(x)=\left(\frac{1}{6}x^{3}+x^{2}+Ax+B\right)e^{x},\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

12) $y''+6y'+13y=0.$
Réponse : $y(x)=A(\cos 2x)\,e^{-3x}+B(\sin 2x)\,e^{-3x}),\ \textit{où}\ A,B\in\mathbb{R}.$

13) $y'' + 6y' + 13y = 26x - 13.$
Réponse : $y(x) = 2x + A(\cos 2x)\,e^{-3x} + B(\sin 2x)\,e^{-3x} - \frac{25}{13}$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

15) $y'' - 3y' + 2y = (x-4)\,e^{x}.$
Réponse : $y(x) = Ae^{x} + Be^{2x} + \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 3x\right)e^{x}$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

14) $y'' - y' - 6y = \sin x.$
Réponse : $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + \dfrac{1}{50}\cos x - \dfrac{7}{50}\sin x$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

15) $y'' + 2y' + y = \sin x.$
Réponse : $y(x) = (A + Bx)\,e^{-x} - \dfrac{1}{2}\cos x$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

16) $y'' + 2y' + y = \cos x.$
Réponse : $y(x) = (A + Bx)\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}\sin x$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

17) $y'' - 4y = \sin x.$
Réponse : $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x} - \dfrac{1}{5}\sin x$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

18) $y'' - 4y' + 3y = \cos x + \sin x.$
Réponse : $y(x) = Ae^{x} + Be^{3x} + \dfrac{3}{10}\cos x - \dfrac{1}{10}\sin x$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$.

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les concepts fondamentaux de l'analyse des fonctions de plusieurs variables. On va généraliser les notions de limite, contnuité, dérivabilité, différentiabilité, bien connues dans le cas des fonctions d'une seule variable. Nous rechercherons dans ce chapitre une formalisation mathématique théorique de ces concepts.

2.2 Produit scalaire, norme euclidienne, distance dans $\mathbb{R}^n$, voisinage.

2.2.1 Produit scalaire, norme euclidienne, distance dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1 *Si $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur* ***produit scalaire*** *par :*

$$< X, Y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Définition 2.2 *On appelle* ***norme euclidienne*** *de X (ou longueur de X)*

$$||X|| =< X, X >^{\frac{1}{2}}= \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on appelle la distance entre deux vecteurs

$$d(X, Y) = ||X - Y||.$$

Théorème 2.1 *La norme vérifie :*

1) $||X|| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

2) $||X|| > 0$ si et seulement si $X \neq 0$.

3) $||\lambda X|| = |\lambda| . ||X||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n$.

4) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ (inégalité triangulaire).

Propriété :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad |\|X\| - \|Y\|| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont :
1) $\|X\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.
2) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Définition 2.3 *Les vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux lorsque :*

$$< X, Y >= 0.$$

Définition 2.4 *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.*

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ est appelée la boule ouverte de centre a et de rayon r.

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$ est appelée la boule fermée de centre a et de rayon r.

$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| = r\}$ est appelée la sphère de centre a et de rayon r.

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si : $\forall X$,$Y \in D$, l'ensemble des réels $\|X - Y\|$ est borné.

Remarque 2.1 *Dans le cas où $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $r = 1$ on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.*

2.2.2 Voisinage

Définition 2.5 *Soit a un point de $\mathbb{R}^n$. On appelle voisinage de a tout sous ensemble V_a de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte centrée en a. On écrit :*

$$(V_a \text{ voisinage de } a) \Leftrightarrow \exists r > 0 : B(a, r) \subset V_a.$$

Proposition 2.1 *Soit a un point de $\mathbb{R}^n$.*

1) Toute boule centrée en a est un voisinage de a.

2) Tout voisinage V_a de a contient un voisinage ouvert U_a de a.

Preuve

1) Il suffit de prendre $B(a, r) = V_a$.

2) Il suffit de prendre $U_a = B(a, r)$.

2.3 Fonctions de plusieurs variables

Définition 2.6 *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle fonction réelle de n variables toute fonction f définie d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit :*

$$\begin{array}{llll} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Exemple 2.2 *Voici quelques fonctions pour $n = 2$ et $n = 3$.*

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2}. \end{array} \qquad \begin{array}{lll} h: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & h(x, y) = x + e^{1+y}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} g: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & g(x, y, z) = x^3 + yz + 2. \end{array} \qquad \begin{array}{lll} L: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & L(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} M: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & M(x, y, z) = \dfrac{z + 2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}. \end{array}$$

Définition 2.7 *On appelle* ***domaine de définition*** *d'une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la partie D_f de $\mathbb{R}^n$ constituée des éléments $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ jouissant d'une image par f.*

Définition 2.8 *On appelle image de f, l'ensemble $\{f(x)/x \in D_f\}$.*

Définition 2.9 *On appelle* ***représentation graphique*** *ou* ***surface représentative*** *d'une fonction $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble des triplets $\{(x, y, f(x, y))\}$ où (x, y) parcourt D_f.*

Exemple 2.3 *La fonction f suivante :*

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy + y^2 + 2}{1 + x^2 + y^2}, \end{array}$$

est définie sur $D = \mathbb{R}^2$, car :$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 + x^2 + y^2 \neq 0$.

Exemple 2.4 *La fonction g suivante :*

$$\begin{array}{lll} g: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x, y) & \mapsto & g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \end{array}$$

est définie sur le disque $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Fonctions partielles

Définition 2.10 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions :*

$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_2) \text{ et } x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$$

définies sur un intervalles ouvert contenant respectivement a_1 et a_2.

Exemple 2.5 *Les deux fonctions partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 5 + x^2 - y^2, \end{array}$$

au point $A = (2,4)$ sont :

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f_1(x) = -11 + x^2, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & y & \mapsto & f_2(y) = 9 - y^2. \end{array}$$

Exemple 2.6 *Les trois fonctions partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z + 3, \end{array}$$

au point $A = (2,1,3)$ sont :

$$\begin{array}{rccl} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f_1(x) = 2x^2 + 7, \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & y & \mapsto & y^2 + 14. \end{array}$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{rccl} f_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & z & \mapsto & f_3(z) = z + 12. \end{array}$$

Remarque 2.2 *Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables. (les notions se généralisent sans difficultés aux espaces de dimensions supérieures à deux).*

2.3.1 Courbe de niveau

Définition 2.11 *Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle **Courbe de niveau** k de f, l'ensemble $L_k(f)$ formé des couples (x,y) de D_f satisfaisant à $f(x,y) = k$. On écrit :*

$$L_k(f) = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k, k \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(k).$$

Exemple 2.7 *Soit f la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = y - x. \end{array}$$

Les courbes de niveau de la fonction f sont les droites parallèles définies par : $y = x + k, k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.8 *Soit h la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & h(x,y) = x^2 + y^2. \end{array}$$

Les courbes de niveau de la fonction h sont données par :

$$L_k(h) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k, k \in \mathbb{R}\right\}.$$

On distingue trois cas :

*- **Si** $k \in]-\infty, 0[$: on aura $L_k(h) = \emptyset$. (La fonction h n'admet aucune courbe de niveau k).*

*- **Si** $k = 0$: on aura $L_k(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$ ..*

*- **Si** $k \in]0, +\infty[$: alors la courbe $L_k(h)$ de niveau k est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}$, donc l'ensemble des courbes de niveau est l'ensemble des cercles de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{k}, k \in]0, +\infty[$.*

2.4 Limite d'une fonction

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise la notion de la limite des fonctions réelles d'une seule variable, mais les limites de la gauche et de la droite perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles.

Définition 2.12 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

où D_f est le domaine de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que f admet la limite L quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$, si $f(x,y)$ est aussi voisin que l'on veut de L dès que le point M est dans un voisinage convenable de M_0. On écrit :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L \text{ ou } \lim_{M\to M_0} f(x,y)=L,$$

c'est à dire

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<\epsilon,$$

où $V(M_0(x_0,y_0))$ le voisinage de $M_0(x_0,y_0)$.

On dit que f tend vers $+\infty$ quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ si :

$$\forall A>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|>A,$$

et on écrit : $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=+\infty$.

On dit que f tend vers $-\infty$ quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ si :

$$\forall A>0,\exists\delta>0:\forall x\in V(M_0(x_0,y_0)):\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<-A,$$

et on écrit : $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=-\infty$.

Exemple 2.9 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & 2x-y+1. \end{array}$$

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=2$. En effet, pour tout $\varepsilon>0$ on écrit :

$$\begin{aligned} |f(x,y)-2| &= |2x-y-1| \\ &= |2(x-1)-(y-1)| \\ &\le |2(x-1)|+|-(y-1)| \\ &\le 2|x-1|+|y-1| \\ &\le 2\|(x,y)-(1,1)\|_1 \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ dans définition ci-dessus.

Théorème 2.10 *(Opérations algébriques sur les limites)*

Soient f et g deux fonctions telles que : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L'$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors,

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)+g(x,y)) = L+L'$.
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y).g(x,y)) = L.L'$.
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \lambda f(x,y) = \lambda L$.
4) Si g n'est pas nulle dans un voisinage de $M(x_0,y_0)$ et $L' \neq 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{L'}$.

Théorème 2.11 *(Théorème d'encadrement ou des gendarmes)*
Soient f, g et h trois fonctions définies sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \Omega : g(x,y) \leq h(x,y) \leq f(x,y)$$

Si : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$, *alors,* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$.

Exemple 2.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$. *En effet,*

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right),$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$.

2.4.1 Limites successives

Définition 2.13 *On appelle **limite successive** en point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ d'une fonction f l'une des deux limites :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \qquad \lim_{y\to y_0} f(x,y)\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Dans le calcul de ces limites fixer l'une des variables x ou y et d'effectuer le calcul par rapport à l'autre variable puis lâcher la variable fixée et finir avec elle le calcul.

Remarque 2.3 *L'existence des deux limites successives n'assure pas la limite et que leur non existence n'entrave pas l'existence de la limite.*

Théorème 2.13 *Si les deux limites successives* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) = L$ *et* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L'$ *existent et sont distinctes alors la limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Calcul de limites à l'aide des coordonnées polaires

Lorsque l'on considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, il est quelques fois plus facile de prouver des résultats de limite, continuité, etc. en passant par les coordonnées polaires en faisant le changement de variables.

Exemple 2.14 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2}$.

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$ *(forme indéterminée).*

On utilise le changement de variables en coordonnées polaires, on pose :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2 (r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^4 (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^4 = 0, \forall\theta \in [0, 2\pi[\,. \end{aligned}$$

Alors, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} = 0.$

2.4.2 Fonction continue

Définition 2.14 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

où D_f le domaine de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que la fonction f est continue au point $M_0(x_0, y_0)$ si

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0) \;\; ou \;\; \lim_{M\to M_0} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

On dit que la fonction f est continue sur D_f si f est continue en tout point de D_f.

Si f est continue sur D_f, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D_f.

Exemple 2.15 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x+y. \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}^2$ *et* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *car :*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| &= |x+y-x_0-y_0| \\ &= |(x-x_0)+(y-y_0)| \\ &\leq |x-x_0| + |y-y_0| \end{aligned}$$

$|x-x_0|$ *tend vers* 0 *dès que* x *tend vers* x_0 *et* $|y-y_0|$ *tend vers* 0 *dès que* y *tend vers* y_0.

Exemple 2.16 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{(1+x+x^2)\sin y}{x^2+x+y}. \end{array}$$

On a :

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y\to 0} \left(\frac{(1+x+x^2)\sin y}{x^2+x+y} \right) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = 1.$$

Opérations :

Théorème 2.17 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues en* $M_0(x_0,y_0)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors on a :*

$f+g$, $f\,g$, λf, $\dfrac{f}{g}$ *(si* $g(x_0,y_0) \neq 0$*) sont continues.*

De même la composée de fonctions continues est continue.

Corollaire 2.18 *Les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.*

Exemple 2.19 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \\ \dfrac{1}{2} & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} . \end{array}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ car c'est une composition de fonctions continues.

La continuité de f en $(0,0,0)$.

On a :

$$\frac{1-\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{1-\cos 2\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \text{ car } \left(1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha\right)$$

$$= \frac{2\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{4\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)\right)^2}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{car, } \left(\frac{\sin\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ (puisque : } \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1\text{).}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \dfrac{1}{2} = f(0,0,0)$. *On conclut que f est continue en $(0,0,0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

Définition 2.15 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

On dit que la fonction f est continue au point (x,y) relativement à la variable x (resp. y) si la fonction partielle f_1 (resp. f_2) est continue en x, (resp. y).

Proposition 2.2 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

Si la fonction f est continue au point (x,y), alors les fonctions partielles f_1 et f_2 sont continues en x et y, respectivement.

Remarque. La réciproque est généralement fausse.

2.4.3 Dérivées partielles

Définition 2.16 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y où D_f est le domaine de définition de f et $M_0(x_0,y_0) \in D_f$.

Supposons la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x,y_0)$ définie sur un voisinage de x_0

Si f_x admet une dérivée au point x_0, on dit que cette dérivée est la "dérivée partielle" de f par rapport à x au point (x_0,y_0). On note f'_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée et l'on a :

$$f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

De même, la dérivée de la fonction f_y est la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0,y_0), et on la note :

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Si f'_x et f'_y existent au point (x_0,y_0), on dit que f est dérivable au point (x_0,y_0).

On dit que f est de classe C^1 sur D_f si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D_f.

Exemple 2.20 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^3 + xy^2 + y - 3, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Pour déterminer une dérivée partielle de f, il suffit de dériver l'expression de f par rapport à la variable considérée, les autres étant considérées comme des constantes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(4,5) = 73.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,5) = 41.$$

Exemple 2.21 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1) = \frac{-1}{2}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.22 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Solution.

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction f :

On a : $D_f = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$.

2) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{(2xy^2)(x^2+y^2) - (2x)(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{(2yx^2)(x^2+y^2) - (2y)(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Gradient

Définition 2.17 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \to & f(x,y), \end{array}$$

une fonction des deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0,y_0) \in D_f$.

On appelle gradient de f en (x_0,y_0), le vecteur noté

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right).$$

Si le $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j} \right)$, le gradient de f un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f est de la forme :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\vec{j}\ .$$

Divergence

On appelle divergence de f en un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f le nombre noté $divf(x_0,y_0)$ et défini par :

$$divf(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Exemple 2.23 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + xy^2 - 3, \end{array}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2x_0y_0,\qquad \nabla f(x_0,y_0) = (2x_0 + y_0^2, 2x_0y_0).$$

Si le $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j} \right)$, le gradient de f un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f est de la forme :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(2x_0 + y_0^2\right)\ \vec{i} + (2x_0y_0)\,\vec{j}\ .$$

On appelle divergence de f en un point $M_0(x_0,y_0)$ de D_f le nombre noté $divf(x_0,y_0)$ et défini par :

$$divf(x_0,y_0) = 2x_0 + y_0^2 + 2x_0y_0.$$

2.4.4 Dérivées successives

Définition 2.18 *On définit ensuite les dérivées partielles secondes, si elles existent par dérivation des dérivées premières, on les note :*

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'_{x_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

Dans le cas de deux variables x, y on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y).$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.

On dit que f est de classe C^k sur D_f si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D_f.

On dit que f est de classe C^∞ sur D_f si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D_f.

Théorème 2.24 ***(Théorème de Schwarz)***

Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Exemple 2.25 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^4 y^2, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^2) = 12x^2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^4y) = 2x^4,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y) = 8x^3y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) = 8x^3y.$$

2.4.5 Fonction harmonique

Définition 2.19 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On note le Laplacien de f :

$$\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

et on dit que f est harmonique si $\forall (x,y) : \triangle f(x,y) = 0$.

Exemple 2.26 *Vérifions que les fonctions suivantes sont harmoniques.*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = e^y \sin x, \end{array}$$

On a : $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Soit $(x,y) \in D_f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Remarquons $\forall (x,y) \in D_f$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, donc f est harmonique.

On a : $D_g = \mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^y \cos x \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -e^y \sin x.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^y \sin x \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = e^y \sin x.$$

Remarquons $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0$, donc g est harmonique.

2.5 Différentiabilité

2.5.1 Cas des fonctions d'une variable réelle

Définition 2.20 *Soit f une fonction réelle a variable réelle :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f définie dans un voisinage $V(x_0)$ de x_0 est différentiable au point x_0 s'il existe un nombre A qui dépend de x mais pas de h tel que la fonction $\varepsilon(x)$ définie pour $h \neq 0$ par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(x), \quad h = x - x_0 \quad et \quad (h + x_0) \in V(x_0).$$

admette la limite 0 quand $h \rightarrow 0$.

Théorème 2.27 *Une fonction f est différentiable au point x_0 si, et seulement si, f est dérivable au point x_0.*

Preuve. 1) **Condition nécessaire :** Supposons que f est différentiable au point x_0, alors pour $h \neq 0$ on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(x).$$

Donc,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(x).$$

le passage a la limite on aura :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (A + \varepsilon(x)) = A, \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x).$$

donc, en posant $A = f'(x_0)$, on a f dérivable en x_0.

2) La condition suffisante : est évidente, en posant : $A = f'(x_0)$. ■

Remarque 2.4 *On a :*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)\, dx.$$

On dit que dy est la différentielle de f en x.

2.5.2 Cas des fonctions de deux variables

Définition 2.21 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On dit que f est différentiable au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si il existe deux constantes réelles α, λ telles que :

$$\begin{array}{rcl} f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) & = & \alpha h_1 + \lambda h_2 + ||(h_1,h_2)||\, \varepsilon(h_1,h_2), \\ \textit{avec} \lim\limits_{||(h_1,h_2)|| \to 0} \varepsilon(h_1,h_2) & = & 0. \end{array}$$

Exemple 2.28 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^4 + 3x^2 y, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Plaçons nous au point $(1,-1)$.

$$f(1+h_1, -1+h_2) - f(1,-1) = (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) - (-2)$$

$$= -2h_1 + 3h_2 + (6h_1h_2 + 3h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + 3h_1^2 h_2)$$

$$= -2h_1 + 3h_2 + ||(h_1,h_2)||\, \epsilon(h_1,h_2).$$

On a : $\lim\limits_{||(h_1,h_2)|| \to 0} \epsilon(h_1,h_2) = 0$ *où*

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{6h_1h_2 + 3h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + 3h_1^2 h_2}{||(h_1,h_2)||}.$$

Donc : f est différentiable au point $(1,-1)$ et sa différentielle est l'application linéaire : $df(1,-1) : (h_1,h_2) \to -2h_1 + 3h_2$

On remarque que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 6xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 3.$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.

Remarque 2.5 *On note la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df : (h_1, h_2) \to \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2.$$

On note aussi plus simplement :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

2.6 Formule de Taylor des fonctions de 2 variables

Définition 2.22 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f : & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de classe C^n sur D_f où D_f une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in D_f$.

Pour tout (h,k) de $\mathbb{R}^2$ on considère la fonction :

$$F : t \mapsto F(t) = f(a + ht, b + kt).$$

Cette fonction est dérivable est sa fonction dérivée est :

$$F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a + ht, b + kt) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + ht, b + kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F'(0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

De même, on a :

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + ht, b + kt) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + ht, b + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + ht, b + kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

On continue ce processus jusqu'à avoir :

$$F^{(n)}(t) = \quad h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a+ht, b+kt) + C_n^1 h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial y \partial x^{n-1}}(a+ht, b+kt) +$$

$$... + C_n^i h^{n-i} k^i \frac{\partial^i f}{\partial y^i \partial x^{n-i}}(a+ht, b+kt) + ...k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a+ht, b+kt).$$

où $C_n^i = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.

Cette expression s'écrit aussi :

$$F^{(n)}(t) = \quad \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right)(a+ht, b+kt).$$

Ce qui donne en $t = 0$

$$F^{(n)}(0) = \quad \left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right)(a,b).$$

Théorème 2.29 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de classe C^n *sur* D_f *où* D_f *une partie ouverte non vide de* $\mathbb{R}^2$ *et* $(a,b) \in D_f$.

Alors il existe $\theta \in]0,1[$ *tel que :*

$$\begin{aligned} f((a,b)+(h,k)) \quad &= f((a+h, b+k)) \\ &= f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(2)}(a,b) + \\ &\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(3)}(a,b) + ... + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n)}(a,b) + \\ &\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{(n+1)} f((a+\theta h, b+\theta k))}_{\text{reste de Lagrange}}. \end{aligned}$$

Cette expression est dite formule de Taylor (développement de Taylor) d'ordre n *en point* (a,b) *avec reste de Lagrange.*

et

$$f(a,b)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}(a,b)+$$

$$\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}(a,b)+....+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}(a,b).$$

dite la partie régulière.

Remarque.

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}$$

....

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}=h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+C_n^1h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial y\partial x^{n-1}}+...+k^n\frac{\partial^n f}{\partial^n y}$$

Le reste : $\dfrac{1}{(n+1)!}\left(h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n+1)}=$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}+\frac{C_{n+1}^1h^nk}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y\partial x^n}+....+\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}$$

Exemple 2.30 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & x^4+y^3+x^2-y^2-3xy+5. \end{array}$$

Ecrire le développement de Taylor d'ordre 3 *au point* $(1,0)$.

Pour cala on calcule : $f(1,0) = 7$ *et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2x - 3y, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2y - 3x, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 2, \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 14$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 2, \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3, \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3, \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = -3$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 24x, \text{ donc } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0) = 24$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 6, \text{ donc } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0) = 6$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = 24, \text{ donc } \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(1,0) = 24$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y) = 0, \text{ donc } \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(1,0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3}(x,y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x,y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) = 0$$

D'où,

$$f\left((1,0)+(h,k)\right)=f\left(1+h,k\right)=f\left(1,0\right)+h\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,0\right)+k\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,0\right)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)(1,0)+$$
$$\frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}\right)(1,0)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4h^3k\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}+6h^2k^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+4hk^3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial^4 y}\right)(1+\theta k,\theta k)$$

Alors,

$$\begin{aligned} f\left(1+h,k\right) &= -7+6h-3k+\frac{1}{2}\left(12h^2-4hk-4k^2\right)+\frac{1}{6}\left(24h^3+6k^3\right)+\frac{1}{24}\left(24h^4\right) \\ &= h^4+4h^3+k^3+6h^2-2k^2-2hk+6h-3k-7. \end{aligned}$$

2.7 Optimisation différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

2.7.1 En dimension 1

Soit une fonction d'une variable f définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.

Théorème 2.31 *(Formule de Taylor à l'ordre* 2*) Si* f *est une fonction trois fois continûment dérivable sur* $\mathbb{R}$*, il existe une fonction tendant vers* 0 *en 0 telle que :*

$$f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+hf'\left(x\right)+\frac{h^2}{2}f''\left(x\right)+\left|h\right|^2\epsilon\left(h\right).$$

Choisissons pour x *un point* $x=a$ *tel que* $f''\left(a\right)\neq 0$*. Alors pour* h *assez petit, le terme* $\frac{h^2}{2}f''\left(x\right)+\left|h\right|^2\epsilon\left(h\right)$ *est du même signe que* $f''\left(a\right)$*. Si par exemple* $f''\left(a\right)>0$*, on en déduit que* f *a un minimum local en* x*.*

La recherche pratique des extrema locaux pour une fonction d'une variable se passe donc ainsi :

1) On recherche les points critiques : $f'\left(x\right)=0$.

2) On étudie la dérivée seconde $f''\left(x\right)$ si a est un point critique et si :

$f''\left(a\right)>0$ il y a un minimum local,

$f''\left(a\right)<0$ il y a un maximum local,

$f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

Lorsque f n'est plus définie sur $\mathbb{R}$ entier, ou sur un intervalle ouvert, il faudra de plus étudier le comportement de f sur les bords du domaine de définition. si l'ensemble de départ est compact, on a la garantie de l'existence d'extrema globaux.

2.7.2 Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On suppose f de classe C^2, c'est- a-dire que ses dérivées partielles jusqu'a l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition 2.23 *On dit que : f a un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon), \text{ alors } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Définition 2.24 *On dit que : f a un maximum local en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon), \text{ alors } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Exemple 2.32 $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad f(x, y) = -x^2 - y^2.$

Proposition 2.3 *Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Démonstration.

La fonction de une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un extremum local en x_0, donc sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en x_0.

La fonction de une variable $y \mapsto f(x_0, y)$ admet un extremum local en y_0, donc sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en y_0.

Définition 2.25 *On dit que : (x_0, y_0) est un point critique de f (ou un point stationnaire) si,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Remarque. Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

2.7.3 Formule de Taylor

Définition 2.26 *Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2. La matrice hessienne f de (x_0,y_0) en est la matrice :*

$$Hess(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

et

$$\det Hess(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

Exemple 2.33 *Calculer la matrice Hessienne de $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.*

Théorème 2.34 *(Formule de Taylor a l'ordre 2, en $X = (x_0,y_0)$)*

Si f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, il existe une fonction tendant vers 0 en $(0,0)$ telle que :

$$f(X+H) = f(X) + < \nabla f(X), H > + \frac{1}{2} H^t Hess(x_0,y_0) H + ||H||^2 \epsilon(H).$$

Théorème 2.35 *Soient $f(x,y)$ de classe C^2 et (x_0,y_0) un point critique. Alors :*

Si, $\det Hess(x_0,y_0) > 0$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, *$f$ a un minimum local en* (x_0,y_0).

Si, $\det Hess(x_0,y_0) > 0$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, *$f$ a un maximum local en* (x_0,y_0).

Si, $\det Hess(x_0,y_0) < 0$, *f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle.*

Si, $\det Hess(x_0,y_0) < 0$, *on ne peut conclure (avec le seul développement à l'ordre 2).*

Exemple 2.36 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Le premier est un point col, le second un minimum local (non global).*

2.8 Exercices corrigés

Exercise 2.37 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

1) $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

3) $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

Solution

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}. \end{array}$$

f est définie si et seulement si : $x^2+y^2 \neq 0$, *d'où* $(x,y) \neq (0,0)$.

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

C'est le plan à l'exception le point $O(0,0)$.

2) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y}{x^2+y^2-1}. \end{array}$$

f est définie si et seulement si : $x^2+y^2-1 \neq 0$, *d'où* $x^2+y^2 \neq 1$.

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$.

C'est le plan à l'exception les points du cercle centré en $O(0,0)$ et de rayon 1.

3) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction suivante :

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \left\{ \begin{array}{l} 4-y^2 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 \leq 4 \\ x^2 \leq 4. \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |y| \leq 2 \\ |x| \leq 2. \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 2. \end{array} \right.$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -2 \leq y \leq 2\}$.
C'est la partie du plan circonscrite dans le carré.

Exercise 2.38 *Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :*

$$1) \quad \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y+1}. \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}}. \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \ln(x^2+y^2-4). \end{array}$$

Solution

1) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y+1}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \; x-y+1 \neq 0.$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y+1 \neq 0\}$.
C'est le plan à l'exception les points de la droite d'équation $y = x+1$.
2) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1+y\sin x}{\sqrt{2x-y+1}}. \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \; 2x-y+1 > 0.$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x-y+1 > 0\}$.

C'est le demi-plan inférieur délimité par la droite d'équation $y = 2x + 1$, *à l'exception les points de cette droite.*

3) Déterminons D_f *le domaine de définition de la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4). \end{array}$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } x^2 + y^2 - 4 > 0.$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 > 0\}$.

C'est la partie du plan située hors du cercle de centre $O(0,0)$ *et de rayon* 2, *à l'exception les points de ce cercle. (c'est à dire le complémentaire du disque fermé de centre* $O(0,0)$ *et de rayon* 2*).*

Exercise 2.39 *Soit* f *et* g *deux fonctions définies comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}. \end{array}$$

1) Etudier l'existence de limite de la fonction f *en point* $(0,0)$.

2) Etudier l'existence de limite de la fonction g *en point* $(0,0)$.

Solution

1) Etudions l'existence de limite de la fonction f *en point* $(0,0)$.

On a :

$$f \text{ est définie si et seulement si : } x^2 + y^2 \neq 0, \text{ d'où } (x,y) \neq (0,0).$$

Alors, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

On a pour $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc, la fonction f *n'a pas de limite en point* $(0,0)$.

2) Etudions l'existence de limite de la fonction g *en point* $(0,0)$.

On a : $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, *on a :*

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} |xy| \leq \frac{1}{2} |xy|$$

donc,

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|xy|.$$

Comme, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|xy| = 0$ *donc d'après théorème d'encadrement on a :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Exercise 2.40 *Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ pour tout réel y_0.

4) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

5) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont-elles continues en $(0,y_0)$?

Solution

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction f :

On a : $D_f = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$.

2) Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: la fonction f est continue car elle est composée de fonctions élémentaires continues.

Pour $x = 0$, on a :,

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x^2 \sin \frac{y}{x} \right| \leq x^2.$$

Comme, $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ *donc d'après théorème d'encadrement on a :* $\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = 0$, *donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

3) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ pour tout réel y_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x,y) - f(0,y_0)}{x} = \lim_{x\to0} \left(x \sin \frac{y}{x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{y\to0} \frac{f(x,y) - f(0,y_0)}{y} = \lim_{y\to0} \left(x \sin \frac{y}{x} \right) = 0.$$

4) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *pour tout réel* (x,y) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Soit (x,y) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin\frac{y}{x}\right) = 2x\sin\frac{y}{x} + x^2\left(\frac{-y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x} = 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin\frac{y}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{y}{x} = x\cos\frac{y}{x}.$$

5) Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont-elles continues en* $(0,y_0)$ *?*

La continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y_0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{y_0}{x} - y\cos\dfrac{y_0}{x}\right)$ *: n'existe pas, donc donc* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,y_0)$.

La continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{y}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$, *donc* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *est continue en* $(0,y_0)$.

Exercise 2.41 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in D_f : f(x,y) \leq \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$.
2) Etudier la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.
3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4) Montrer que f *est différentiable en* $(0,0)$.

Solution.

1) Montrons que : $\forall (x,y) \in D_f : 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)$.

On a : $D_f = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$, *d'où* $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Donc,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}|xy|\,.\,|xy| \leq \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right),$$

d'où,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

2) Etudions la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ *: la fonction* f *est une fonction rationnelle, elle est continue.*

Pour $(0,0)$, *on a :,*

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 0$, *d'après théorème d'encadrement on a :* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

3) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k} = \lim_{k\to0}\frac{0}{k^3} = 0.$$

4) Montrons que f *est différentiable en* $(0,0)$.

Calculons :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

On utilise les coordonnées polaires : posons : $h = r\cos\theta$ *et* $k = r\sin\theta$, *donc* $(h,k) \to (0,0)$ *on aura*

$r \to 0$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Donc,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2}{\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}.$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} \frac{r^4(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2}{r^3} = \lim_{\substack{r\to 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 = 0.$$

Alors, f *est différentiable en* $(0,0)$.

Exercise 2.42 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie comme suit :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3xy-5y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

1) En utilisant la définition, Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *pour* $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Ecrire la différentielle de f *en point* $(0,0)$.

Solution.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}(2) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{-5k^3}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0}(-5) = -5.$$

2) Soit $(x,y) \neq (0,0)$. *Calculons* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(6x^2+3y)(x^2+y^2) - (2x^3+3xy-5y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{2x^4+3y^3-3x^2y+10xy^3+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3x-15y^2)(x^2+y^2) - (2x^3+3xy-5y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{3x^3-5y^4-3xy^2-4x^3y-15x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3) Différentielle de f en point $(0,0)$.

$$df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy = 2dx - 5dy.$$

Chapitre 3

Intégrales Doubles, Intégrales Triples

3.1 Introduction

L'intégrale multiple est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables. Les deux principaux outils de calcul sont le changement de variables et le théorème de Fubini. Ce dernier permet de ramener un calcul d'intégrale multiple à des calculs d'intégrales simples. Dans ce chapitre, nous présentons les intégrales doubles et triples.

3.2 Intégrales Doubles

Dans cette section, on donnera quelques éléments relatifs aux calculs d'intégrales double.

Soit D une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (D est limité par des courbes simples dans $\mathbb{R}^2$) et soit

$$\begin{array}{cccc} f: & D & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction à deux variables x, y à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur le domaine D. L'intégrale double de f sur D est donnée par :

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

3.2.1 Propriétés de l'intégrale double

1) **Aire D** : Si $f(x,y) = 1$, alors : $Aire\ D = \iint\limits_D dxdy.$

2) **Positivité** : Si $f(x,y) \geq 0$ pour $(x,y) \in D^2$, alors : $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 0.$

3) **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions à deux variables qui sont intégrables sur D et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\iint\limits_D [\lambda f(x,y) + \beta g(x,y)]\,dxdy = \lambda \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

4) **Relation de Chasles** : Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, c'est à dire D_1 et D_2 deux domaines qui sont disjoints (Aire $D_1 \cap D_2 = 0$), alors :

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

3.2.2 Méthodes de calcul des intégrales doubles

Nous intéressons dans cette section au calcul pratique des intégrales doubles.

Théorème 3.1 ***(Théorème de Fubini)***
Soient h et k deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, telle que $\forall x \in [a,b] : h(x) \leq k(x)$ et soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } h(x) \leq y \leq k(x)\right\}.$$

Si,

$$\begin{array}{rcl} f: \quad D & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

est une fonction continue, alors f est intégrable sur D et on a :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

ce théorème définit l'intégrale double à l'aide de deux intégrales simples.

Remarque 3.1 *Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\iint_D dxdy$ est l'aire de D.*

Corollaire 3.2 *L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un pavé (rectangle)*

$$D = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\right\}.$$

est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Remarque 3.2 *Dans ce cas, l'ordre d'intégration n'est pas forcé.*

Exemple 3.3 *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2, \end{array}$$

une fonction et $D = [1,2] \times [0,3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$ *un rectangle.*

On va commencer par intégrer cette fonction par rapport à y*, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à* x*, on obtient :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^3 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dy \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{3} y^3 + 2y \right]_0^3 \right) dx = \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{9}{2} x + 15 \right) dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{9}{4} x^2 + 15x \right]_1^2 = \frac{115}{4}.$$

Ou bien on va commencer par intégrer cette fonction par rapport à x*, puis continuons le calcul en intégrant par rapport à* y*, on obtient aussi :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^3 \left(\int_1^2 (x^2 + xy + y^2 + 2)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y + x y^2 + 2x \right]_1^2 \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{3}{2} y + y^2 + \frac{13}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{3}{4} y^2 + \frac{1}{3} y^3 + \frac{13}{3} y \right]_0^3 = \frac{115}{4}.$$

Proposition 3.1 *Soient*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

et $D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}.$
Si, $f(x,y) = f_1(x) . f_2(y)$ *alors :*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f_1(x) . f_2(y)\,dxdy = \int_a^b f_1(x)\,dx . \int_c^d f_2(y)\,dy$$

Exemple 3.4 *Soit* $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1,2] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 1 \leq y \leq 2\right\}$.

Calculer $\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\, dxdy$.

On a :

$$\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (y+1)(\cos 3x)\, dxdy$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x)\, dx\right)\left(\int_1^2 (y+1)\, dy\right) = \left(\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\left[\frac{1}{2}y^2 + y\right]_1^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin 0\right)\left(\frac{1}{2}2^2 + 2 - \left(\frac{1}{2}1^2 + 1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin 0\right)\left(4 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{6}.$$

Donc, $\iint\limits_D (y+1)(\cos 3x)\, dxdy = -\frac{5}{6}$.

3.2.3 Changement de variables

Les coordonnées cartésiennes (x, y) ne sont pas toujours les plus adaptées au calcul d'une intégrale, parfois on utilise d'autres coordonnées. Il existe des outils sont basés sur des calculs de dérivées partielles et de déterminant.

Soient

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset V & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction continue sur un compact D.

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \triangle \subset \mathbb{R}^2 & \to & D \subset \mathbb{R}^2, \\ & (u,v) & \mapsto & \Psi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \end{array}$$

est une application bijective et de classe C^1 telle que $\Psi(\triangle) = D$.

On a : $(D = \Psi(\triangle)) \Leftrightarrow (\triangle = \Psi^{-1}(D))$.

On supposera en outre que les fonctions x et y admettent des dérivées partielles continues sur $\triangle$. On définira le Jacobien de l'application par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v},$$

d'où $|\det J| = \left| \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v} \right|$ est la valeur absolue de déterminant du la matrice Jacobienne ne doit pas s'annuler sur $\triangle$ pour que l'application Ψ soit inversible. Alors.

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\triangle} f(x(u, v), y(u, v))\, |\det J|\, dudv,$$

Nous présentons deux exemples différents qui montrent que le changement de variables est très important dans les deux situations suivantes :

1) Cas de domaine D est délimité par quatre droites.

2) Cas de domaine D est délimité par des formes circulaires.

Cas 1 : Le domaine D est délimité par quatre droites.

Exemple 3.5 *Soit* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x + y \leq 2 \text{ et } -1 \leq x - y \leq 1\}$.

Calculer $\iint\limits_{D} (x+2)^2\, dxdy$.

En utilisant le changement de variables suivant, on pose

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2}, \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la matrice Jacobienne est donnée par :

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}, \quad d'où\ |\det J| = \frac{1}{2}.$$

Avec ce changement de variable, le nouveau domaine $\triangle$ s'écrit alors :

$$\triangle = \left\{ (u,v) \in \ \mathbb{R}^2 / -2 \leq u \leq 2 \quad et \ \ -1 \leq v \leq 1 \right\}.$$

Donc,

$$\iint\limits_{D} (x+2)^2 \, dxdy = \iint\limits_{\triangle} \left(\frac{u+v}{2} + 2 \right)^2 \frac{1}{2} dudv = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} \left(\frac{u+v}{2} + 2 \right)^2 du \right) dv$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\left[\frac{1}{3} \left(\frac{u+v}{2} + 2 \right)^3 \right]_{-2}^{2} \right) dv = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{v}{2} + 3 \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{v}{2} + 1 \right)^3 \right) dv$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{v}{2} + 3 \right)^4 - \left(\frac{v}{2} + 1 \right)^4 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{2} + 3 \right)^4 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^4 \right) - \frac{1}{6} \left(\left(\frac{-1}{2} + 3 \right)^4 - \left(\frac{-1}{2} + 1 \right)^4 \right) = \frac{53}{3}.$$

Cas 2. Le domaine D est délimité par des formes circulaires.

Lorsque le domaine D est délimité par des formes circulaires, cela nous permet d'utiliser les coordonnées polaires comme changement de variable. Pour cela, on considère les variables suivantes :

$$\begin{cases} x = x\,(r, \theta) = r \cos \theta, \\ y = y\,(r, \theta) = r \sin \theta. \end{cases}$$

Comme rappel, notons qu'un point $M\,(x,y)$ est déterminé par : r la distance du point M à l'origine : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'axe (ox) d'où $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

En utilisant les coordonnées polaires, la matrice Jacobienne s'écrit souvent :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Donc, $|\det J| = r$.

La formule s'écrit :

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\triangle} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Exemple 3.6 *Soit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Calculer $\iint\limits_D y^2 dxdy.$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Donc,

$$\iint\limits_D y^2 dxdy = \iint\limits_{\triangle} (r\sin\theta)^2\,rdrd\theta,$$

où $\triangle = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/1 \le r \le 2 \text{ et } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Alors,

$$\iint\limits_D y^2 dxdy = \iint\limits_{\triangle} (r\sin\theta)^2\,rdrd\theta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2\,rdrd\theta,$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2\,d\theta\right) = \left(\int_1^2 r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{15\pi}{4}.$$

Exemple 3.7 *Calculer la surface du cercle de centre* $O(0,0)$ *et de rayon* $r = 3$.

Dans ce cas on pose : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \le x^2+y^2 \le 9\}$ *et la surface demandée est donnée par :* $\iint\limits_D dxdy.$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Donc, $\triangle = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 \le r \le 3 \text{ et } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} dxdy &= \iint\limits_{\triangle} rdrd\theta = \int\limits_{0}^{3}\int\limits_{0}^{2\pi} rdrd\theta, \\
&= \left(\int\limits_{0}^{3} rdr\right)\left(\int\limits_{0}^{2\pi} 1.d\theta\right) = \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^3 \left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi} \\
&= \left(\frac{9}{2}\right)(2\pi) = 9\pi.
\end{aligned}$$

3.2.4 Applications : Moment d'inertie, Centre de gravité

Moment d'inertie d'une figure plane

Définition 3.1 *(Moment d'inertie)*

On appelle moment d'inertie I d'un point matériel M de masse m par rapport à un point O le produit de cette masse m par le carré de la distance r du point M au point O. On écrit : $I = m.r^2$

Le moment d'inertie d'un système de points matériels $m_1, m_2, ..., m_n$ par rapport à O est la somme des moments d'inertie des divers points du système c'est à dire : $I = \sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i.r_i^2$

Le moment d'inertie d'une figure matérielle plane D contenue dans le plan Oxy par rapport à l'origine des coordonnées est

$$I = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint\limits_{D} y^2 dxdy : \text{est appelée le moment d'inertie de la figure } D \text{ par rapport au axe } Ox. \\
I_y &= \iint\limits_{D} x^2 dxdy\ : \text{est appelée le moment d'inertie de la figure } D \text{ par rapport au axe } Oy.
\end{aligned}$$

Exemple 3.8 *Calculer le moment d'inertie du disque $D = \{(x, y) \in\ \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 9\ \}$ par rapport a son centre $O\,(0, 0)$.*

On a, d'après la formule

$$I = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Donc, $\triangle = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 3 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
Alors,

$$\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint\limits_{\triangle} r^2 r dr d\theta = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} r^3 dr d\theta,$$

$$= \left(\int\limits_0^3 r^3 dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} 1.d\theta\right) = \left[\ \frac{1}{4}r^4\ \right]_0^3 \left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{3^4}{4}\right)(2\pi) = \frac{81}{2}\pi.$$

Exemple 3.9 *Calculer le moment d'inertie de la figure matérielle plane* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\ \}$ *par rapport a son centre* $O(0,0)$.

On a :

$$\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy\right) dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right) dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Alors, $\displaystyle\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{1}{6}.$

3.2.5 Centre de gravité d'une figure plane

Les coordonnées du centre de gravité d'un système de points matériels $P_1, P_2, ..., P_n$ de masses $m_1, m_2, ..., m_n$ sont données par les formules

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i.m_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i.m_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}.$$

Les coordonnées du centre de gravité d'une figure plane D est :

$$x_c = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Exemple 3.10 *Déterminer les coordonnées du centre de gravité du*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

en supposant la densité superficielle partout égale à 1.

On a :

$$\begin{aligned}
\iint_D xdxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xdxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xdy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[\quad xy \quad \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{-1}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

et

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (1-x^2) \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

et

$$\iint_D dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\ y \ \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Alors, les coordonnées du centre de gravité du

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \ \text{et} \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \right\},$$

sont :

$$x_c = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi}$$

3.3 Exercices corrigés

Exercise 3.11 *Calculer l'aire d'un disque D de centre $O\,(0,0)$ et de rayon r.*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq r^2 \ \right\},$$

Solution.

On peut trouver l'aire S d'un disque D grâce au calcul intégral comme suit :

$$S = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

On pose le changement de variable $x = r\sin t \Rightarrow dx = (r\cos t)\,dt$ *et*

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0, \text{ on aura } t = 0. \\ \text{Si } x = r, \text{ on aura } t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx \quad &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (r\sin t)^2}\,(r\cos t)\,dt \\
&= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)\,dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= 4r^2 \left[\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4r^2 \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) \right) = \pi r^2.
\end{aligned}$$

On peut aussi calculer l'aire S *comme suit :*

On utilisons les coordonnées polaires et le jacobien du passage en polaires on obtient :

$$\begin{aligned}
S = \int_0^r \int_0^{2\pi} t.dt.d\theta \quad &= \left(\int_0^r t.dt\right).\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^r . \left[\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}r^2 . (2\pi) = \pi r^2.
\end{aligned}$$

Exercise 3.12 *Soit* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 3\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy$.

Solution

$$\iint_D xe^{xy}dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{3}(xe^{xy})\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\left[\quad e^{xy}\quad\right]_0^3\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(e^{3x} - e^{0}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(e^{3x} - 1\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3x} - x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}e^{3} - 1\right) - \left(\frac{1}{3}e^{-3} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{3} - \frac{1}{3}e^{-3} - 2$$

Donc, $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy = \frac{1}{3}e^{3} - \frac{1}{3}e^{-3} - 2.$

Exercise 3.13 *Soit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0, y \geq 0 \ et\ x+y \leq 4\}.$

Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2 + y + 1)\,dxdy.$

Cherchons d'abord les bornes d'intégrations, on a :

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ \\ 0 \leq y \leq 4 - x. \end{cases}$$

Donc le domaine d'intégration s'écrit aussi :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 4 \ et\ 0 \leq y \leq 4 - x\right\}.$$

Solution

$$\iint\limits_D (x^2+y+1)\,dxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{4-x} (x^2+y+1)\,dy\right) dx = \int\limits_0^4 \left(\left[\left(x^2y+\frac{1}{2}y^2+y\right)\right]_0^{4-x}\right) dx$$

$$= \int\limits_0^4 \left(x^2(4-x)+\frac{1}{2}(4-x)^2+(4-x)\right) dx$$

$$= \int\limits_0^4 \left(-x^3+\frac{9}{2}x^2-5x+12\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{9}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2+12x\right]_0^4$$

$$= -\frac{1}{4}4^4+\frac{9}{6}4^3-\frac{5}{2}4^2+12(4) = 40.$$

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y+1)\,dxdy = 40.$

Exercise 3.14 *Soit :* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \le x^2+y^2 \le 16\}$.

Calculer $\displaystyle\iint\limits_D (7+x^2+y^2)\,dxdy$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad d\text{'où} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \\ \det J = r \end{cases}$$

Donc,

$$\iint\limits_D (7+x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{\triangle} (7+r^2)\,rdrd\theta,$$

où $\triangle = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/1 \le r \le 4 \text{ et } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Alors,

$$\iint\limits_D (7+x^2+y^2)\,dxdy = \int\int_{\triangle} (7+r^2)\,rdrd\theta = \int\limits_1^4 \int\limits_0^{2\pi} (r^3+7r)\,drd\theta,$$

$$= \left(\int\limits_1^4 (r^3+7r)\,dr\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} 1.d\theta\right) = \left[\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{7}r^2\right]_1^4 \left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\left(4^3+\frac{16}{7}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)\right)(2\pi) = \frac{1845}{14}\pi.$$

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D (7+x^2+y^2)\,dxdy = \frac{1845}{14}\pi.$

Exercise 3.15 *Soit :* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq 4\ \}.$

Calculer $\displaystyle\iint\limits_D \frac{4}{2+x^2+y^2}dxdy$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad d\text{'}o\grave{u} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \\ \det J = r \end{cases}$$

Donc,

$$\iint\limits_D \frac{4}{2+x^2+y^2}dxdy \quad = \iint\limits_\triangle \frac{4}{2+r^2}rdrd\theta,$$

où $\triangle = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}.$

Alors,

$$\iint\limits_D \frac{4}{2+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_\triangle \frac{4}{2+r^2}rdrd\theta = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4r}{2+r^2}drd\theta,$$

$$= \left(\int_0^2 \frac{4r}{2+r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta\right) = \left(2\int_0^2 \frac{2r}{2+r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta\right)$$

$$= \Big[\ 2\ln(2+r^2)\ \Big]_0^2 \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= ((2\ln(2+4)) - (2\ln(2)))\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(\ln 6 - \ln 2)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi\ln 3.$$

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D \frac{4}{2+x^2+y^2}dxdy = \pi\ln 3.$

3.4 Intégrales triples

Dans cette section, nous présentons l'intégrale triple d'une fonction à trois variables sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Par la suite, nous présentons quelques techniques de calcul : changements de variables cylindriques, changements de variables sphériques.

Soit f une fonction définie de V à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & V \subset \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

où V une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$.

L'intégrale triple de f sur V est donnée par :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz.$$

3.4.1 Propriétés de l'intégrale triple

1) **Volume V** : Si $f(x,y,z) = 1$, alors :

$$VolumeV = \iiint\limits_V 1dxdydz.$$

2) **Positivité** : Si $f(x,y,z) \geq 0$ pour $(x,y,z) \in V^3$, alors :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz \geq 0.$$

3) **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions à deux variables qui sont intégrables sur V et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{l} \iiint\limits_V [\lambda f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)]\, dxdydz = \\ \lambda \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint\limits_V g(x,y,z)\, dxdydz. \end{array}$$

4) **Relation de Chasles** : Si $V = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, c'est à dire V_1 et V_2 deux domaines qui sont disjoints (Volume $V_1 \cap V_2 = 0$), alors :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

3.4.2 Méthodes de calcul des intégrales triples

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit :

$$V = [a,b]\times[c,d]\times[n,m] = \left\{(x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \text{ et } n \leq z \leq m \ \right\}$$

un parallélépipède fermé du plan $\mathbb{R}^3$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Théorème 3.16 ***(Théorème de Fubini)***
Soit f application continue sur le parallélépipède V à valeur dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} f: & V \subset \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

où $V = \{(x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \ \text{et}\ n \leq z \leq m \ \}$.
Alors on a :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_n^m f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Remarque. *Dans ce cas l'ordre d'intégration n'est pas forcé donc, on va choisir l'ordre où les calculs sont facile.*

Exemple 3.17 *Soit : $V = \{(x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \ \text{et}\ 0 \leq z \leq 3 \ \}$.*
Calculer $\iiint\limits_V (2x + 3y - z + 5)\,dxdydz$.

On a :

$$\iiint\limits_V (2x+3y-z+5)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 (2x+3y-z+5)\,dxdydz,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (2x+3y-z+5)\,dz\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\left[\left(2xz+3yz-\frac{1}{2}z^2+5z\right)\right]_0^3\right) dy\right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(6x+9y+\frac{21}{2}\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\left[\left(6xy+\frac{9}{2}y^2+\frac{21}{2}y\right)\right]_0^2\right) dx,$$

$$= \int_0^1 (12x+39)\,dx = \left[\ 6x^2+39x\ \right]_0^1 = 45.$$

Donc, $\iiint\limits_V (2x+3y-z+5)\,dxdydz = 45.$

Théorème 3.18 ***(Théorème de Fubini)***

Soient Ω *un compact de* $\mathbb{R}^2$ *et* h, k *deux applications continues de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *et*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \Omega, h(x,y) \le z \le k(x,y)\right\},$$

un compact de $\mathbb{R}^3$, *et soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & V \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

Alors on a :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_\Omega \left(\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dxdy.$$

Exemple 3.19 *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = x^2 + yz, \end{array}$$

une fonction et

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0 \ \text{ et } x + y + 2z \leq 1 \right\}.$$

Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz$ *sur le domaine* D .

On a :

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-2z} \left(\int_0^{1-x-2z} (x^2 + yz)\, dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-2z} \left(-x^3 + \left(1 - \frac{3}{2}z\right) x^2 + (2z^2 - z)\, x + \frac{1}{2} z (1-2z)^2 \right) dx \right) dz$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{12} \right) dz$$

$$= \left[\quad -\frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{12}z \quad \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{96}$$

Proposition 3.2 *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad V \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \mapsto & f_1(x) . f_2(y) . f_3(z), \end{array}$$

où f_1, f_2 *et* f_3 *trois fonctions continues et*

$$V = [a,b] \times [c,d] \times [n,m] = \left\{ (x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \ \text{ et } n \leq z \leq m \ \right\}$$

Alors on a :

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_n^m f_1(x) . f_2(y)\, dydxdz$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)\, dx \right) . \left(\int_c^d f_2(y)\, dy \right) . \left(\int_n^m f_3(z)\, dz \right).$$

Exercise 3.20 *Soit :* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2 \text{ } et \text{ } 0 \leq z \leq 3 \}$

Calculer $\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz.$

On a :

$$\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz,$$

$$= \left(\int\limits_0^\pi (\sin x)\, dx \right) \left(\int\limits_0^2 y^2 dy \right) \left(\int\limits_0^3 (1+z)\, dz \right)$$

$$= \left(\Big[\quad -\cos x \quad \Big]_0^\pi \right) \left(\left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^2 \right) \left(\left[z + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 \right)$$

$$= (-\cos \pi + \cos 0) \left(\frac{8}{3} \right) \left(3 + \frac{9}{2} \right) = 40.$$

Donc, $\iiint\limits_V (1+z)\, y^2 (\sin x)\, dxdydz = 40.$

3.4.3 Changement de variables

Dans quelques cas le calcul de $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz$ s'avère très difficile. Afin de faciliter les calculs, on peut utiliser un changement de variables adéquat pour calculer cette intégrale.

Dans le cas, le changement de variables est donné comme suit :

$$(x, y, z) = h(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

où h est une application bijective et de classe C^1 sur $\triangle = h^{-1}(V)$. Alors, on a :

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_\triangle f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |\det J_h|\, dudvdw,$$

où J est la matrice Jacobienne donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

et $|\det J|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobien J qui ne doit pas s'annuler sur $\triangle$.

Passage en coordonnées cylindriques :

On considère le changement de variables en coordonnées cylindriques suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

La matrice Jacobienne associée est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos\theta)^2 + r(\sin\theta)^2 = r.$$

Par conséquent la formule s'écrit :

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\triangle f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdrd\theta dz.$$

Exemple 3.21 *Soit :* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 2\}$.

Calculer $\iiint\limits_V z dx dy dz$.

On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

et déterminant de la matrice Jacobienne associée est donnée par :

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos\theta)^2 + r(\sin\theta)^2 = r.$$

Donc,

$$\iiint\limits_V z dx dy dz = \iiint\limits_\triangle z r dr d\theta dz.$$

où $\triangle = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z \leq 2\}$.

On a :

$$\iiint\limits_\triangle z r dr d\theta dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z r dr d\theta dz = \left(\int_0^1 r dr\right)\left(\int_0^2 z dz\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1\right)\left(\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^2\right)\left(\left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(2\pi) = 2\pi$$

Donc, $\iiint\limits_V z dx dy dz = 2\pi$.

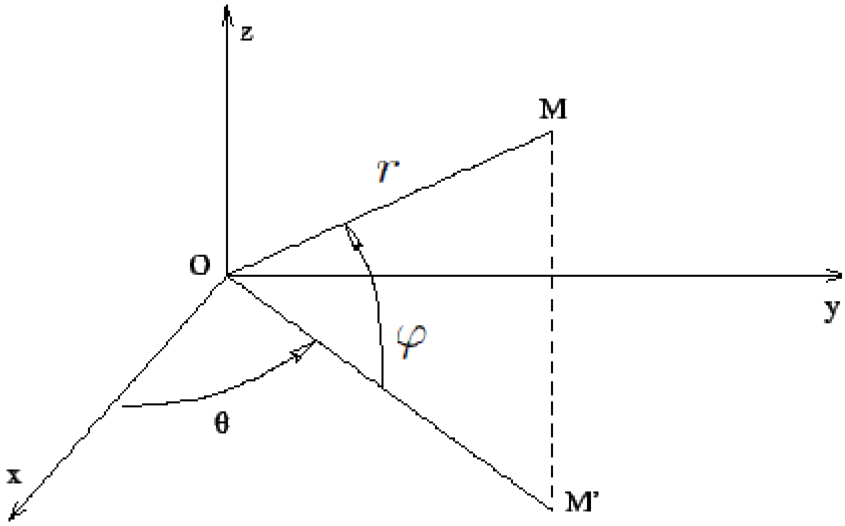
Passage en coordonnées sphériques :

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

Notons qu'un point $M(x, y, z)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \text{sa distance à l'origine : } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \text{sa longitude : } 0 \le \theta \le 2\pi \\ \text{sa latitude : } \dfrac{-\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Dans ce cas, la matrice Jacobienne (coordonnées sphériques) est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi.$$

Par conséquent la formule s'écrit :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_\triangle f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\left(r^2\cos\varphi\right) drd\theta dz.$$

Exemple 3.22 *Soit :* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Calculer $\iiint\limits_V dxdydz$.

On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \dfrac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

De plus le déterminant de la matrice Jacobienne associée est donnée par : $\det J = r^2\cos\varphi$. *Donc,*

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{\triangle} \left(r^2\cos\varphi\right) drd\theta d\varphi.$$

où $\triangle = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \textit{et}\ \dfrac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V dxdydz = & \iiint\limits_{\triangle} (r^2\cos\varphi)\, drd\theta d\varphi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos\varphi)\, drd\theta dz, \\
& = \left(\int_0^2 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right)\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\right), \\
& = \left(\left[\ \frac{1}{3}r^3\ \right]_0^2\right)\left(\left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi}\right)\left(\left[\ \sin\varphi\ \right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right), \\
& = \left(\frac{8}{3}\right)(2\pi)\left(\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \frac{32\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Donc, $\iiint\limits_V zdxdydz = \dfrac{32\pi}{3}$.

3.4.4 Applications : Moment d'inertie, Centre de gravité

Moment d'inertie d'un corps

Les moments d'inertie d'un point matériel $M\,(x,y,z)$ de masse m par rapport aux axes de coordonnées O_x, O_y, O_z s'expriment respectivement par les formules :

$$I_{xx} = (y^2+z^2)\,m, \qquad I_{yy} = (x^2+z^2)\,m, \qquad I_{zz} = (x^2+y^2)\,m.$$

Les moments d'inertie d'un corps s'expriment par les intégrales correspondantes :

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,\gamma\,(x,y,z)\,dxdydz, \qquad I_{yy} = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\,\gamma\,(x,y,z)\,dxdydz$$

et $I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\gamma\,(x,y,z)\,dxdydz.$

où $\gamma\,(x,y,z)$ est la densité de la matière.

Exemple 3.23 *Calculer le moment d'inertie d'un cylindre circulaire droit de hauteur $2h$ et de rayon R par rapport à un diamètre de sa section moyenne, la densité γ_0 étant constante.*

Solution.

Choisissons un système de coordonnées comme suit : confondons l'axe Oz avec l'axe du cylindre et prenons l'origine au centre de symétrie. Le problème revient alors à chercher le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Ox :

$$I_{zz} = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\gamma_0 dxdydz.$$

Centre de gravité d'un corps

Les coordonnées du centre de gravité d'un corps sont :

$$x_c = \frac{\displaystyle\iint_V x\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz}, \qquad y_c = \frac{\displaystyle\iint_V y\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\text{et} \qquad z_c = \frac{\displaystyle\iint_V z\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iint_V \gamma(x,y,z)\,dxdydz}.$$

où $\gamma(x,y,z)$ est la densité de la matière.

Exemple 3.24 *Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la moitié supérieure d'une sphère de rayon R et de centre à l'origine. On considère que la densité γ_0 est constante.*

Solution.

L'hémisphère est limité par les surfaces : $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$.

La cote du centre de gravité est donnée par la formule :

$$z_c = \frac{\displaystyle\iiint_V z\gamma_0\,dxdydz}{\displaystyle\iiint_V \gamma_0\,dxdydz}.$$

Passons en coordonnées sphériques, on a :

$$z_c = \frac{\gamma_0 \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R \left(r^3\cos\varphi\sin\varphi\right)dr\right)d\varphi\right)d\theta}{\gamma_0 \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R \left(r^2\sin\varphi\right)dr\right)d\varphi\right)d\theta} = \frac{2\pi\dfrac{R^4}{8}}{\dfrac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R.$$

On a, évidemment, en vertu de la symétrie de 1'hémisphère, $x_c = y_c = 0$.

3.5 Exercices corrigés

Exercise 3.25 *Calculer le volume de la boule $B(0,R)$.*

Solution.

Par un changement de variables en coordonnées sphériques. On a :

$$\iiint\limits_{B(0,R)} dxdydz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi,$$

$$= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^R\right)\left(\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\left(\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\right),$$

$$= \left(\frac{1}{3}R^3\right)(2\pi)\left((-\cos\pi)+\cos 0\right) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right).$$

Exercise 3.26 *Calculer* $\iiint\limits_V x(1-y)(\sin 2z)\, dxdydz,$ *où*

$$V = [0,2]\times[-1,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1 \text{ et } 0 \le z \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Solution.

On a :

$$\iiint\limits_V x(1-y)(\sin 2z)\, dxdydz = \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-y)(\sin 2z)\, dxdydz,$$

$$= \left(\int_0^2 xdx\right)\left(\int_{-1}^1 (1-y)\, dy\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2z)\, dz\right),$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)\left(\left[y-\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^1\right)\left(\left[\frac{-1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right),$$

$$= \left(\frac{4}{2}\right)\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{2}\cos\pi\right)-\left(\frac{-1}{2}\cos 0\right)\right) = 4.$$

Donc, $\iiint\limits_V x(1-y)(\sin 2z)\,dxdydz = 4.$

Exercise 3.27 *Calculer* $\iiint\limits_V (x+2y+3z)\,dxdydz,$ *où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x+y+z \leq 1\right\}.$$

Solution.

On a :

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0, \\ x+y+z \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0 \leq z \leq 1-x-y. \end{cases}$$

On a :

$$\iiint\limits_V (x+2y+3z)\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (x+2y+3z)\,dz \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\left[(x+2y)\,z + \frac{3}{2}z^2 \right]_0^{1-x-y} \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) dy \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(\left[-\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) y \right]_0^{1-x} \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6}(1-x)^3 - \frac{1}{2}(1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right)(1-x) \right) dx,$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6} \right) dx,$$

$$= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{5}{6}x \right]_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{6} = \frac{1}{4}.$$

Alors, $\displaystyle\iiint\limits_V (x+2y+3z)\,dxdydz = \frac{1}{4}.$

Exercise 3.28 *1) Soit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Calculer sur D *l'intégrale double suivante :* $\displaystyle\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\,dxdy$

2) Soit $V = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2] \times [0,3]$

Calculer sur V *l'intégrale triple suivante :* $\displaystyle\iiint\limits_V (1+z)\,e^y\,(\cos x)\,dxdydz$

Solution.

1) Calculons $\displaystyle\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\,dxdy$, *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x^2+y^2 \le 4\}$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \qquad et \quad |\det J| = r$$

Donc, $\displaystyle\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_\triangle (1+r^2)\,rdrd\theta,$

où $\triangle = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le r \le 2 \text{ et } 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\,dxdy &= \iint\limits_\triangle (1+r^2)\,rdrd\theta \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} (r+r^3)\,drd\theta = \left(\int_0^2 (r+r^3)\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1.d\theta\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 . \left[\ \theta\ \right]_0^{2\pi} = (2+4)\,(2\pi) = 12\pi.
\end{aligned}$$

2) Calculons $\displaystyle\iiint\limits_V (1+z)\,e^y\,(\cos x)\,dxdydz$ *où* $V = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2] \times [0,3]$

On a :

$$\iiint\limits_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2} \int\limits_0^{3} (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz,$$

$$= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\, dx \right) \left(\int\limits_0^{2} e^y dy \right) \left(\int\limits_0^{3} (1+z)\, dz \right)$$

$$= \left(\left[\quad \sin x \quad \right]_0^{\dfrac{\pi}{2}} \right) \left(\left[\quad e^y \quad \right]_0^2 \right) \left(\left[\quad z + \frac{1}{2} z^2 \quad \right]_0^3 \right)$$

$$= (1) \left(e^2 - 1\right) \left(3 + \frac{9}{2}\right) = \frac{15}{2} \left(e^2 - 1\right).$$

Donc, $\displaystyle\iiint\limits_V (1+z)\, e^y (\cos x)\, dxdydz = \frac{15}{2} \left(e^2 - 1\right).$

Bibliographie

[1] J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.

[2] N. Faddeev, I. Sominski, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou

[3] M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boshet, Exercices d'algèbre, 1er cycle scientifique préparation aux grandes écoles 2e année, Armand Colin – Collection U.

[5] K. Allab, *Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle.* Office des publications universitaires, (1986).

[6] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs*, Librairie Armand Colin (1977).

[7] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, *Précis de mathématiques, Analyse- première année*, Bréal, Rosny 2003.

[8] J. P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod 2014.

[9] M. Mehbali, *Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle)*, Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[10] J. M. Monier, *ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5e édition. Dunod, Paris, 2006.