UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BÉJAIA

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

Polycopié de Cours

Cours et Exercices de Mathématiques I

Matière : Mathématiques I

Conformément au Programme de Première Année LMD

Domaine Sciences de Technologie

Rédigé Par :

- **Dr. BOUKOUCHA RACHID**

Année Universitaire : 2022 –2023

Table des matières

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du domaine Sciences et Technique dans le cadre du système L.M.D. Le manuscrit couvre le programme officiel du module **Mathématiques I** qui est consacré au programme du premier semestre. On a inclus dans ce cours de nombreux exemples et exercices typiques avec corrigés.

Le programme officiel du matière **Mathématiques I** du premier semestre est composé de six chapitres comme suit :

Chapitre 1 : Méthodes du raisonnement mathématique.

1.1 Raisonnement direct.
1.2 Raisonnement par contraposition.
1.3 Raisonnement par l'absurde.
1.4 Raisonnement par contre exemple.
1.5 Raisonnement par récurrence.

Chapitre 2 : Les ensembles, les relations et les applications.

2.1 Théorie des ensembles.
2.2 Relation d'ordre, Relations d'équivalence.
2.3 Applications : Définition d'une application, Application injective, surjective, bijective, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.

Chapitre 3 : Les fonctions réelles à une variable réelle.

3.1 Limite, continuité d'une fonction.
3.2 Dérivée et différentiabilité d'une fonction.

Chapitre 4 : Application aux fonctions élémentaires.

4.1 Fonction puissance.
4.2 Fonction logarithmique.
4.3 Fonction exponentielle.
4.4 Fonction hyperbolique.
4.5 Fonction trigonométrique.
4.6 Fonction inverse

Chapitre 5 : Développement limité.

5.1 Formule de Taylor.
5.2 Développement limité.
5.3 Applications.

Chapitre 6 : Algèbre linéaire.

6.1 Lois et composition interne.
6.2 Espace vectoriel, base, dimension
définitions et propriétés élémentaires.
6.3 Application linéaire, noyau, image, rang.

J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Analyse et Algèbre I qui constituent la base des mathématiques à l'université.
Enfin, des erreurs peuvent être relevées, merci de me les communiquer par Email à l'adresse : (rachid_boukecha@yahoo.fr) ou (rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz).

Chapitre 1

Méthodes du raisonnement mathématique

1.1 Eléments de la logique mathématique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Dans ce chapitre, on présentera les notions élémentaires de la logique mathématique et les différents modes de raisonnement.

1.1.1 Proposition logique

Définition : On appelle *proposition logique* toute assertion (phrase ou expression,...) à laquelle on peut répondre sans ambiguïté, sans hésitation ni renseignement complémentaires par *vrai* ou *faux*, pas les deux en même temps.

Les propositions sont distinguées par des lettres majuscules : P, Q, R, ...

Exemples :

P : " $6+3=9$" est une proposition vraie.

Q : "17 est un nombre pair" est une proposition fausse.

R : "$x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4 = 0$" n'est pas une proposition puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on connaît pas x.

Négation d'une proposition logique : Toute proposition logique admet une *négation* notée par $\overline{P}$ ou (non P) est une proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. P et $\overline{P}$ ne sont jamais toutes les deux vraies simultanément.

On résume ce qui précède dans une table de vérité suivante :

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

$Vrai \leftrightarrow 1$ et $Faux \leftrightarrow 0$.

Les valeurs 1 et 0 ont les appelles les valeurs de vérité.

1.1.2 Connecteurs logiques

Dans les raisonnements mathématiques, on utilise à la fois plusieurs propositions qui sont reliées entre elles par des relations appelées *connecteurs logiques.* Il en existe quatre principaux : conjonction, disjonction, implication, équivalence.

Conjonction $\wedge$ (et)

Soient P et Q deux propositions logique.

La conjonction des propositions P et Q, notée P et Q ou $P \wedge Q$ est une proposition qui n'est vraie que si P, Q sont toutes les deux vraies. On résume ceci en une table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarque : $\left(P \wedge \overline{P}\right)$ est toujours fausse.

Disjonction $\vee$ (ou)

Soient P et Q deux propositions logique.

La disjonction de deux propositions P et Q, notée (P ou Q) ou bien $(P \vee Q)$ est une proposition logique vraie si l'une au moins des propositions P, Q est vraie. On résume ceci en une table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque : $\left(P \vee \overline{P}\right)$ est toujours vraie.

Implication logique $(P \Longrightarrow Q)$

Soient P et Q deux propositions logique.

La proposition $(\overline{P} \vee Q)$ est appelée implication logique et on la note $P \Longrightarrow Q$: se lit P implique Q. On résume ceci en une table de vérité suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Remarque : On remarque de cette table qu'une proposition vraie n'implique pas une proposition fausse.

Equivalence logique ($P \Longleftrightarrow Q$)

Deux propositions P, Q sont équivalentes si ($P \Longrightarrow Q$) et ($Q \Longrightarrow P$) et on écrit $P \Longleftrightarrow Q$: se lit P est équivalente à Q.

Toutes les définitions précédentes peuvent être résumées dans la table ci-dessous

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Remarque : Deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles ont la même valeur de vérité.

Exemples :

1) $(3 \leq 15)$ est une proposition vraie.

2) $(3 > 15)$ est une proposition fausse.

3) $(2 \leq 5) \wedge (7 = 2 + 4)$ est une proposition fausse.

4) $(13 + 2 = 15) \vee (1 > 3)$ est une proposition vraie.

5) $(3 + 12 = 15) \Longrightarrow (4 \times 5 = 11)$ est une proposition fausse.

6) $(2 > 5) \Longleftrightarrow (7 = 2 + 4)$ est une proposition vraie.

Propriétés : Soient P, Q et R trois propositions logique. On a :

1) $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$. 2) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$. 3) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

4) $[P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.

5) $[(P \vee Q) \vee R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$, et $[(P \wedge Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$.

6) $[(P \vee Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)]$,
et $[(P \wedge Q) \vee R] \Longleftrightarrow [(P \vee R) \wedge (Q \vee R)]$.

7) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \underbrace{\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}}_{\text{Contraposée}}$.

Exercice : Monter que : $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \underbrace{\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}}_{\text{Contraposée}}$

On utilisons la table de vérité :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Remarquons que la dernière colonne est toujours 1, ceci montre que $P \Longrightarrow Q$ est équivalent à $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Tautologie

Une proposition qui est vraie quelles que soit les valeurs de vérité des propositions qui la composent est appelée une Tautologie.

Exemple 1.1 *Considérons la proposition P.*

Cette proposition P peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux.

Considérons la proposition composée $P \vee \overline{P}$, cette proposition est toujours vraie. Vérifions-le :

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$
1	0	1
0	1	1

La proposition $P \vee \overline{P}$ est une tautologie.

1.1.3 Quantificateurs mathématiques $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Forme propositionnelle

Définition 1.1 *Etant donné un ensemble E. On appelle forme propositionnelle à une variable définie sur E, toute expression $P(x)$ mathématique contenant une variable x, telle que quand on remplace cette variable par un élément de E, on obtient une proposition.*

Exemple 1.2 *L'énoncé suivant : $P(n)$: « $n \in \mathbb{Z} : x^2 - 4 = 0$» est une forme propositionnelle sur $\mathbb{Z}$ car il devient une proposition lorsqu'on donne une valeur à n. En effet,*

- $P(2)$: «$2 \in \mathbb{Z} : 2^2 - 4 = 0$» est une proposition vraie.

- $P(3)$: «$3 \in \mathbb{Z} : 3^2 - 4 = 0$» est une proposition fausse.

Remarque. On peut avoir une forme propositionnelle à deux variables notée $P(x,y), x \in E, y \in F$ où E et F sont deux ensembles.

A partir d'une forme propositionnelle $P(x)$ définie sur un ensemble E, on construit de nouvelles propositions dites propositions quantifiées en utilisant les quantificateurs «quel que soit» et «il existe».

Quantificateur universel $\forall$

Définition 1.2 *Le quantificateur «quel que soit», noté $\forall$, permet de définir la proposition «$\forall x \in E, P(x)$» qui est vraie si pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie, (sinon elle est fausse).*

Exemple :
"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$" est une proposition logique vraie puisque : pour tout élément x de $\mathbb{R}$, l'inégalité $x^2+1>0$ est vraie.

Quantificateur existentiel $\exists$, $\exists!$

Définition 1.3 *Le quantificateur « il existe au moins», noté $\exists$, permet de définir la proposition «$\exists x \in E, P(x)$» qui est vraie si on peut trouver au moins un élément $x \in E$ tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.*
S'il existe un et un seul élément x, on pourra écrire $\exists! x \in E, P(x)$
On dira dans ce cas qu'il existe un élément unique x vérifiant $P(x)$.

Exemple : "$\exists x, x \in \mathbb{Z}$, $x^2-4=0$" est une proposition logique vraie puisque :
Il existe au moins un élément $x=2$ de $\mathbb{Z}$, pour lequel $x^2-4=0$ est vraie.

Les Règles de négation

Soit $P(x)$ une forme propositionnelle sur un ensemble E.
La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, \overline{P(x)}$
on écrit : $\overline{[\forall x, P(x)]} \Longleftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$.
La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E, \overline{P(x)}$
on écrit : $\overline{[\exists x, P(x)]} \Longleftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$.
Propriétés :
1) $\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$.
2) $\exists x, (P(x) \wedge Q(x)) \Longrightarrow (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$.
3) $\forall x, (P(x) \vee Q(x)) \Longrightarrow (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$.

Remarque : La réciproque dans 2) et 3) n'est pas toujours vraie.

Exemple 1.3 *Soient* $P(x) : (x \in \mathbb{R} : x \geq 7)$ *et* $Q(x) : (x \in \mathbb{R} : x < 7)$.

Cette proposition $(\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 7)$ *est vraie car :* $\exists x$, $x = 10$ *tel que* $10 \geq 7$ *est vraie.*

La proposition $(\exists x \in \mathbb{R} : x < 7)$ *est vraie car :* $\exists x, x = 5$ *tel que* $5 < 7$ *est vraie.*

Mais, n'existe pas un x *dans* $\mathbb{R}$ *tel que :* $(x \geq 7)$ *et* $(x < 7)$ *sont vraies à la fois, c'est à dire* $\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 7) \wedge (x < 7)$ *est toujours fausse. ceci montre la réciproque dans la propriétés 2) n'est pas toujours vraie.*

Les Quantificateurs multiples

Définition 1.4 *Soit* $P(x, y)$ *une forme propositionnelle à deux variables avec* $x \in E$ *et* $y \in F$.

- La proposition quantifiée : $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x, y)$.

- La proposition quantifiée : $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément x de E et lorsqu'il existe au moins un élément y de F vérifiant $P(x, y)$.

Exemple 1.4 *La proposition quantifiée :* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + nx \geq 0$ *est vraie.*

- La proposition quantifiée :$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 + nx \geq 0$ est fausse.
- La proposition quantifiée : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x - 5y = 1$ est vraie.

Règles d'utilisation

On peut combiner des quantificateurs de natures différentes. Par exemple, l'énoncé « tout nombre réel positif possède une racine carrée» s'écrit $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$

mais attention, il faut respecter les règles suivantes :

- On peut permuter deux quantificateurs identiques :

$$(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$$
$$(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$$

- Mais ne pas permuter deux quantificateurs différents :

$$(\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)) \not\Leftrightarrow (\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y))$$

Remarque importante :

Les relations $(\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y))$ et $(\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$ sont différentes car dans la première y dépend de x alors que dans la seconde y ne dépend pas de x.

Exemple 1.5 *La proposition* $(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x^2 < y)$ *est vraie*
(car : soit $x \in \mathbb{N}$*,* $\exists y = x^2 + 1 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $x^2 < x^2 + 1$ *est vraie).*
Mais la proposition $(\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : x^2 < y)$ *est fausse.*
(car : n'existe pas un y *dans* $\mathbb{N}$*, tel que* $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 < y$ *soit vraie).*

1.2 Méthodes de raisonnement mathématique

Il existe plusieurs méthodes classiques de raisonnement mathématique, on va traiter dans cette partie les plus utilisés

1.2.1 Raisonnement direct

Pour démontrer qu'une proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration : On suppose que $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.

On a :

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{Q} \text{ c'est à dire } a = \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*. \\ b &\in \mathbb{Q} \text{ c'est à dire } b = \frac{p'}{q'} \text{ avec } p' \in \mathbb{Z} \text{ et } q' \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

Donc : $a + b = \dfrac{pq' + qp'}{qq'} = \dfrac{p''}{q''} \in \mathbb{Q}$, car le numérateur $p'' = pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ et le dénominateur $q'' = qq'$ est aussi un élément de $\mathbb{Z}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.2.2 Raisonnement par l'absurde

- Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.

- Cas d'une implication : Pour démontrer qu'une implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on utilise le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{N}$, $x + 1 \neq 0$.

On suppose que P est fausse : $\exists x \in \mathbb{N}$, $x + 1 = 0$ donc $x = -1$ et $x \in \mathbb{N}$. Contradiction avec la définition de $\mathbb{N}$.

1.2.3 Raisonnement par contraposition

Si l'implication $P \Longrightarrow Q$ s'avère difficile à démontrer alors compte tenu de l'équivalence $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)$, donc il revient au même de démontrer que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Exemple 1.6 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, (n^2 est pair) $\Rightarrow$(n est pair).*

Démonstration. *On va démonter (n est impair)$\Rightarrow$ (n^2 est impair) est vraie Supposons que n est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors*

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2k' + 1/k' \in \mathbb{N}, \text{ où } k' = 2k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Donc, n^2est impair. Alors : (n est impair)$\Rightarrow$ (n^2 est impair)$, \forall n \in \mathbb{N}$ est vraie et d'après principe de contraposition on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, (n^2 est pair) $\Rightarrow$(n est pair) est vraie.

Remarque importante :

Dans la plupart des raisonnements mathématiques, pour progresser dans les démonstrations, on est souvent amené à montrer des implications logiques. La preuve d'une implication donnée peut s'effectuer par l'une des trois manières suivantes :

- Raisonnement direct,
- Démonstration par la contraposée,
- Démonstration par la contraposée.

1.2.4 Raisonnement par contre exemple

Pour démontrer que la proposition $(\forall x \in E, P(x))$ est fausse, il suffit de trouver un x_0 de E tel que $P(x_0)$ est fausse.

Exemple 1.7 *Soit la proposition P*

$$P : "\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 4 = 0".$$

Si on prend $x_0 = 3$ on a : $3^2 - 4 = 5 \neq 0$, donc P est fausse.

1.2.5 Raisonnement par récurrence

Soit P une proposition dépendant de l'entier naturel n, s'il existe un entier naturel $n_0 \geq 0$ pour lequel $P(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.8
Montrer que

$$\forall n \geq 1 : \qquad 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On note la propriété par $P(n)$:

$$\underbrace{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$$

- Vérifions que $P(1)$:
Pour $n = 1$ on a :

$$\left.\begin{array}{l} \textit{premier membre} = 1 \\ \textit{deuxième membre} = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1 \end{array}\right\}$$

premier membre=deuxième membre, donc $P(1)$ est vraie.............(1)
- Démontrons que : $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour $n \geq 1$

On suppose que $P(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire :

$$\underbrace{1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots..+n=\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots..+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a :

$$1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots..+n+(n+1)=\underbrace{1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots..+n}_{\text{d'après hypothèse}}+(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'implication : $P(n)\Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n\geq 1$.........(2)

De (1) et (2) on a :

$$\forall n\geq 1:\qquad 1+2+\ldots\ldots\ldots\ldots..+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 1.9 *Soit $\alpha\in\left]-1,+\infty\right[$. Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$.*

On note la propriété par $P(n)$: $\underbrace{(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha}_{P(n)}$

- *Vérifions que* $P(0)$ ***:*** *Pour $n=0$ on a :*

$$\left.\begin{array}{l}\text{premier membre}=(1+\alpha)^0=1\ \text{car}\ \alpha\neq -1\\ \text{deuxième membre}=1+0.\alpha=1\end{array}\right\}$$

Comme : $1\geq 1$ est vraie, donc $P(0)$ est vraie.............(1)

- *Démontrons que :* $P(n)\Longrightarrow P(n+1)$ ***est vraie pour*** $n\geq 0$:

On suppose que $P(n)$ est vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$ fixé, c'est à dire :

$$\underbrace{(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$(1+\alpha)^{n+1}\geq 1+(n+1)\alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &= (1+\alpha)(1+\alpha)^n \\ &= (1+\alpha)^n+\alpha(1+\alpha)^n \\ &\geq 1+n\alpha+\alpha(1+\alpha)^n \\ &\geq 1+n\alpha+\alpha \\ &\geq 1+(n+1)\,\alpha\end{aligned}$$

Comme $\alpha \in \left]-1,+\infty\right[$ *, on a :*$\alpha(1+\alpha)^n > \alpha$

Donc $P\,(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication :* $P\,(n) \Longrightarrow P\,(n+1)$ *est vraie pour tout* $n \geq 0$*.........(2)*

De (1) *et* (2) *on a :* $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha.$

1.3 Exercices

Exercise 1.10 *1) Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{1+n}.$$

2) Soient a *et* b *deux réels tel que :* $a \neq -3b$*. Montrer par contraposition que :*

$$a \neq \frac{-14b}{3} \Longrightarrow \frac{2a+b}{a+3b} \neq 5.$$

3) Montrer par l'absurde que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \;\; \sqrt{4+x^3} \neq 2+\dfrac{x^3}{4}.$

Corrigé de l'exercice

1) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{1+n}}_{P(n)}.$$

Pour $n=1$*, on a*

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \; et \; 1-\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1-\dfrac{1}{1+1}$*. Alors,* $P\,(1)$ *est vraie.*

Soit $n \geq 1$. *On suppose que* $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé, c'est à dire :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n},$$

et on montre que $P(n+1)$ *est vraie, c'est à dire :*

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ *est vraie.*

2) Soient a *et* b *deux réels tel que* $a \neq -3b$. *Montrons par contraposition que :*

$$a \neq \frac{-14b}{3} \Longrightarrow \frac{2a+b}{a+3b} \neq 5.$$

Il s'agit de montrer que : $\dfrac{2a+b}{a+3b} = 5 \Longrightarrow a = \dfrac{-14b}{3}$.

On suppose que $\dfrac{2a+b}{a+3b} = 5$ *et on montre que* $a = \dfrac{-14b}{3}$. *On a*

$$\begin{aligned} \frac{2a+b}{a+3b} = 5 &\Longrightarrow 2a+b = 5(a+3b) \\ &\Longrightarrow -3a = 14b \\ &\Longrightarrow a = \frac{-14b}{3}. \end{aligned}$$

3) Montrons par l'absurde que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \sqrt{4+x^3} \neq 2 + \frac{x^3}{4}$.

On suppose que : $\exists\, x \in \mathbb{R}^*,\ \sqrt{4+x^3} = 2 + \frac{x^3}{4}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+x^3} = 2 + \tfrac{x^3}{4} &\Longrightarrow 4 + x^3 = 4 + \tfrac{x^6}{16} + x^3 \\ &\Longrightarrow \tfrac{x^6}{16} = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \ (\textit{ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

Alors, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \sqrt{4+x^3} \neq 2 + \frac{x^3}{4}$.

Exercise 1.11 *1) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \neq b$. Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposition que :

$$x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{4}{5} \text{ ou } x > \frac{1}{5}.$$

Corrigé de l'exercice

1) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que : $a \neq b$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$

Il s'agit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a - b)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété : $\exists k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a - b)$.

a) Pour $n = 1$, on a : $a^1 - b^1 = a - b = 1(a - b)$.

Donc, $\exists k = 1 \in \mathbb{Z} : a^1 - b^1 = k(a - b)$. D'où $P(1)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $P(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, c'est à dire :

$$\exists\ k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a - b)$$

et montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists\ k' \in \mathbb{Z},\ a^{n+1} - b^{n+1} = k'(a - b).$$

On a

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= aa^n - bb^n \\ &= a(b^n + k(a - b)) - bb^n \text{ (grâce à l'hypothèse de récurrence)} \\ &= ab^n + ka(a - b) - bb^n = (b^n + ka)(a - b). \end{aligned}$$

Donc, $\exists\ k' = (b^n + ka) \in \mathbb{Z},\ a^{n+1} - b^{n+1} = k'(a - b)$.

Alors, on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n$ est divisible par $a - b$.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que :

$$x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{4}{5} \text{ ou } x > \frac{1}{5}.$$

Il s'agit de montrer que : $y \leq \frac{4}{5}$ et $x \leq \frac{1}{5} \Rightarrow x + y \leq 1$.

On a

$$\begin{aligned} y \leq \tfrac{4}{5} \text{ et } x \leq \tfrac{1}{5} &\Rightarrow y + x \leq \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5} \\ &\Rightarrow x + y \leq 1. \end{aligned}$$

Exercise 1.12 *Montrer par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ est divisible par } 17.$$

Corrigé de l'exercice

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ est divisible par } 17.$$

Il s'agit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

Pour $n = 1$, *on a :* $3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1$, *Donc,* $\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k$.

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé, c'est à dire :*

$$\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et montrons que : $\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'$.

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8\left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times k'' \text{ avec } k'' = 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 17k' \text{ avec } k' = (8k + k'') \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ *est divisible par* 17.

Chapitre 2

Ensembles, Relations et Applications

2.1 Généralités sur les ensembles

2.1.1 Ensemble

Définition 2.1 *Un ensemble est une collection d'objets qui ont la même propriété. Chaque objet est un élément de l'ensemble.*

Remarque 2.1 *Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est à dire $x \neq \{x\}$.*

Exemple 2.1 *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent* 20, *on aura :*
$E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

$\mathbb{N}$: *l'ensemble des entiers naturels.*
$\mathbb{Z}$: *l'ensemble des entiers relatifs.*
$\mathbb{Q}$: *l'ensemble des nombres rationnels.*
$\mathbb{R}$: *l'ensemble des nombres réels.*
$\mathbb{C}$: *l'ensemble des nombres complexes.*

Appartenance, Inclusion et Égalité

Soit E un ensemble non vide.

a) Si x est un élément de E on dit aussi que x appartient à E et on écrit $x \in E$.

Si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.

b) Un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on a

$$E \subset F \Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longrightarrow x \in F].$$

On dit aussi que E est une partie de F ou bien E est un sous ensemble de F.

c) E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit :

$$\begin{aligned} E = F &\Longleftrightarrow (E \subseteq F) \text{ et } (F \subseteq E) \\ &\Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longleftrightarrow x \in F]. \end{aligned}$$

L'ensemble vide noté $\emptyset$ (ou $\{\}$) est un ensemble sans éléments et de plus il est inclus dans tout ensemble E.

Réunion et intersection

a) L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit

$$E \cap F = \{x/x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Et si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

b) La réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit

$$E \cup F = \{x/x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Différence de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et F et on note $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F et on écrit

$$E - F = \{x/x \in E \text{ et } x \notin F\}.$$

Si $F \subset E$, alors $E - F$ est dit complémentaire de F dans E et il est noté C_E^F ou $\overline{F}$ ou $C_E F$. On note $\emptyset = E - E$.

Différence symétrique

On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E\Delta F$, l'ensemble défini par : $E\Delta F = (E - F) \cup (F - E)$.

2.1.2 Propriétés

Soient E un ensemble non vide, A, B et C trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$,	2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,	4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,	6) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$,	8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
9) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,	10) $A\Delta\emptyset = A$ et $A\Delta A = \emptyset$.

11) Si : A, B des parties de E, alors on a :

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B \text{ et } C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

2.1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E et on écrit : $\mathcal{P}(E) = \{A \text{ tel que : } A \subset E\}$.

Remarque 2.2 *a) L'ensemble vide et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

b) Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, donc

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}.$$

2.1.4 Partition d'un ensemble

Définition 2.2 *Soient E un ensemble non vide et B une famille des parties de E. On dit que B est une partition de E si :*

1) Tout élément de B n'est pas vide.

2) Les éléments de B sont deux à deux disjoints.

3) La réunion des éléments de B est égale à E.

Exemple 2.2 *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on a : $B = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ est une partition de E.*

2.1.5 Produit cartésien

Définition 2.3 *L'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$ est appelé produit cartésien de A et B et on le note $A \times B$ et on écrit :*

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Propriétés : Soient A, B, C et D des ensembles, alors les relations suivantes sont vraies.

1) $A \times B = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
2) $A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.
3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4) $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$.
5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
6) $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Remarque Si $cardE = n$ fini, A, B des parties de E, alors on a :

$$card\left(\mathcal{P}\left(E\right)\right) = 2^{cardE} = 2^n \qquad A \times B = cardA.cardB$$
$$card\left(A \cup B\right) = cardA + cardB - card\left(A \cap B\right)$$
$$card\left(A \triangle B\right) = cardA + cardB - 2card\left(A \cap B\right)$$

Exemple 2.3 *Soient* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ *et* $C = \{0, 2\}$. *Déterminer*

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad C_E A, \quad C_E B, \quad A - B, \quad B - A, \quad A \triangle B, \quad A \times C, \quad C \times A$$

On a : $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $C_E A = \{-2, -1, 0, 2\}$, $C_E B = \{-1, 4\}$, $A - B = \{4\}$, $B - A = \{-2, 0, 2\}$, $A \triangle B = \{-2, 0, 2, 4\}$,
$A \times C = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\}$,
$C \times A = \{(0, 1), (2, 1), (0, 3), (2, 3), (0, 4), (2, 4)\}$.

2.2 Exercices

Exercise 2.4 *Soient* E *un ensemble non vide,* A *et* B *deux parties de ensemble* E. *Montrer que :*

1) $C_E\left(A \cap B\right) = C_E A \cup C_E B$ 2) $C_E\left(A \cup B\right) = C_E A \cap C_E B$.
3) $\left(A \subseteq B\right) \Rightarrow C_E B \subseteq C_E A$ 4) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

Solution
1) Montrons que : $C_E\left(A \cap B\right) = C_E A \cup C_E B$.
Soit $x \in C_E\left(A \cap B\right)$.

$$\begin{aligned} x \in C_E\left(A \cap B\right) &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin \left(A \cap B\right) \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } \left(x \notin A \text{ ou } x \notin B\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in E \text{ et } x \notin A\right) \text{ ou } \left(x \in E \text{ et } x \notin B\right) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \text{ ou } x \in C_E B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in C_E\left(A \cap B\right) \Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B$.
Alors, $C_E\left(A \cap B\right) = C_E A \cup C_E B$.
2) Montrons que : $C_E\left(A \cup B\right) = C_E A \cap C_E B$

Soit $x \in C_E(A \cup B)$.

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \text{ et } x \in C_E B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \cap C_E B \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in C_E(A \cup B) \Leftrightarrow x \in C_E A \cap C_E B$.
Alors, $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.
3) Montrons que : $(A \subseteq B) \Rightarrow C_E B \subseteq C_E A$.
On suppose que $A \subseteq B$ *et on démontre que :* $C_E B \subseteq C_E A$.
Soit $x \in C_E B$.

$$\begin{aligned} x \in C_E B &\Rightarrow x \in E \text{ et } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \text{ (car :} A \subseteq B) \\ &\Rightarrow x \in C_E A, \end{aligned}$$

donc, $C_E B \subseteq C_E A$. *Alors,* $(A \subseteq B) \Rightarrow C_E B \subseteq C_E A$ *(est vraie)*
4) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
On suppose que $A \cap B = \emptyset$ *et on démontre que :* $A \subset C_E B$.
Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, *d'où* $A \subset C_E B$.
Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$ *(est vraie)*

Exercise 2.5 *Soient* A, B *et* C *trois ensembles.*
Montrer que :

$$\begin{aligned} &1) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C). \\ &2) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

Solution
1) Montrons que : $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
Soit $x \in A - (B \cap C)$.

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \text{ ou } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$.
D'où $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
2) Montrons que : $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
Soit $x \in A - (B \cup C)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \text{ et } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$.
D'où : $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Exercise 2.6 *Soient* A, B, C *et* D *des ensembles.*
Montrer que :

$$\begin{aligned} &1) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C). \\ &2) \quad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D). \end{aligned}$$

1) Montrons que : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
Soit $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ ou } (x, y) \in (A \times C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) : (x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$
Alors, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Alors, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2.3 Relations binaires dans un ensemble

2.3.1 Définition et Propriétés

Définition 2.4 *Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E. S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation $\Re$ et on écrit $x\Re y$ ou $\Re(x,y)$.*

Exemple 2.7 $E=\mathbb{R}$, $\forall x,y\in E$, $x\Re y \iff |x|-|y|=x-y$.

Propriétés

1) Réfléxivité : On dit que $\Re$ est réflexive dans E si :

$$\forall x\in E : x\Re x.$$

2) Symétrie : On dit que $\Re$ est symétrique dans E si :

$$\forall x,y\in E : x\Re y \Longrightarrow y\Re x.$$

3) Antisymétrie : On dit que $\Re$ est antisymétrique dans E si :

$$\forall x,y\in E : (x\Re y \text{ et } y\Re x) \Longrightarrow x=y.$$

4) Transitivité : On dit que $\Re$ est transitive dans E si :

$$\forall x,y,z\in E : (x\Re y \text{ et } y\Re z) \Longrightarrow x\Re z.$$

2.3.2 Relation d'équivalence

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E si $\Re$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Classe d'équivalence

Soient $\Re$ une relation d'équivalence sur E et $a\in E$. On appelle classe d'équivalence de a notée $\hat{a}$ ou $\overline{a}$, l'ensemble des éléments x de E qui sont en relation $\Re$ avec a, c'est à dire :

$$\hat{a} \quad = \quad \{x\in E : x\Re a\} = \{x\in E : a\Re x\}.$$

Ensemble quotient

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E. On définit l'ensemble quotient de E par la relation $\Re$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E, noté $E/\Re$ et on a : $E/\Re = \{\hat{a}, a \in E\}$.

Propriétés

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence dans E. Soit x un élément de E, alors on a :

1) $\forall a \in E : a \in \hat{a}$. 2) $\forall a, b \in E : \hat{a} \neq \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

3) $\forall a, b \in E : a\Re b \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b}$ $(a \in \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b})$. 4) $E = \underset{a\in E}{\cup} \hat{a}$

Exercise 2.8 *Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Préciser la classe d'équivalence de a.

Solution

1) Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence

$\Re$ ***est réflexive ?*** $(\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x)$?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $x\Re x \Leftrightarrow (x^2 - x^2 = x - x) \Leftrightarrow (0 = 0)$,

donc, $\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x$, *alors $\Re$ est réflexive.......(1)*

$\Re$ ***est symétrique ?*** $(\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x)$?

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on suppose $x\Re y$ et on démontre que : $y\Re x$.

On a :

$$\begin{aligned} x\Re y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow -(y^2 - x^2) = -(y - x) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\Re x. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x$, *alors $\Re$ est symétrique.......(2)*

$\Re$ ***est transitive ?*** $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\Re y$ *et* $y\Re z \Rightarrow x\Re z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on suppose $x\Re y$ et $y\Re z$ et on démontre que : $x\Re z$.

On a :

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{2.1}$$

et

$$y\Re z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z. \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (2.1) + (2.2) &\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\Re z. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\Re y$ *et* $y\Re z \Rightarrow x\Re z$, *alors* $\Re$ *est transitive.......*(2)

De $(1), (2)$ *et* (3), *on a bien* $\Re$ *une relation d'équivalence.*

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x\Re a\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - a^2 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a) = x - a\} = \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \text{ ou } x = 1 - a\} = \{a, 1 - a\}, \end{aligned}$$

donc, $\hat{a} = \{a, 1 - a\}$.

2.3.3 Relation d'ordre

Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre partiel, ordre total

Soient E un ensemble et $\Re$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\Re$ est d'ordre total si : $\forall x, y \in E : x\Re y$ ou $y\Re x$.

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E : x \text{ n'a pas de relation avec } y \text{ et } y \text{ n'a pas de relation avec } x.$$

Exercise 2.9 *On définit sur* $\mathbb{R}^*$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_1$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est-il total ?*

Solution :

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$? : $(\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 x)$?

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. *On a :* $x = 1.x$, *donc,* $\exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = 1.x$, *d'où,* $x\mathcal{R}_1 x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1x$, *alors la relation* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......*(i)

Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$ ***?*** $\quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1y \text{ et } y\mathcal{R}_1x \Longrightarrow x = y)$?

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $x\mathcal{R}_1y$ *et* $y\mathcal{R}_1x$ *et on démontre* $x = y$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1y \\ et \\ y\mathcal{R}_1x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : x = k'y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = k(k'y)$$
$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = (kk')\,y.$$

Donc $kk' = 1$ *ce qui implique que* $k = k' = 1$ *car* $k, k' \in \mathbb{N}$ *et par suite* $x = y$.
Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1y$ *et* $y\mathcal{R}_1x \Longrightarrow x = y$.

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est antisymétrie........*(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_1$? $\quad (\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1y \text{ et } y\mathcal{R}_1z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. *On suppose* $x\mathcal{R}_1y$ *et* $y\mathcal{R}_1z$ *et on démontre* $x\mathcal{R}_1z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1y \\ et \\ y\mathcal{R}_1z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : z = k'y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : z = k'(kx) = (k'k)\,x$$
$$\Longrightarrow \exists k'' = k'k \in \mathbb{N} : z = k''x \text{ donc, } x\mathcal{R}_1z.$$

Alors, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1y$ *et* $y\mathcal{R}_1z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1z$.

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est transitive........*(iii)

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est-il total :*

L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est total si et seulement si :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1y$ *ou* $y\mathcal{R}_1x$.

Prenons $x = 2$ *et* $y = 3$, *on a*

$$\begin{array}{l} \nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 3 = k.2 \text{ donc } 2 \text{ n'est pas en relation avec } 3 \\ et \\ \nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2 = k.3 \text{ donc } 3 \text{ n'est pas en relation avec } 2 \end{array}$$

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ *n'est pas total, on dit que l'ordre* $\mathcal{R}_1$ *est partiel.*

2.4 Exercices

Exercise 2.10 *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminer la classe d'équivalence de $\dfrac{1}{2}$.

2) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_2$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ est-elle une relation d'ordre ?

Corrigé de l'exercice

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité de** $\mathcal{R}_1$ **? $(\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 x)$?

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x\mathcal{R}_1 x \iff f(x) = f(x)$ (est vraie)

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}_1 x$, d'où $\mathcal{R}_1$ est réflexive....... (i)

Symétrique de $\mathcal{R}_1$? $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x)$?

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on suppose que $x\mathcal{R}_1 y$ et on démontre que $y\mathcal{R}_1 x$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{R}_1 y & \Longrightarrow & f(x) = f(y) \\ & \Longrightarrow & f(y) = f(x) \\ & \Longrightarrow & y\mathcal{R}_1 x \end{array}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x$, d'où $\mathcal{R}_1$ est symétrique .... (ii)

Transitivité de** $\mathcal{R}_1$ **? $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on suppose que $x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 z$ et on démontre que $x\mathcal{R}_1 z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y)......(1) \\ et \\ f(y) = f(z)......(2) \end{cases}$$

(1)+(2) de (1) *et* (2) *on a :* $f(x) = f(z)$, *d'où* $x\mathcal{R}_1 z$

Alors, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z$.

Donc, $\mathcal{R}_1$ *est transitive.......* (iii).

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'équivalence.*

b) Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{2}\right)} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\frac{1}{2})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} : 4 + 4x^2 = 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}\} \\ &= \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

2) Sur $\mathbb{R}$, *on considère la relation* $\mathcal{R}_2$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ *n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique. En effet, on a* $2\mathcal{R}(-2)$ *et* $(-2)\mathcal{R}2$, *car*

$$\frac{1}{1+2^2} \geq \frac{1}{1+(-2)^2} \;\; et \;\; \frac{1}{1+(-2)^2} \geq \frac{1}{1+2^2},$$

mais $2 \neq -2$.

Exercise 2.11 *1) Dans* $\mathbb{R}$, *on définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x \;\mathcal{R}\; y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :

a) $\mathcal{R}$ *n'est pas symétrique.*

b) $\mathcal{R}$ *n'est pas antisymétrique.*

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ *la relation binaire* $\mathcal{S}$ *par :*

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, \; x \;\mathcal{S}\; y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

b) Cet ordre-est il total ?

Corrigé de l'exercice

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :

On a : $0\mathcal{R}2$, *car* $0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2$. *Mais,* $2\not{\mathcal{R}}0$, *car* $2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0$.

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique : On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \quad et \quad 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq -1$.

2) On définit sur $]\dfrac{1}{2}, +\infty[$ *la relation binaire $\mathcal{S}$ par :*

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de S ? $\big(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x\big)$?

Soit $x \in]\dfrac{1}{2}, +\infty[$. *On a :* $x^2 - x^2 = 0 = x - x$.

Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$. *Par la suite,* $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x$.

D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive......... (i)

Antisymétrie de S ? $\big(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y\big)$?

Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et on démontre $x = y$.

On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y. \end{array}\right.$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 = x - y & \Longrightarrow & (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = y \\ ou \\ x = 1 - y \ \ (impossible,\ car\ x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{array}\right. \end{array}$$

Donc, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y$.

D'où la relation $\mathcal{S}$ *est antisymétrique ....* (ii)

Transitivité de S ***:*** $\big(\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z\big)$?

Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose $x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}z$ *et on démontre* $x\mathcal{S}z$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc, $\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z$.

D'où la relation $\mathcal{S}$ *est transitive ....* (iii)

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{S}$ *est une relation d'ordre.*

b) Cet ordre est total.

En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. *On a :* $x^2 - y^2 \leq x - y$ *ou* $x^2 - y^2 \geq x - y$.

$$\begin{array}{ll} donc, & x^2 - y^2 \leq x - y \ \ ou \ \ y^2 - x^2 \leq y - x. \\ d'où, & x\mathcal{S}y \ \ ou \ \ y\mathcal{S}x. \end{array}$$

Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[: x\mathcal{S}y$ *ou* $y\mathcal{S}x$.

Exercise 2.12 *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_2$ *par :*

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (c, d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_2$ *est une relation d'équivalence.*

2) Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 1)$.

Corrigé de l'exercice

On a $\mathcal{R}_2$ *la relation binaire définie sur* $\mathbb{R}^2$ *comme suit :*

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (c, d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrons que $\mathcal{R}_2$ *est une relation d'équivalence.*

Réflexivité de $\mathcal{R}_2$? $\quad (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (a, b))$?

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (a, b)$. *Donc,* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (a, b)$.

Alors, la relation $\mathcal{R}_2$ *est réflexive sur* $\mathbb{R}^2$*.......* (i)

Symétrie de $\mathcal{R}_2$? $\quad (\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \ (a, b)\, \mathcal{R}_2\, (c, d) \Longrightarrow (c, d)\, \mathcal{R}_2\, (a, b))$?

Soient $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$, *on suppose* $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$ *et on démontre* $(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)$.

On a :

$$\begin{aligned}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) &\Longrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2\\ &\Longrightarrow c^2+d^2=a^2+b^2\\ &\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b).\end{aligned}$$

Donc, $\forall\,(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\Longrightarrow(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)$.

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ *est symétrique.......(ii)*

Transitivité de $\mathcal{R}_2$?

$(\forall\,(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \text{ et }\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f))$?

Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$.

On suppose $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$ *et* $(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)$ *et on démontre* $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)$.

On a :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\\ \text{et}\\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2+d^2\\ \text{et}\\ c^2+d^2=e^2+f^2\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow a^2+b^2=e^2+f^2\\ &\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f).\end{aligned}$$

Alors,

$$\forall\,(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \text{ et }\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f).$$

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ *est transitive........(iii)*

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{R}_2$ *est une relation d'équivalence.*

2) Déterminons $\overline{(0,1)}$ *la classe d'équivalence de* $(0,1)$.

On a :

$$\begin{aligned}\overline{(0,1)} &= \{(a,b)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(0,1)\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=0^2+1^2\}\\ &= \{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=1\}.\end{aligned}$$

Donc la classe d'équivalence de $(0,1)$ *est le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1.

Exercise 2.13 *On définit sur* $\mathbb{R}_*^+$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_1$ *par :*

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_*^+,\quad x\mathcal{R}_1y\Longleftrightarrow\exists k\in\mathbb{N}:y=x^k.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est-il total ?*

Solution :

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de R_1 : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x)$?

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a : $x = x^1$ donc, $\exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = x^k$, d'où $x\mathcal{R}_1 x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x$, alors la relation $\mathcal{R}_1$ est réflexive.......(i)

Antisymétrie de R_1 **:** $(\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y)$?

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 x$ et on démontre $x = y$.

On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 x \end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = y^{k_2} \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = \left(y^{k_2}\right)^{k_1} \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2}.
\end{aligned}$$

Donc $k_1 k_2 = 1$ ce qui implique que $k_1 = k_2 = 1$ car $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et par la suite $x = y$. Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y$.

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est antisymétrie........(ii)

Transitivité de R_1? $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$. On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 z$ et on démontre $x\mathcal{R}_1 z$.

On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = y^{k_2} \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = \left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2} \\
&\Longrightarrow \exists k_3 = k_1.k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \text{ donc, } x\mathcal{R}_1 z.
\end{aligned}$$

Alors, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z$.

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total ?

L'ordre $\mathcal{R}_1$ est total si et seulement si : $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y$ ou $y\mathcal{R}_1 x$.

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a

$$\begin{array}{l}
\nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 3 = 2^k \text{ donc } 2 \text{ n'est pas en relation avec } 3 \\
et \\
\nexists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2 = 3^k \text{ donc } 3 \text{ n'est pas en relation avec } 2
\end{array}$$

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}_1$ est partiel.

Exercise 2.14 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, *dans* $\mathcal{P}(E)$, *on définit la relation binaire* $\Re$ *par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : \ A \Re B \iff A \subseteq B.$$

1) Montrer que $\Re$ *est une relation d'ordre.*

2) Cet ordre est-il total ?

Solution :

On a :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}.$$

1) Montrons que $\Re$ *une relation d'ordre.*

$\Re$ ***est réflexive ?*** $(\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \Re A)$?

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. *On a :*

$$A \Re A \quad \Leftrightarrow A \subseteq A \quad (\textit{car } A \subseteq A \textit{ est toujours vraie}).$$

Donc, $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \Re A$, *alors* $\Re$ *est réflexive.......*(1)

$\Re$ ***est antisymétrique ?*** $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A \Re B \text{ et } B \Re A) \Rightarrow A = B)$?

Soient $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A \Re B$ *et* $B \Re A$ *et on démontre que :* $A = B$.

On a :

$$A \Re B \iff A \subseteq B \tag{2.3}$$

et

$$B \Re A \iff B \subseteq A. \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \textit{de } (2.3) + (2.4) \quad \textit{on a :} \quad & A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A. \\ & \Rightarrow B \subseteq A \subseteq B \ . \\ & \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

Donc, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A \Re B \text{ et } B \Re A) \Rightarrow A = B$, *alors* $\Re$ *est antisymétrique.......*(2)

$\Re$ ***est transitive ?*** $(\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : (A \Re B \text{ et } B \Re C) \Rightarrow A \Re C)$?

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A \Re B$ *et* $B \Re C$ *et on démontre que :* $A \Re C$.

On a :

$$A \Re B \iff A \subseteq B \tag{2.5}$$

et

$$B \Re C \iff B \subseteq C \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}(2.5)+(2.6) &\Rightarrow A\subseteq B \text{ et } B\subseteq C\\ &\Rightarrow A\subseteq B \ \subseteq C\\ &\Rightarrow A\subseteq C\\ &\Rightarrow A\Re C.\end{aligned}$$

Donc, $\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E):(A\Re B \text{ et } B\Re C)\Rightarrow A\Re C,$ *alors* $\Re$ *est transitive.......(3)*

De $(1),(2)$ *et* (3)*, on a* $\Re$ *est une relation d'ordre.*

2) Cet ordre est-il total ?

L'ordre $\Re$ *est total si et seulement si :* $\forall A,B\in\mathcal{P}(E):A\Re B$ *ou* $B\Re A$*.*

Prenons : $A=\{1,3\}$ *et* $B=\{2,4\}$*, on a :*

$$\begin{array}{c}A \text{ n'est pas en relation avec } B \quad \text{car : } A\nsubseteq B\\ \text{et}\\ B \text{ n'est pas en relation avec } A \quad \text{car : } B\nsubseteq A\end{array}$$

Donc, l'ordre $\Re$ *n'est pas total, on dit dans ce cas :* $\Re$ *est d'ordre partiel.*

2.5 Applications

Définition 2.5 *Soient* E,F *deux ensembles.*

- On appelle application de E *dans* F *une relation de* E *dans* F *dont à tout élément* x *de* E *on lui correspond un et un seul élément* y *de* F*.* x *est dit antécédent,* E *l'ensemble de départ ou des antécédents,* y *est appelé l'image,* F *l'ensemble d'arrivée ou des images.*

- Deux applications sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

En général, on schématise une fonction ou une application f *par*

$$\begin{aligned}f:\ E &\longrightarrow F\\ x &\longmapsto y=f(x).\end{aligned}$$

$\Gamma=\{(x,f(x)),x\in E\}$ *est appelé graphe de* f*.*

Exemple 2.15

$$\begin{aligned}f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{x}{x-1}\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}g:\ \mathbb{R}-\{1\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{x}{x-1}.\end{aligned}$$

Dans cet exemple g *est une application mais* f *est une fonction et n'est pas une application car l'élément* 1 *n'a pas une image dans* $\mathbb{R}$*.*

2.5.1 Restriction et prolongement d'une application

Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E' \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E', g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on écrit $g = f_{/E'}$ et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

2.5.2 Composition des applications

Soient E, F et G trois ensembles et et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit l'application composée de f et g notée $g \circ f$ par

$$\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

2.5.3 Injection, surjection et bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

a) On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x',$$

ou d'une manière équivalente : $\forall x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

b) On dit que f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

c) On dit que f est bijective si f à la fois injective et surjective.

Propriétés

a) f est injective ssi l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.

a) f est surjective ssi l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

a) f est bijective ssi l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.

Proposition 2.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a : 1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.*

2) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

Preuve : 1) On suppose que $g \circ f$ est injective et on montre que f est injective. Soient $x, x' \in E : f(x) = f(x')$ qui est dans F. On compose par g aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(x')) &\Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective.

2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et on montre que f est surjective.

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ surjective} &\Longrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E : z = g(f(x)). \end{aligned}$$

En posant $y = f(x) \in F$ alors $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$, ce qui montre que g est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \end{cases} \Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

2.5.4 Applications réciproques

Définition 2.6 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Théorème 2.16 *Théorème : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. On rappelle*

$$\begin{array}{rccl} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$

Proposition 2.2 *Proposition : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

a) f et g sont injectives $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.

b) f et g sont surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.

c) f et g sont bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve : a) On suppose que f et g sont injectives et on montre que $g \circ f$ est injective. Soient $x, x' \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x') \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est injective.

b) On suppose que f et g sont surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$, on a :

$$\begin{array}{lll} z \in G & \Rightarrow & \exists y \in F : z = g(y) \quad \text{car } g \text{ est surjective} \\ y \in F & \Rightarrow & \exists x \in E : y = f(x) \quad \text{car } f \text{ est surjective} \end{array}$$

Donc, on obtient : $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est surjective.

c) On suppose que f et g sont bijectives, donc f et g sont surjectives et f et g sont injectives. D'après a) et b) on déduit que $g \circ f$ est injective et est surjective, c'est à dire $g \circ f$ est bijective.

Remarque 2.3 *1. Les graphes d'une application bijective f et de son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.*

2. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.5.5 Image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E.

On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} \\ & = & \{f(x), x \in A\}. \end{array}$$

Exemple 2.17 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $A = [-2, 1]$. On a :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{x^2, x \in [-2, 1]\} = [0, 4].$$

2.5.6 Image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F.

On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Exemple 2.18 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $B = [0,4]$. *On a :*

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,4]) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0,4]\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0,4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+2) \leq 0\} = [-2,2]. \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 sont deux parties de F. Alors on a :

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$, 2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, 4) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, 6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
7) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

2.6 Exercices

Exercise 2.19 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que :*

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$. 2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Solution

1) Montrons que : $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$:

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \ \ \textit{car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_2). \end{aligned}$$

D'où, $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) Montrons que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 \text{ ou } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ ou } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\iff y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\iff y \in (f(A_1) \cup f(A_2)). \end{aligned}$$

Alors, $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) Montrons que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) &\Longrightarrow \exists x \in (A_1 \cap A_2) : y = f(x) \\ &\Longrightarrow [\exists x \in A_1 \text{ et } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\Longrightarrow [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ et } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\Longrightarrow y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\ &\Longrightarrow y \in (f(A_1) \cap f(A_2)). \end{aligned}$$

Alors, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Supposons que f *est injective et montrons la deuxième inclusion.*

Soit $y \in (f(A_1) \cap f(A_2))$.

$$\begin{aligned} y \in (f(A_1) \cap f(A_2)) &\Longrightarrow y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in A_1 : \ y = f(x_1) \\ \text{et} \\ \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $y = f(x_1) = f(x_2)$ *et* f *est injective, ce qui implique que* $x_1 = x_2 = x$. *Donc* $x \in (A_1 \cap A_2)$ *et* $y = f(x)$, *c'est à dire* $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Exercise 2.20 *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* B_1, B_2 *sont deux parties de* F. *Montrer que :*

1) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, 2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$, 4) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

Solution

1) Montrons que : $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

On suppose que $B_1 \subset B_2$ *et on montre que* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\Longrightarrow f(x) \in B_1 \\ &\Longrightarrow f(x) \in B_2 \text{ car } B_1 \subset B_2 \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Ce qui montre que : $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. *Alors,* $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

2) Montrons que : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ou } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[f^{-1}(B_1) \ \cup \ f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

3) Montrons que : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in (B_1 \cap B_2) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{et } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[f^{-1}(B_1) \ \cap \ f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$.

4) Montrons que : $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

Soit $x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in C_F^{B_1} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin B_1 \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin f^{-1}(B_1) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^{f^{-1}(B_1)}. \end{aligned}$$

Alors, $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

Exercise 2.21 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

1) Calculer $f^{-1}(\{2\})$ *et* $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Solution :

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

1) Calculons $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) =?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &\iff x\in[-1,1] \text{ et } f(x)=\frac{1}{2} \\ &\iff x\in[-1,1] \text{ et } \frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2} \\ &\iff x\in[-1,1] \text{ et } x^2-1=0 \\ &\iff x\in[-1,1] \text{ et } x=\pm 1 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-1. \end{aligned}$$

D'où, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\{-1,1\}$.

Calculons $f^{-1}(\{2\}) =?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{2\}) &\iff x\in[-1,1] \text{ et } f(x)=2 \\ &\iff x\in[-1,1] \text{ et } \frac{1}{1+x^2}=2 \\ &\iff x\in[-1,1] \text{ et } x^2=\frac{-1}{2} \text{ impossible.} \end{aligned}$$

D'où $\nexists x\in f^{-1}(\{2\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{2\})=\emptyset$.

2) Injectivité de f*?*

De la première question, on a $f(1)=f(-1)=\dfrac{1}{2}$. *Donc* f *n'est pas injective.*

Surjectivité de f*?*

De la première question, $\nexists x\in[-1,1] : f(x)=2$. *Donc* f *n'est pas surjective.*

Exercise 2.22 *Soit* f *l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Calculer $f(\{-1,1\})$ *et* $f^{-1}(\{-1\})$.

2) f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

3) Donner des intervalles I *et* J*, tels que l'application* $f : I \longrightarrow J$ *soit bijective.*

4) Dans ce cas, déterminer son application réciproque f^{-1}.

Corrigé de l'exercice

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

1) Calculons $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

$$f(\{-1,1\}) \quad = \quad \{f(x)/x \in \{-1,1\}\} = \{f(-1), f(1)\} = \{\frac{1}{2}\}$$

donc, $f(\{-1,1\}) = \{\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -1\} \\ &= \quad \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{1+x^2} = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 = -2\} = \emptyset. \end{aligned}$$

donc, $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Injectivité de** f **? $\quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$?

On a : $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$, mais $1 \neq -1$ donc, f n'est pas injective.

***- Surjectivité de** f ?* $\quad (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))$?

On a : $y = -1$ n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente),

donc, f n'est pas surjective.

- Bijectivité de** f **? *f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.*

3) Donnons des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \longrightarrow J$ soit bijective :

Résolvons l'équation $y = f(x)$ où $y \in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.

On a : $y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow yx^2 + y - 1 = 0.....(1)$

$\Delta = 4(y - y^2)$ *donc, $\Delta > 0$ si $y \in]0,1[$, les racines de l'équation (1) sont :*

$$x_1 = \frac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \quad et \quad x_2 = \frac{\sqrt{y(1-y)}}{y}$$

Donc, des intervalles I et J sont : $I =]0, +\infty[$ et $J =]0,1[$. Il est facile de vérifier que :

$$f : I =]0, +\infty[\longrightarrow J =]0, 1[$$

est une une application bijective.

Remarque *: On peut aussi considérer la bijection :*

$$f : I =]-\infty, 0[\longrightarrow J =]0, 1[.$$

4) Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1}*.*

L'application réciproque de la bijection $f :]-\infty, 0[\longrightarrow]0, 1[$ *est la suivante :*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]0,1[& \longrightarrow &]-\infty,0[\\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \dfrac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \end{array}$$

Exercise 2.23 *On considère les deux applications suivantes :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 3-2x \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

2) Calculer $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ *et* $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

3) Déterminer l'application gof *et calculer* $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ *et* $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

4) gof *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

5) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $gof : I \longrightarrow J$ *soit bijective. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque* $(gof)^{-1}$.

Corrigé de l'exercice

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 3-2x \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

Injectivité de** f **? $\quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *:on suppose* $f(x_1) = f(x_2)$ *et on démontre* $x_1 = x_2$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow 3-2x_1 = 3-2x_2 \\ &\Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Alors, $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$. *Donc f est injective.*

Surjectivité de f? $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))$?

Soit $y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\implies y = 3 - 2x \\ &\implies x = \frac{3-y}{2}. \end{aligned}$$

Donc, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{3-y}{2} \in \mathbb{R} : f(x) = y$. *D'où,* f *est surjective, on conclut que* f *est bijective,*

2) Calculons $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ *et* $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

Calculons $f(\{-4,3\})$. *On a :*

$$f(\{-4,3\}) = \{f(x)/x \in \{-4,3\}\} = \{f(-4), f(3)\} = \{-3, 11\}.$$

Alors, $f(\{-4,3\}) = \{-3,11\}$.

Calculons $f(]1,+\infty[)$. *On a :*

$$f(]1,\infty[) = \{f(x)/x \in]1,\infty[\} =]-\infty,1[\text{ (car } f \text{ est décroissante).}$$

Alors, $f(]1,\infty[) =]-\infty,1[$.

Calculons $f^{-1}(]-\infty,0[)$. *On a :*

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,0[) &= \{x \in \mathbb{R}/ \ f(x) \in]-\infty,0[\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ f(x) < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \ 3 - 2x < 0\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ x > \frac{3}{2}\} =]\frac{3}{2}, +\infty[\end{aligned}$$

Donc, $f^{-1}(]-\infty,0[) =]\frac{3}{2},+\infty[$.

3) Déterminons l'application gof *et calculons* $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ *et* $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

Déterminons l'application gof :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (3-2x)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Donc,

$$\begin{aligned} gof : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (gof)(x) = 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ *et* $(gof)^{-1}(\{-1\})$:

$$\begin{aligned} (gof)(0) &= 4(0)^2 - 12 \times 0 + 9 &= 9. \\ (gof)(3) &= 4(3)^2 - 12 \times (3) + 9 &= 9. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (gof)^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 12x + 9 = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/2x^2 - 6x + 5 = 0\} \end{aligned}$$

On a : $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$, *donc l'équation n'admet pas de racine dans* $\mathbb{R}$.

Alors, $(gof)^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

4) gof est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Injectivité de gof?

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : gof\,(x_1) = gof\,(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a : $(gof)(0) = (gof)(3) = 9$ *mais* $0 \neq 3$, *donc* gof *n'est pas injective car* $y = 9$ *admet deux antécédents (d'après la question précédente).*

Surjectivité de gof? $\quad (\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = gof\,(x))$?

On a : $y = -1$ *n'a pas d'antécédents dans* $\mathbb{R}$ *(d'après la question précédente).*

Donc gof *n'est pas surjective.*

Bijectivité de gof?

gof *n'est pas bijective car elle n'est pas surjective (ou car elle n'est pas injective).*

Donnons des intervalles I *et* J, *tels que l'application* $gof : I \longrightarrow J$ *soit bijective : Résolvons l'équation* $y = (gof)(x)$ *où* $y \in J$ *et* x *à déterminer d'une manière unique dans* I.

On a : $y = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - y = 0.....\,(1)$

$\Delta = 144 - 4 \times 4(9 - y) = 16y$ *et* $\Delta \geq 0$ *ssi* $y \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[$.

Les racines de l'équation (1) *sont :*

$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{16y}}{8} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{12 - \sqrt{16y}}{8} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Il est facile de vérifier que $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est une bijection.*

Remarque *: On peut aussi considérer la bijection :*

$$gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[.$$

Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$.

L'application réciproque de la bijection $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est la suivante :*

$$\begin{array}{rccl} (gof)^{-1} : & [0, +\infty[& \longrightarrow & [\frac{3}{2}, +\infty[\\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Remarque : *L'application réciproque de la bijection*

$$gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$$

est

$$\begin{array}{rccc} (gof)^{-1}: & [0,+\infty[& \longrightarrow &]-\infty, \frac{3}{2}] \\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Exercise 2.24 *Considérons l'application f définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice

Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

***Injectivité de** f?* $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$?

On a : $f(2) = \dfrac{2\times 2}{1+2^2} = \dfrac{4}{5}$ *et* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\times\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{5}.$

Donc, f n'est pas injective car $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *mais* $2 \neq \dfrac{1}{2}$.

***Surjectivité de** f?* $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))$?

f n'est pas surjective car $y = 2$ (par exemple) n'a pas d'antécédent. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Longleftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 2 \\ &\Longleftrightarrow 2x = 2(1+x^2) \\ &\Longleftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

et l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

Bijectivité de** f **? *f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).*

2) Montrons que : $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$. *On a :*

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\} = \left\{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R} : y = \frac{2x}{1+x^2}\right\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0\}$$

$\Delta = 4 - 4y^2$, *donc* $\Delta \geq 0$ *si* $y \in [-1,1]$. *Alors,* $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Chapitre 3

Fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les fonctions réelles d'une variable réelle, c'est-à-dire les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou sous-ensemble de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions modélisent souvent des phénomènes physiques, chimiques, mécaniques,.. évoluant pendant un certain temps.

3.2 Fonction réelle à une variable réelle

Définition 3.1 *On appelle fonction réelle à une variable, toute relation f qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f forment l'ensemble de définition (domaine de définition) de f, noté D_f . On écrit :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y. \end{array} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{rccc} f: & D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=y. \end{array}$$

L'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f est :

$$f(D_f) = \operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f : f(x) = y\}$$

Définition 3.2 *On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points $M(x,y)$ où $x \in D_f$ et $y = f(x)$ et on écrit*

$$G_f = \{(x,y) / x \in D_f \quad \text{et} \quad y = f(x)\}.$$

3.2.1 Opérations sur les fonctions réelles

Définition 3.3 *Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1) On dit que f est égale à g et on écrit : $f = g$ si et seulement si :

$$\forall x \in D : f(x) = g(x).$$

2) On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit : $f \leq g$ si et seulement si :

$$\forall x \in D : f(x) \leq g(x).$$

3) On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit : $f \geq g$ si et seulement si : $\forall x \in D : f(x) \geq g(x)$.

Définition 3.4 *4) La somme :* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in D$.

5) Le produit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in D$.

6) Le rapport $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in D$ *avec* $g(x) \neq 0$.

3.2.2 Composition de fonctions

Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(D) \subset F$.

On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur D par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in D.$$

Exemple 3.1 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x. \end{array} \qquad ou \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{1+x^2}. \end{array}$$

On a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \frac{(e^x)+3}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x+3}{1+e^{2x}},$$

donc

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x+3}{1+e^{2x}}. \end{array}$$

Remarque. Il est clair que $f \circ g \neq g \circ f$.

3.2.3 Parité d'une fonction

Fonction paire

Définition 3.5 *Soit la fonction* f

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f *est paire sur* D *si et seulement si :*

$$\forall x \in D, (-x) \in D : f(-x) = f(x).$$

Remarque *Si* $x \in D \Longrightarrow -x \in D$, $\forall x \in D$, *l'ensemble* D *est dit symétrique par rapport à l'origine.*

Exemple 3.2 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^4-3}{x^2+1}. \end{array}$$

Cette fonction est paire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) = \frac{(-x)^4 - 3}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^4-3}{x^2+1} = f(x).$$

Fonction impaire

Définition 3.6 *Soit la fonction f*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que la fonction f est impaire sur D si et seulement si :

$$\forall x \in D, (-x) \in D: f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3.3 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Cette fonction est impaire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: \quad f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -f(x).$$

3.2.4 Fonctions périodiques

Définition 3.7 *Soit la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que f est une fonction période si et seulement si :

$$\exists T > 0, \forall x \in D: \ f(x+T) = f(x),$$

le plus petit nombre positif T s'appelle la période de la fonction f.

Exemple 3.4 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ *et* $x \longmapsto \cos x$ *sont* $2\pi-$*périodique en effet :*

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} : \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \\ et \\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \end{array}$$

3.2.5 Monotonie d'une fonction

Définition 3.8 *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

1) On dit que f *est croissante si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

2) On dit que f *est strictement croissante si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

3) On dit que f *est décroissante si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

4) On dit que f *est strictement décroissante si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3.2.6 Fonctions bornées

Définition 3.9 *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

1) On dit que f *est majorée sur* D *si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in D.$$

2) On dit que f *est minorée sur* D *si et seulement si :*

$$\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in D.$$

3) On dit que f *est bornée sur* D *si* f *à la fois majorée et minorée, c'est à dire :* $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in D.$

Ou encore : $\exists k > 0 : |f(x)| \leq k,\ \forall x \in D.$

Exemple 3.5 *Soient*

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ *et* $x \longmapsto \cos x$ *sont des fonctions bornées, en effet :* $(\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1,)$ *et* $(\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1)$.

3.3 Limite d'une fonction

3.3.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 3.10 *Soit* f *une fonction définie dans un voisinage de* x_0*, le nombre* l *est dit limite de* f *lorsque* x *tend vers* x_0 *et on écrit* $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.11 *1) On dit que* $l \in \mathbb{R}$ *est limite de* f *à droite de* x_0 *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \quad (x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

On écrit : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l$

2) On dit que $l \in \mathbb{R}$ *est limite de* f *à gauche de* x_0 *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

On écrit : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l$

Théorème 3.6 *On a :* $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$.

3.3.2 Limite à l'infini

$$\left(\lim_{x\to+\infty} = l\right) \Longleftrightarrow (\forall\epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, (x < -A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon))$$

et

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, (x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

3.3.3 Limite infinie

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A),$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A),$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right) \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x, (x > B \Longrightarrow f(x) > A).$$

Théorème 3.7 *Si une fonction f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.*

Théorème 3.8 *(Théorème d'encadrement)*

Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telles que :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

$$\textit{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \textit{ alors } \lim_{x\to x_0} g(x) = l.$$

Exemple 3.9 *Etudier la limite de $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ en 0.*

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad -1 \leq \sin\tfrac{1}{x} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to0}(-x^2) \leq \lim_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to0}(x^2) \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Opérations sur les limites :

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telles que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$.

On a :

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + l'$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = l.l'$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda.f)(x) = \lambda.l, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{l'}$ $(g(x) \neq 0$ et $l' \neq 0)$

Exercise 3.10 *Déterminer les limites suivantes :*

$a)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$; $b)$ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; $c)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Solution

Déterminons les limites :

a) On a :

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0.$$

b) On a

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x.$$

Donc

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to \pi} (1-\cos x) = 2.$$

b) On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln)'(x)\big|_{x=1} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1.$$

3.4 Exercices

Exercise 3.11 *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ 3) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ 5) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$ 4) $f(x) = \ln(\ln x)$ 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+2}{5-2x}}$

Solution

1) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \quad x+2 \neq 0 \text{ d'où } x \neq -2$$

Alors, $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.

2) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right).$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \begin{cases} (x+1)(3-x) > 0 \\ et \\ 3-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in]-1, 3[\\ et \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Alors, $D_f =]-1, 3[$.

3) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}.$$

f *est définie si et seulement si :* $x^2+3x-4 \geq 0$,

on a: $x^2+3x-4 = 0 \Rightarrow x = -4$ *ou* $x = 1$. *Donc,* $x^2+3x-4 \geq 0$ *si :* $x \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$

Alors, $D_f =]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$.

4) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante : $f(x) = \ln(\ln x)$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \begin{cases} x > 0 \\ et \\ \ln x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ et \\ x > 1 \end{cases}$$

Alors, $D_f =]1, +\infty[$.

5) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$f \text{ est définie si et seulement si : } \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Donc, $x \in]-\infty, 0]$ *.Alors,* $D_f =]-\infty, 0]$.

6) Déterminons le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{5-2x}}$$

f est définie si et seulement si : $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{5-2x} \geq 0 \\ \quad et \\ 5-2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+2)(5-2x) \geq 0 \\ et \\ x \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$

On a : $(3x+2)(5-2x) = 0$ *si* $x = \dfrac{5}{2}$ *ou* $x = \dfrac{-2}{3}$

donc, $(3x+2)(5-2x) \geq 0$ *si* $x \in \left[\dfrac{-2}{3}, \dfrac{5}{2}\right]$

on conclut que f est définie si : $\begin{cases} x \in \left[\dfrac{-2}{3}, \dfrac{5}{2}\right] \\ et \\ x \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$ *d'où,* $x \in \left[\dfrac{-2}{3}, \dfrac{5}{2}\right[$

Alors, $D_f = \left[\dfrac{-2}{3}, \dfrac{5}{2}\right[$.

Exercise 3.12 *Soit f la fonction définie comme suit :*

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+x^2} \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rl} h: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la parité des fonctions f et h.

Solution :

1) Montrons que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+x^2} \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : 1 + x^2 \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 1 + x^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \ et \ \ -1 \leq \frac{-1}{1+x^2} < 0 \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1 \quad & \Rightarrow \quad \frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \ \textit{(car :} \frac{1}{1+x^2} > 0\textit{)} \\
& \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \\
& \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq 1.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x) \leq 1$. *Alors, la fonction* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

2) Étudions la parité des fonctions f *et* h.

Parité de la fonction f.

On a : $D_f = \mathbb{R}$, *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$ *et*

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{\cos x}{1+x^2} \ \textit{(car } \cos(-x) = \cos x\textit{)} = f(x)$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$, *donc la fonction* f *est paire.*

Parité de la fonction h.

On a :

$$\begin{aligned}
h : \ \mathbb{R} & \rightarrow \ \mathbb{R} \\
x & \mapsto \ \frac{e^x - e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

$D_h = \mathbb{R}$, *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$ *et*

$$h(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -h(x)$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : h(-x) = -h(x)$, *donc la fonction* h *est impaire.*

Exercise 3.13 *Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point ce qui suit :*

1) $\lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2$ 2) $\lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$

Solution :

Montrons en utilisant la définition de la limite que : $\lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2$

On a :

$$\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = l\right] \Leftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)]$$

donc,

$$\left[\lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2\right] \Leftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - 3| < \eta \Longrightarrow |(2x - 4) - 2| < \epsilon)]$$

Soit $\epsilon > 0, \exists ?\eta > 0, \forall x : 0 < |x-3| < \eta \Longrightarrow |(2x-4)-2| < \epsilon$

On a :

$$\begin{aligned} |(2x-4)-2| < \epsilon &\Rightarrow |2x-6| < \epsilon \\ &\Rightarrow |2(x-3)| < \epsilon \\ &\Rightarrow 2|x-3| < \epsilon \\ &\Rightarrow |x-3| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre : $\eta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Montrons en utilisant la définition de la limite que : $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1) = 3$

On a :

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = l\right] \Leftrightarrow [\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, (0 < |x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon)]$$

donc,

$$\begin{aligned} &\left(\lim_{x\to3}\left(x^2+x+1\right) = 3\right) \\ \Leftrightarrow\ &\left[\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, \left(0 < |x-1| < \eta \Longrightarrow \left|\left(x^2+x+1\right)-3\right| < \epsilon\right)\right] \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0, \exists ?\eta > 0, \forall x : 0 < |x-1| < \eta \Longrightarrow |(x^2+x+1)-3| < \epsilon$

On a :

$$\begin{aligned} |(x^2+x+1)-3| < \epsilon &\Rightarrow |x^2+x-2| < \epsilon \\ &\Rightarrow |(x-1)(x+2)| < \epsilon \\ &\Rightarrow |x-1||x+2| < \epsilon \\ &\Rightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{|x+2|} \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ (car : } x \text{ il est au voisinage de } 1) \\ &\Rightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre : $\eta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Exercise 3.14 *Déterminer les limites suivantes :*

1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$

7) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to2}}\left(\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}\right)$ 8) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2-(1+a)x+a}{x^2-a^2}\right), a\in\mathbb{R}$

Solution :

Déterminons les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right) &= \frac{0}{0}, \quad \textit{(forme indéterminée)}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)}{(x-2)(x+2)}\right), \quad a,b,c\in\mathbb{R}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{ax^3+(b-2a)\,x^2+(c-2b)\,x-2c}{(x-2)(x+2)}\right)\end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a=1\\ b-2a=0\\ c-2b=0\\ -2c=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=4\end{cases}$$

Donc,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)}\right)\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right)=\frac{4+4+4}{4}=3$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\right)=\frac{0}{0}, \quad \textit{(forme indéterminée)}\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{(\sin x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}\right)\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)-(1-x)}{(\sin x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{(\sin x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}\right)\\ &=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}\right)\\ &=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}\right), \quad \textit{(car } \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=1\textit{)}\\ &=\left(\tfrac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{\left(\sqrt{0+1}+\sqrt{1-0}\right)}\right)=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\right)=1.$

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right) &= \frac{0}{0}, \quad \textit{(forme indéterminée)}\\ &= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)}\right)\\ &= \lim_{x\to\pi}(1-\cos x)=2\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)=2.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1 \quad&\Rightarrow\quad -|x|\le |x|\sin\frac{1}{x}\le |x|\\ &\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}(-|x|)\le\lim_{x\to 0}\left(|x|\sin\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to 0}|x|\\ &\Rightarrow\quad 0\le\lim_{x\to 0}\left(|x|\sin\frac{1}{x}\right)\le 0.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}-1\le\sin x\le 1 \quad&\Rightarrow\quad \frac{-1}{1+x^2}\le\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}\ \textit{(car}\ \frac{1}{1+x^2}>0\textit{)}\\ &\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{1+x^2}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\ &\Rightarrow\quad 0\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{1+x^2}\right)\le 0.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right)=0.$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=?$

On a :

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=\infty-\infty \quad \textit{(forme indéterminée)}\\
=\ & \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-1-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}\\
=\ & \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=\frac{\infty}{\infty},\ \textit{(forme indéterminée)}\\
=\ & \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+x}\\
=\ & \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)} \quad \textit{(}|x|=x,\ \textit{puisque } x\to+\infty\textit{)}\\
=\ & \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{1}+1\right)}=1.
\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=1.$

7) $\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}\left(\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}\right)=?$

On a :

$$\begin{cases}
x^2-5x+6>0 & si\quad x\in\,]-\infty,2[\,\cup\,]3,+\infty[\\
x^2-5x+6=0 & si\quad x=2\quad ou\quad x=3\\
\\
x^2-5x+6<0 & si\quad x\in\,]2,3[
\end{cases}$$

On aura :

$$\lim_{\substack{>\\x\to2}}\left(\frac{x+1}{x^2-5x+6}\right)=\frac{3}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{\substack{<\\x\to2}}\left(\frac{x+1}{x^2-5x+6}\right)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to3}}\left(\frac{x+1}{x^2-5x+6}\right)=\frac{4}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{\substack{<\\x\to3}}\left(\frac{x+1}{x^2-5x+6}\right)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

8) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2-(1+a)\,x+a}{x^2-a^2}\right),a\in\mathbb{R}$

Si $a \neq 0$, *on a :*

$$\begin{aligned}
&\textit{Si } a \neq 0, \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{x^2 - (1+a)x + a}{x^2 - a^2} \right) = \frac{0}{0}, \quad \textit{(forme indéterminée)} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x+a)} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{x-1}{x+a} \right) = \frac{a-1}{2a} \\
&\textit{Si } a = 0, \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left(\dfrac{x^2 - x}{x^2} \right) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left(\dfrac{x-1}{x} \right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\dfrac{x^2 - x}{x^2} \right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\dfrac{x^2-x}{x^2} \right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

3.5 Continuité d'une fonction

3.5.1 Continuité d'une fonction en un point

Définition 3.12 *Soient* $D \subset \mathbb{R}$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

On dit que f *est continue au point* x_0 *de* D *si et seulement si :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in D, \ \ (0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

On dit que f *est continue sur* D *si elle est continue en chaque point* x *de* D.

Remarque 3.1 *Si* f *n'est pas définie en* x_0, *elle ne peut être continue en* x_0.

3.5.2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 3.13 *Soit* f *une fonction définie en* x_0 *et à droite de* x_0.

On dit que f *est continue à droite de* x_0 *si et seulement si :*

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Définition 3.14 *Soit* f *une fonction définie en* x_0 *et à gauche de* x_0.

On dit que f *est continue à gauche de* x_0 *si et seulement si :*

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Remarque f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Remarque On dit f est discontinue en x_0 dans les cas suivants :

1) f n'est pas définie en x_0
2) La limite existe mais différente de $f(x_0)$,
   (ou la limite à droite est différente de la limite à gauche).
3) La limite n'existe pas.

Proposition 3.1 *(Opérations sur les fonctions continues)*
Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors on a :

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ *est une fonction continue en* x_0.
2) $f.g$ *est une fonction continue en* x_0.
3) *Si* $g(x_0) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est une fonction continue en* x_0.
4) $|f|$ *est une fonction continue en* x_0.

Proposition 3.2 *(Continuité des fonctions composées)*
Soient $f : D \longrightarrow D'$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0.

3.5.3 Prolongement par continuité

Définition 3.15 *Soit f une fonction définie sur $D - \{x_0\}$.*
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée est $\widetilde{f}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \;\; si\ x \in I - \{x_0\} \\ l \;\; si\ x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 3.15 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x}. \end{array}$$

Domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$.
On a :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

donc, f est prolongeable par continuité en 0 est la fonction prolongée est :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \;\; si\ x \neq 0 \\ 1 \;\; si\ x = 0. \end{cases}$$

3.5.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.16 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

1. f *est continue sur* $[a,b]$,
2. $f(a).f(b) < 0$.

Alors, $\exists x_0 \in]a,b[: f(x_0) = 0$.

De plus, si f *est strictement monotone, alors le* x_0 *est unique.*

Exemple 3.17 *Montrer que* $\ln x - \dfrac{1}{x} = 0$ *admet une unique solution sur* $[1,2]\,]1,2[$.

On pose : $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $[1,2]$.

On a : la fonction f *est continue sur* $]1,2[$.

et $f(1) = \ln 1 - 1 = -1,\ f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0,19$.

Donc, f *est continue sur* $]1,2[$ *et* $f(1)\,f(2) < 0$. *D'après le TVI,* $\exists x_0 \in]1,2[:$ $f(x_0) = 0$, *c'est à dire*

$$\exists x_0 \in]1,2[: \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0.$$

De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$, *donc* f *est strictement croissante sur* $]1,2[$, *d'où cette solution* x_0 *est unique.*

3.6 Dérivabilité d'une fonction

3.6.1 Nombre dérivé en un point

Définition 3.16 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

On dit que f *est dérivable en* x_0 *si la limite* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finie.*

Cette limite est appelée dérivée de f *en* x_0 *et est notée* $f'(x_0)$.

On écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 3.18 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 5x + 3. \end{array}$$

Calculer la dérivée de f *en un point* x_0 *de* $\mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x^2+5x+3)-(x_0^2+5x_0+3)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)+5(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0+5) = 2x_0+5. \end{aligned}$$

3.6.2 Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

Définition 3.17 *On définit la dérivée à droite de f en x_0 par*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

De même, on définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Et

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Exemple 3.19 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 0 \\ \\ 1-2x \text{ si } x < 0, \end{cases} \end{array}$$

on a $f(0) = 0+1$, f est-elle dérivable en 0 ? On a

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x+1-1}{x} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

et

$$f'_g(0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1-2x-1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-2x}{x} = 2.$$

Finalement, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

3.6.3 Fonction dérivée

Définition 3.18 *f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et l'application*

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$.

Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse en général.

Exemple : $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0 car

$$f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_g(0).$$

3.6.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3.3 *Soient f, g deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions suivantes*

$$(\lambda f), \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f + g, \qquad f.g, \quad \frac{f}{g}, \ (g(x_0) \neq 0)$$

sont dérivables en x_0. De plus on a :

1) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.
2) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}, \ (g(x_0) \neq 0)$.

3.6.5 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 3.4 *Soient $f : I \longrightarrow I'$ et $g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) . f'(x_0) .$$

Exemple 3.20 *Soient les fonctions f et g définies par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cos x. \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = \cos x^2, \end{array}$$

et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) . g'(f(x)) = -2x . \sin x^2.$$

3.6.6 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 3.5 *Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(f(x_0)) &= (f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.21 *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = e^x, \end{array}$$

est bijective donc elle admet une application réciproque

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \ln x, \end{array}$$

avec, $y = e^x \Longleftrightarrow \ln y = x$.

On a : $(f^{-1})'(y) = (\ln)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$.

3.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

3.7.1 Théorème de Rolle

Théorème 3.22 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. f est continue sur $[a, b]$,

2. f est dérivable sur $]a, b[$,

3. $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in \left]a, b\right[: f'(c) = 0.$$

Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

3.7.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.23 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. f est continue sur $[a, b]$,

2. f est dérivable sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in \left]a, b\right[: f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Preuve. Considérons la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est :

1. continue sur $[a, b]$ (resp. dérivable sur $]a, b[$) car c'est le produit et la somme de fonctions continues sur $[a, b]$ (resp. dérivables sur $]a, b[$)

2. $g(a) = 0, g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in \left]a, b\right[: g'(c) = 0$.

On a $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, d'où

$$\exists c \in \left]a, b\right[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Exemple 3.24 *Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que*

$$\forall x > 0, \quad \sin x \leq x.$$

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = t - \sin t.$$

La fonction f *est continue sur* $[0, x], \forall x > 0$ *(resp. dérivable sur* $]0, x[, \forall x > 0$*) car c'est la somme de fonctions continues sur* $[0, x]$ *(resp. dérivables sur* $]0, x[$*).*

D'après le théorème des accroissement finis,

$$\exists c \in]0, x[: f(x) - f(0) = (x - 0) f'(c) \text{ donc, } \exists c \in]0, x[: x - \sin x = x(1 - \cos c).$$

Comme $x > 0$ *et* $\cos c \leq 1$, *on obtient* $\forall x > 0$, $\sin x \leq x$.

3.7.3 Théorème de Cauchy

Théorème 3.25 *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions vérifiant*

1. f, g *sont continues sur* $[a, b]$,
2. f, g *sont dérivables sur* $]a, b[$. *Alors,*

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

tel que : $g(b) \neq g(a)$ *et* $g'(c) \neq 0$

Preuve. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

■

3.7.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors f' est dite la dérivée d'ordre 1 de f.

Si f' est dérivable sur I alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f, on la note f'' ou $f^{(2)}$

$$f^{(2)} = f'' = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On dit que f est de classe C^1 sur I (et on écrit $f \in C^1(I)$) si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

On dit que f est de classe C^n sur I (et on écrit $f \in C^n(I)$) si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite de classe C^∞ sur I si elle est de classe $C^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Formule de Leibniz (dérivée n$^{\text{ème}}$ d'un produit)

Théorème 3.26 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables, alors $f.g$ est n fois dérivable. De plus, on a :*

$$\forall x \in [a,b] : (f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x), \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

3.8 Application de la dérivée

3.8.1 Critère de monotonie

Proposition 3.6 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, alors on a :*

1) $f'(x) \geq 0$ *pour tout x dans I* $\Leftrightarrow$ *f est croissante sur I.*
2) $f'(x) \leq 0$ *pour tout x dans I* $\Leftrightarrow$ *f est décroissante sur I.*

3.8.2 Règles de l'Hospital

Première règle de l'Hospital

Théorème 3.27 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
2) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$.

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$

Exemple 3.28

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

La réciproque est en général fausse.

Remarques.

1) La règle de l'Hospital est vraie lorsque $x\to+\infty$. En effet, posons $x=\dfrac{1}{t}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ et f', g' vérifient les conditions du théorème précédent, alors on peut appliquer encore une fois la règle de l'Hospital.

3.8.3 Deuxième règle de l'Hospital

Théorème 3.29 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I-\{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

$$\text{1) }\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty,\qquad \text{2) }\ g'(x)\neq 0, \forall x\in I-\{x_0\}.$$

Alors,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

La remarque précédente est vraie dans ce cas.

Exemple 3.30

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

3.9 Exercices

Exercise 3.31 *Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :*

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & si\ x\leq 0,\\ \dfrac{3}{1+x}, & si\ x>0.\end{cases}$$

1) Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) Continuité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car $x \longmapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty,0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ donc en particulier sur $]0,+\infty[$.

Continuité de f en 0 :

On a : $f(0) = a\times 0 + b = b$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{3}{1+x} = 3$ *et* $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (ax+b) = b$.

Donc, f est continue en 0 si et seulement si : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)$, donc $b=3$.

Alors, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b=3$.

2) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable car $x \longmapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty,0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ donc en particulier sur $]0,+\infty[$.

Dérivabilité de f en 0 :

Si $b \neq 3$, f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.

Donc, posons $b=3$, d'où $f(0)=3$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{3}{1+x}-3}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3-3-3x}{x(1+x)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-3}{1+x} = -3 = f'_d(0),$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{ax+3-3}{x} = a = f'_g(0).$$

f est dérivable en $0 \Longleftrightarrow b=3$ et $f'_d(0) = f'_g(0) \Longleftrightarrow b=3$ et $a=-3$.

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b=3$ et $a=-3$.

Exercise 3.32 *On considère la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & si\ \ x \in]-\infty,1], \\ \\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & si\ x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f est-elle de classe C^1 de $\mathbb{R}$? Justifier.

Solution

1) La continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ la fonction f est continue (car f est produit de deux fonctions continues).

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$ la fonction f est continue (car f est somme et rapport de deux fonctions continues).

Il reste d'étudier la continuité de f en $x = 1$.

On a :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 = f(1) \quad \textit{et} \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \left(\cos^2(\pi x)\right) = 1 = f(1).$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = f(1).$

Alors, f est continue en $x = 1$, on conclut que : f est continue sur $\mathbb{R}$.

La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ la fonction f est dérivable (car f est produit de deux fonctions dérivables).

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$ la fonction f est dérivable (car f est somme et rapport de deux fonctions dérivables).

Il reste d'étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
f'_d(1) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\ln x}{(x-1)\,x} = \frac{0}{0} \ \textit{(Forme indéterminée)} \\
&= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{1}{x(2x-1)} = 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f'_g(1) &= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \ \textit{(Forme indéterminée)} \\
&= \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{(\cos^2(\pi x) - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{-2\pi(\sin(\pi x))\cos(\pi x)}{1} = 0.
\end{aligned}$$

On a : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$, donc f n'est pas dérivable en $x = 1$, d'où f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

(On conclut que : f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$).

2) La fonction f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$, car f n'est pas dérivable en $x = 1$.

Exercise 3.33 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}, & si\ x \neq 0 \\ \\ \lambda, & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution

1) Déterminons λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}$ est continue (car la fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}$ est somme et rapport des fonctions continues).

Il reste d'étudier la continuité de f en $x = 0$. On a : $f(0) = \lambda$ et

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\frac{\sin(2x)}{2x}\right) = -1.$$

Donc, f est continuité ssi : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0) = \lambda$.

Alors, la valeur de λ pour que f soit continue est :$\lambda = -1$.

2) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$\text{La fonction } x \mapsto 1 - \frac{\sin(2x)}{x} \text{ est continue sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\frac{\pi}{4}} = 1 - 4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = 1 - \frac{4}{\pi} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\frac{\pi}{2}} = 1 - 2\frac{\sin(\pi)}{\pi} = 1 > 0$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(c) = 0$ c'est à dire, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercise 3.34 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1}, & si\ x \geq 0 \\ \\ \dfrac{\sin^2(\pi x)}{2x^2}, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1}$ est continue (car la fonction est une somme et rapport des fonctions continues).

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(\pi x)}{2x^2}$ est continue (car la fonction une est somme et rapport des fonctions continues).

Il reste d'étudier la continuité de f en $x = 0$.

On a : $f(0) = \dfrac{\lambda e^0 - 1}{0+1} = \lambda - 1$, $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\dfrac{\lambda e^x - 1}{x+1} \right) = \lambda - 1$ et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left(\frac{\sin^2(\pi x)}{2x^2} \right) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left(\frac{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{4x} \right)$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left(\frac{\pi^2 \cos(\pi x)}{2} \right) \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Donc, f est continue en $x = 0$ ssi : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = f(0)$.

On conclut que : f est continue sur $\mathbb{R}$ si $\lambda = 1 + \dfrac{\pi^2}{2}$

Si $\lambda \neq 1 + \dfrac{\pi^2}{2}$ la fonction f est discontinue en $x = 0$.

Exercise 3.35 *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, Montrer que*

1) L'équation $3 \tan x = \sin x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

2) L'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ admet au moins deux racines réelles.

Solution

1) Montrons que l'équation $3 \tan x = \sin x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

On pose : $f(x) = 3 \tan x - \sin x - 2$

On a : La fonction $x \mapsto 3\tan x - \sin x - 2$ *est continue sur* $\left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$.

$$f(0) = 3\tan 0 - \sin 0 - 2 = -2 < 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} - 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $\left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$ *et* $f(0)\, f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in \left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $3\tan x = \sin x + 2$ *admet au moins une racine réelle sur* $\left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$.

2) Montrons que l'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins deux racines réelles.*

On pose : $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$

On a : La fonction, $x \mapsto -x^4 + 2x^3 + 2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

$$f(-1) = -1 - 2 + 2 = -1 < 0$$
$$f(0) = 2 > 0$$
$$f(2) = -16 + 16 + 2 = 2 > 0$$
$$f(3) = -81 + 54 + 2 = -25 < 0$$

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]-1, 0[$ *et* $f(0)\, f(-1) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]-1, 0[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1, 0[$.

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]2, 3[$ *et* $f(2)\, f(3) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]2, 3[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]2, 3[$.

On conclut que l'équation $-x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ *admet au moins deux racines réelles sur* $]-1, 3[$.

Exercise 3.36 *Soit* f *la fonction définie par :* $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*$.

1) La fonction f *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *?*

2) Montrer que l'équation $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left]\frac{3}{\pi},\ \frac{4}{\pi}\right[$. *Cette solution est-elle unique ?*

Solution

1) La fonction f *est-elle prolongeable par continuité en* 0 *?*

On a : $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* : -1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1 &\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\frac{1}{x} \leq x^2 \\
&\Rightarrow -\lim_{x\to 0} x^2 \leq \lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

D'après théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 0$

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, *donc la fonction* f *est prolongeable par continuité en* 0, *et sa fonction prolongée est*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) Montrons que l'équation $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

On pose : $g(x) = f(x) - 1$

On a : La fonction $x \mapsto f(x) - 1$ *est continue sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

$$g\left(\frac{3}{\pi}\right) = f\left(\frac{3}{\pi}\right) - 1 = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{3} - 1 = \frac{9}{2\pi^2} - 1 < 0,$$

et

$$g\left(\frac{4}{\pi}\right) = f\left(\frac{4}{\pi}\right) - 1 = \frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} - 1 > 0.$$

La fonction $x \mapsto g(x)$ *est continue sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *et* $g\left(\frac{4}{\pi}\right) g\left(\frac{3}{\pi}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in \left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $f(x) - 1 = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

Cette solution est-elle unique ?

On a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= [f(x) - 1]' = \left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)' \\
&= 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right) \\
&= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} > 0 \text{ sur} \left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[
\end{aligned}$$

Donc, la fonction $x \mapsto g(x)$ *est continue et strictement croissante sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *et* $g\left(\frac{4}{\pi}\right) g\left(\frac{3}{\pi}\right) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il c existe et unique dans* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $f(x) - 1 = 0$ *admet une racine réelle unique sur* $\left]\frac{3}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right[$.

Exercise 3.37 *Soit* f *la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & si\ x \geq 0 \\ \sin x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f *sur son domaine de définition* D_f.

2) f *est-elle de classe* C^1 *sur* D_f?

Solution

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f *sur son domaine de définition* D_f.

On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, *la fonction* $x \mapsto \ln(1+x)$ *est continue et dérivable .*

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, *la fonction* $x \mapsto \sin x$ *est continue et dérivable .*

Il reste d'étudier la continuité et la dérivabilité de f *en* $x = 0$.

Continuité de f ***en*** $x = 0$

On a :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln(1+x) = 0 = f(0) \quad et \quad \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} (\sin x) = 0,$$

donc : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$. *Alors,* f *est continue en* 0 *d'où* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Dérivabilité de f ***en*** $x = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

et

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

donc, $f_d(0) = f_g(0)$, *d'où* f *est dérivable en* $x = 0$, *alors* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

2) f *est-elle de classe* C^1 *sur* D_f?

On a :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & si\ x \geq 0 \\ \cos x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto f'(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *car :*

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, *la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est continue.*

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, *la fonction* $x \mapsto \cos x$ *est continue.*

- f *est continue en* $x = 0$ *puisque :*

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{1+x} = 1 \quad et \quad \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} (\cos x) = 1,$$

Donc, la fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et sa dérivée* $x \mapsto f'(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors* f *est de classe* C^1*sur* $\mathbb{R}$, *on écrit* $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercise 3.38 *1) Enoncer le théorème des accroissement finis.*

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que :* $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

Solution

Théorème des accroissement finis

Soit f *une fonction continue et dérivable sur* $]a, b[$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrons que :* $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

La fonction $x \mapsto \ln x$ *est une fonction continue et dérivable sur* $]n, n+1[$, *donc d'après théorème des accroissement finis appliqué à cette fonction* $x \mapsto \ln x$, *il existe* $c \in]n, n+1[$ *tel que :*

$$\ln(n+1) - \ln(n) = (n + 1 - n) \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Comme $n \geq 1$ *on aura :*

$$\begin{aligned} n < c < n+1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$

Exercise 3.39 *Soit* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que :* $f(0) = f(4)$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ *tel que* $f(c) = f(c+2)$.

Solution

Soit g *la fonction définie sur* $[0,2]$ *définie par* $g(x) = f(x) - f(x+2)$.

On a : $g(0) = f(0) - f(2)$ *et*

$$\begin{aligned} g(2) = f(2) - f(4) &= f(2) - f(0) \text{ car : } f(0) = f(4) \\ &= -(f(2) - f(0)) = -g(0) \end{aligned}$$

La fonction g *est continue et* $g(0)\,g(2) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il existe* $c \in]0,2[$ *tel que* $g(c) = 0$ *c'est à dire, il existe* $c \in]0,2[$ *tel que* $f(c) = f(c+2)$.

Exercise 3.40 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et dérivable sur* $]0,1[$. *On pose*

$$g(x) = (f(1) - f(0))\,x^3 - f(x).$$

1) Montrer que f *est continue et dérivable sur* $]0,1[$, *calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x \in]0,1[$.

2) Calculer $g(0)$ *et* $g(1)$. *En déduire qu'il existe* $c \in]0,1[$ *tel que :*
$3(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c)$.

Solution

1) Montrons que f *est continue et dérivable sur* $]0,1[$.

Les fonctions $x \mapsto x^3$ *et* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sont continues et dérivable sur* $]0,1[$, *donc* g *est continue et dérivable sur* $]0,1[$.

Calculons $g'(x)$ *pour tout* $x \in]0,1[$.

Pour tout $x \in]0,1[$, *on a :* $g'(x) = 3(f(1) - f(0))\,x^2 - f'(x)$.

2) Calculons $g(0)$ *et* $g(1)$.

On a : $g(0) = -f(0)$ *et* $g(1) = (f(1) - f(0))\,(1)^3 - f(1) = -f(0)$

Donc on a : $g(0) = g(1)$.

Déduisons qu'il existe $c \in]0,1[$ *tel que :* $3(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c)$

On a, la fonction g *est continue et dérivable sur* $]0,1[$, *donc d'après le théorème de Rolle, il existe* $c \in]0,1[$ *tel que* $g'(c) = 0$, *donc on aura :*

$3(f(1) - f(0))\,c^2 = f'(c)$

Chapitre 4

Applications aux fonctions élémentaires

4.1 Fonction puissance, fonction logarithme, fonction exponentielle

4.1.1 Fonction puissance et leurs réciproques

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle fonction puissance d'exposant n l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^n. \end{array}$$

L'application est f continue sur $\mathbb{R}$.

Cas particuliers

1) Si $n = 0$, on aura : $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ donc la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ à valeur 1.

2) Si $n = 1$, on aura : $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ donc la fonction est identité sur $\mathbb{R}$.

La parité

- Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est paire.
- Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire.

La dérivée et la monotonie

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (x^n)' = nx^{n-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Si n est impair la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{- Si } n \text{ est pair} \begin{cases} \text{La fonction } x \mapsto x^n \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\,. \\ \text{La fonction } x \mapsto x^n \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0]\,. \end{cases}$$

Propriétés des fonctions puissances

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x^{n+m} = x^n.x^m \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, (x \neq 0) \qquad x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}, (x \neq 0)$$

$$x^n y^n = (xy)^n \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n, (y \neq 0)$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Fonction réciproque de la fonction puissance

Cas de n est impair. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donc, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est bijective sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée par :

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

De plus, f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\frac{1}{n}} \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Cas de n est pair (n>0). La restriction de la fonction $f : x \mapsto x^n$ à $[0, +\infty[$est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Donc, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est bijective sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, notée par :

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

De plus, f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\frac{1}{n}} \\ x \in [0, +\infty[\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ y \in [0, +\infty[\end{array}\right.$$

Remarque

Les résultats ci-dessus se généralisent au cas des puissances entières relatives.

4.1.2 Fonction logarithme népérien

Définition 4.1 *La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \ln: &]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

est appelée la fonction logarithme népérien, définie pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ *telle que :*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ \textit{et} \ \ln 1 = 0.$$

Remarque : $\ln e = 1$ *où* $e = 2,718\,3....$

La dérivée

On a : $\forall x \in \left]0,+\infty\right[: (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
La fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

Propriétés de logarithme népérien

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$
$$\ln x^r = r \ln x, r \in \mathbb{R}. \qquad (\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \ \ (f(x) \neq 0).$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0^-.$$

Généralisation du logarithme : $x \longmapsto \ln_a x$

La notion logarithme népérien se généralise dans une base quelconque $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons : $\ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque

Si $a = e$, on retrouve le logarithme Népérien.

Si $a = 10$, le $\ln_{10} x$ est appelé logarithme décimal se note par : $\log x = \ln_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

4.1.3 Fonction exponentielle

Définition 4.2 *L'application réciproque de la fonction* $x \longmapsto \ln x$ *est continue et strictement croissante on l'appelle fonction exponentielle et on note*

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x = e^x \end{array}$$

elle définie sur $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $]0,+\infty[$ *de plus on a :*

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln y \\ y \in \,]0,+\infty[\end{array}\right.$$

La dérivée

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$
La fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction exponentielle

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad \left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\, e^{f(x)}.$$

Limites usuelles

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty, & \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0, & \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1, & \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0. & \end{array}$$

Généralisation de exponentielle : $x \longmapsto \exp_a x$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle exponentielle de base a, la fonction notée $x \longmapsto \exp_a x$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a x = e^{x \ln a}$.

Remarque

La fonction exponentielle étant la réciproque de la fonction logarithme, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

4.2 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

4.2.1 Fonctions trigonométriques

Fonction sinus

$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction périodique de période 2π :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

3) $x \longmapsto \sin x$ est une fonction impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin x.$$

Fonction cosinus

$$\begin{array}{rccl} \cos : & \mathbb{R} & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction périodique de période 2π :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

3) $x \longmapsto \cos x$ est une fonction paire : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R} : \cos(-x) = \cos x$.

Fonction tangente

$$\begin{array}{rccl} \tan : & \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \tan x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$.

2) $x \longmapsto \tan x$ est une fonction périodique de période π :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan(x+\pi) = \tan x.$$

3) $x \longmapsto \tan x$ est une fonction impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}, (-x) \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan(-x) = -\tan x.$$

Fonction cotangente

$$\begin{array}{rccl} \cot : & \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}. \end{array}$$

Propriétés

1) $x \longmapsto \cot x$ est une fonction continue est dérivable sur $\mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et

$$(\cot x)' = -1 - (\cot x)^2 = \frac{-1}{(\sin x)^2}.$$

2) $x \longmapsto \cot x$ est une fonction périodique de période π :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} : \cot(x+\pi) = \cot x.$$

3) $x \longmapsto \cot x$ est une fonction impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}, (-x) \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} : \cot(-x) = -\cot x.$$

4.2.2 Fonctions inverses des fonctions trigonométriques

Fonction arc sinus

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \sin : & \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car :

$$\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: (\sin x)' = \cos x > 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \sin x$ est bijective sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\sin^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

appelée fonction arcsin qui est continue et strictement croissante sur $[-1, +1]$, et on a :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, +1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

et $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Fonction arc cosinus

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \cos : & [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ car :

$$\forall x \in]0, \pi[: (\cos x)' = -\sin x < 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \cos x$ est bijective sur $[0, \pi]$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cos^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [0, \pi]$$

appelée fonction arccos qui est continue et strictement décroissante sur $[-1, +1]$, et on a :

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, +1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

et $(\arccos)'(x) = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Fonction arc tangente

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car :

$$\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}>0.$$

Donc, la fonction $x\longmapsto\tan x$ est bijective sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\tan^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

appelée fonction arctan qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{cases} y=\arctan x\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x=\tan y\\ y\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

et $\forall x\in\mathbb{R} : (\arctan)'(x)=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}.$

Fonction arc cotangente

La fonction

$$\begin{array}{rccl}\cot: &]0,\pi[& \to & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{array}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ car :

$$\forall x\in]0,\pi[: (\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}<0.$$

Donc, la fonction $x\longmapsto\cot x$ est bijective sur $]0,\pi[$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cot^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow]0,\pi[$$

appelée fonction arccot qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{cases} y=\operatorname{arccot} x\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x=\cot y\\ y\in]0,\pi[\end{cases}$$

et $\forall x\in\mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x)=\dfrac{-1}{1+\cot^2 y}=\dfrac{-1}{1+x^2}.$

Propriétés

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,

2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

3) $\arctan(-x) = -\arctan x$,

4) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$,

5) $\arccos \dfrac{1}{x} + \arcsin \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$,

6) $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

7) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

8) $\cos(\arctan x) = \sin(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

9) $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

10) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

11) $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4.3 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.3.1 Fonctions hyperboliques

Fonction sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Fonction cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Fonction tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, +1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

Fonction cotangente hyperbolique

La fonction cotangente hyperbolique est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \coth : \ \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}. \end{array}$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $(\sinh x)' = \cosh x$ et $(\cosh x)' = \sinh x$

2) $\cosh x + \sinh x = e^x$

3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

4) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

5) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x.\tanh y}$

6) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

7) $\cosh(x+y) = \cosh x.\cosh y + \sinh x \sinh y$

8) $\sinh(x+y) = \sinh x.\cosh y + \sinh y.\cosh x$

9) $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x.$

4.3.2 Fonctions inverses des fonctions hyperboliques

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rcl} \sinh : \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sinh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)' = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0.$$

Donc, la fonction $x \longmapsto \sinh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

appelée fonction argument sinus hyperbolique (noté par :$\arg\sinh$ ou par $\arg\sin$), et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \arg\sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On a : la fonction : $\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Remarque. La fonction : $\arg\sinh \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \cosh : & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x. \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, la fonction $x \longmapsto \cosh x$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\cosh^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$$

continue et strictement croissante, appelée fonction argument cosinus hyperbolique (noté par : $\arg\cosh$ ou par : $\arg\cos$) et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\cosh x \\ x \in [1,+\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y \\ y \in [0,+\infty[\,. \end{cases}$$

La fonction : $\arg\cosh : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$. est définie, continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [1,+\infty[: (\arg\cos)'(x) = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,+1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x \end{array}$$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, la fonction $x \longmapsto \tanh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque :

$$\tanh^{-1} :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

continue et strictement croissante, appelée fonction argument tangente hyperbolique (noté par : $\arg\tanh$ ou par : $\arg\tan$) et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\tanh x \\ x \in \left]-1, +1\right[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a : $\forall x \in \left]-1, +1\right[: (\arg\tan)'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Remarque. La fonction : $\arg\tan \in C^{\infty}\left(\left]-1, +1\right[, \mathbb{R}\right)$.

Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

est bijective, donc elle admet une fonction réciproque dite argument cotangente hyperbolique (noté par : $\arg\coth$ ou par :$\arg\cot$) et on a :

$$\begin{cases} y = \arg\coth x \\ |x| > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ y \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Propriétés des fonctions inverses des hyperboliques

De définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\arg\sinh x) = -\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\arg\sinh x) = +\infty$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\arg\cosh x) = -\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\arg\cosh x) = +\infty$
5) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} (\arg\tanh x) = -\infty$ 6) $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} (\arg\tanh x) = +\infty$
7) $\arg\sinh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.
8) $\arg\cosh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \ \forall x \geq 1$.
9) $\arg\coth x = y = \frac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right|, \ \ |x| > 1$.

4.4 Exercices

Exercise 4.1 *Montrer que :*

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x + \sinh x = e^x$. 2) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x - \sinh x = e^{-x}$.
3) $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. 4) $\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)'(x) = \cosh x$.
5) $\forall x \in \mathbb{R} : (\cosh)'(x) = \sinh x$. 6) $\forall x \in \mathbb{R} : (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

Solution

1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x + \sinh x = e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *et* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *donc,*

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x.$$

2) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x - \sinh x = e^{-x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}.$$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\right) \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)'(x) = \cosh x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$(\sinh)'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x.$$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\cosh)'(x) = \sinh x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$(\cosh)'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

6) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned}(\tanh)'(x) &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)'(\cosh x) - (\sinh x)(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{(\cosh^2 x) - (\sinh^2 x)}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{(\cosh^2 x)}{\cosh^2 x} + \frac{-(\sinh^2 x)}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\end{aligned}$$

Exercise 4.2 *Montrer que :*

1) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 2) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. 4) $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

5) $\forall x \in \mathbb{R} : (\arg\sinh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 6) $\forall x \geq 1 : (\arg\cosh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7) $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arg\tanh)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Solution

1) Montrons que : $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On a : Si la fonction f *est dérivable en* x, *alors* f^{-1} *est dérivable en* y *et*

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\arcsin)'(x) &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \textit{ (car } y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x)\end{aligned}$$

2) Montrons que : $\forall x \in \left]-1,1\right[: (\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,

On a :

$$\begin{aligned}(\arccos)'(x) &= \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \textit{ (car } y = ar\cos x \Rightarrow \cos y = x)\end{aligned}$$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On a :

$$\begin{aligned}(\arctan)'(x) &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\\ &= \frac{1}{1+x^2}, \text{ (}\textit{car } y = \arctan x \Rightarrow \tan y = x\text{)}\end{aligned}$$

4) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\operatorname{arccot})'(x) &= \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{-1}{1+\cot^2 y}\\ &= \frac{-1}{1+x^2}, \text{ (}\textit{car } y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow \cot y = x\text{)}\end{aligned}$$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : (\arg\sinh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\arg\sinh)'(x) &= \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} \text{ (}\textit{ car } \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1\text{)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ (}\textit{car } y = \arg\sinh x \Rightarrow \sinh y = x\text{)}\end{aligned}$$

6) Montrons que : $\forall x \geq 1 : (\arg\cosh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\arg\cosh)'(x) &= \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \text{ (}\textit{ car } \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1\text{)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ (}\textit{car } y = \arg\cosh x \Rightarrow \cosh y = x\text{)}\end{aligned}$$

7) Montrons que : $\forall x \in \left]-1, 1\right[: (\arg\tanh)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
On a :

$$\begin{aligned}(\arg\tanh)'(x) &= \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1-\tanh^2 y}\\ &= \frac{1}{1-x^2}, \text{ (}\textit{car } y = \arg\tan x \Rightarrow \tanh y = x\text{)}\end{aligned}$$

Chapitre 5

Développements limités

5.1 Introduction

Les développements limités consistent à trouver une approximation polynômiale à une fonction plus compliquée, au voisinage d'un point choisi. Les développements limités ont de nombreuses applications dans d'autres sciences, Mécanique, Physique,..., mais aussi dans les mathématiques elles-mêmes, en particulier en analyse numérique.

5.2 Formules de Taylor

5.2.1 Formules de Taylor

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$, au voisinage de x_0 la fonction f peut s'écrire :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)}_{P_1(x)} + R(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to x_0} R(x) = 0.$$

Donc, le polynôme :

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

est une approximation de la fonction f.

L'erreur de cette approximation est : $R(x) = (x - x_0)\epsilon(x)$.

La formule de Taylor qui généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables est :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{(x - x_0)^1}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{P_n(x)} + R_n(x_0, x).$$

Le polynôme $P_n(x)$ est de degré n en $(x - x_0)$.

On appelle $R_n(x_0, x)$ le reste d'ordre n.

5.2.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange $\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Théorème 5.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ ($f \in C^n([a,b])$) et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in [a,b]$, alors $\forall x \in [a,b], x \neq x_0, \exists c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

5.2.3 Formule de Taylor Mac-Laurin

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on pose $c = \theta x, 0 < \theta < 1, c \in]0, x[$ et on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

5.2.4 Formule de Taylor Young

Nous allons restreindre les hypothèses en supposant uniquement que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Théorème 5.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie), alors $\forall x \in V(x_0)$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(x-x_0)^n$$

où $o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

5.3 Développements limités au voisinage de zéro

Nous avons vu que dans un voisinage de x_0 on peut approcher la fonction f par un polynôme P_n de degré n de sorte que

$$f(x) - P_n(x) = o(x-x_0)^n.$$

Ceci lorsque $f^{(n)}$ existe. Maintenant, nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister même si $f^{(n)}$ n'existe pas et même si f n'est pas continue en x_0.

Définition 5.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de zéro. On dit que f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un ouvert I de centre 0 et* *des constantes* $a_0, a_1, ..., a_n$ *tels que* $\forall x \in I, x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0 \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}_{P_n(x)} + o(x^n). \end{aligned}$$

1) $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est la partie régulière du D.L.
2) $o(x^n) = x^n \epsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$) est le reste.

Propriétés des développements limités

Proposition 5.1 ***(Unicité)***
Si f admet un $DL_n(0)$ alors ce D.L. est unique.

Preuve. Supposons que f admet deux $DL_n(0)$, c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

$$\text{et } f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Ce qui donne :

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + ... + (a_n - b_n) x^n = x^n (\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_0 = b_0$, d'où

$$(a_1 - b_1) x + ... + (a_n - b_n) x^n = x^n (\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

Si $x \neq 0$, on obtient :

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) x + ... + (a_n - b_n) x^{n-1} = x^{n-1} (\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_1 = b_1$. De cette manière, on aura $a_n = b_n$, $\forall n$.

D'où l'unicité du développement limité. ■

Théorème 5.3 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors le D.L. de f est*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Corollaire 5.4 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, et f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors*

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple 5.5 ***(D.L. obtenu par division suivant les puissance croissante)***

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n \epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ *lorsque* $x \to 0$.

On peut déduire $f^{(n)}(0)$. *En effet,*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

et par identification, on aura $\forall k : 0 \le k \le n, \ \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1.$

5.3.1 Développements limités usuels

Tous les développements ci-dessous sont valables à l'origine.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1})$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6), \quad thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + O(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^n)$$

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n + O(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + O(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + O(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + O(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + O(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} ... + O(x^{2n+2})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} ... + O(x^{2n+2})$$

Remarques

- Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est paire, alors toutes les puissances impaires disparaissent.

- Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est impaire, alors toutes les puissances paires disparaissent.

5.4 Opérations sur les développements limités.

5.4.1 Opérations algébriques sur les développements limités.

Théorème 5.6 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $f+g, fg$ admettent des D.L. d'ordre n et $\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.*

Exercise 5.7 *Ecrire D. L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $f(x) = (\sin x) + e^x, g(x) = (\sin x)e^x$ et $h(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.*

Solution

On a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + O_1(x^3)$ *et* $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + O_2(x^3)$

Donc,

$$f(x) = (\sin x) + e^x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + O_3(x^3)$$

$= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + O_3(x^3)$ *est le D.L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.*

On a effectué la somme des monômes de degré inférieure ou égal à 3.

$$g(x) = (\sin x)e^x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + O_4(x^3)$$

$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O_4(x^3)$ *est le D.L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction g.*

On a effectué les produits et les sommes des monômes de degré inférieure ou égal à 3 et on a gardé les résultats ayant degré inférieure ou égal à 3.

Le D.L. d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.

On a :

$$h(x) = x\left(\frac{x}{\sin x}\right) = x\left(\frac{x}{x - \frac{x^3}{6}}\right) = x\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$$

$= x + \dfrac{x^3}{6} + O(x^3)$ *est le D.L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction h.*

car $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3)$, *d'où* $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} = 1 + \dfrac{x^2}{6} + O(x^3)$.

5.4.2 Développements limités d'une fonction composée

Théorème 5.8 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0 et si $g(0)=0$, alors $f\circ g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0.*

Remarque 5.1 *La partie régulière de $f\circ g$ s'obtient en remplaçant dans la partie régulière de f, la partie régulière de g et en gardant que les puissances inférieures ou égales à n.*

Exemple 5.9 *Ecrire le D. L. à l'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction $x\mapsto \tan^2 x$.*

On a : $\tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+O\left(x^6\right)$

Donc,

$$\tan^2 x=\tan x\tan x=\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+O\left(x^6\right)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+O\left(x^6\right)\right)$$
$$=x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+O\left(x^6\right).$$

On a effectué les produits des monômes de degré inférieure ou égal à 6 et on a gardé les termes ayant degré inférieure ou égal à 6.

Exemple 5.10 *Ecrire le D. L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x\mapsto \sin\left(\ln\left(x+1\right)\right).$*

Solution

On a : $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+O_1\left(x^3\right)$ *et* $\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+O_2\left(x^3\right).$

Quand x tend vers 0, $\ln\left(x+1\right)$ tend vers 0. Le D.L. de la fonction $x\mapsto \sin\left(\ln\left(x+1\right)\right)$ au voisinage de 0 se ramène donc à celui de $\sin u$ au voisinage de 0. Donc,

$$\sin\left(\ln\left(x+1\right)\right)=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)=\sin u \text{ où } u=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+O_1\left(x^3\right)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3.$$

est le D.L. à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x\mapsto\sin\left(\ln\left(x+1\right)\right).$

5.4.3 Dérivation de développements limités.

Nous avons vu que l'existence de D.L. ne nécessite pas l'existence de la dérivée. Donc nous ne pourrons rien dire en ce qui concerne le D.L. de la dérivée.

Théorème 5.11 *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 et admettant un D.L. d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Si la dérivée f' admet un D.L. d'ordre $(n-1)$ au voisinage de 0, alors

$$f'(x) = P'(x) + x^{n-1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0.$$

5.4.4 Intégration de développements limités.

Théorème 5.12 *Soit f une fonction numérique dérivable dans l'intervalle $I =]-\alpha, \alpha[\,, \alpha > 0$, de dérivée f'. Si f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0,$$

alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0,$$

ici $x^{n+1} \eta(x) = \int_0^x t^n \epsilon(t)\, dt$.

5.4.5 Développements limités au voisinage de x_0 et de l'infini

Définition 5.2 *On dit que f définie au voisinage de x_0 admet un D.L. d'ordre n au $V(x_0)$ si la fonction*

$$F : x \longmapsto F(x) = f(x_0 + x)$$

admet un D.L. d'ordre n au $V(0)$.

On a

$$F(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

et donc

$$f(x_0 + x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x),$$

c'est à dire

$$f(y) = a_0 + a_1 (y - x_0) + ... + a_n (y - x_0)^n + (y - x_0)^n \epsilon((y - x_0)),$$

ou d'une manière équivalente

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon((x - x_0)).$$

Finalement, on se ramène du voisinage de x_0 au voisinage de 0 par le changement de variable $z = x - x_0$.

De même le D.L. au voisinage de l'infini se fait par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

Définition 5.3 *On dit qu'une fonction numérique admet un D.L. d'ordre n au $V(+\infty)$ s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait au $V(+\infty)$*

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

5.5 Applications des développements limités

5.5.1 Calcul de limites

Forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$

Il s'agit de

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée}$$

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de 0 et chacune admettant un développement limité au voisinage de 0

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_m(x) + O(x^m).$$

Alors on a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Exemple 5.13 *Calculer, en utilisant les développements limités, la limite suivante :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}.$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{0}{0}$ *forme indéterminée.*

Comme, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^2)$ *et* $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$

donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{6}}{1 + \frac{x}{2}} = 1.$

Forme indéterminée du type $+\infty - \infty$

Il s'agit de : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$.

Exemple 5.14 *Calculer, en utilisant les développements limités, la limite suivante :*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$, *on a :*

$$\sqrt{x+1} = \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sqrt{x-1} = \left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right) + O'\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + O'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + O'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) - O'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

5.5.2 Applications géométriques

Droite tangente à la courbe

Proposition 5.2 *Soit* f *une fonction définie dans un voisinage de* 0. *Supposons que* f *admet un développement limité au voisinage de* 0, *du type :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + O(x^n) \text{ avec } n \geq 2 \text{ et } a_n \neq 0.$$

Alors, $y = a_0 + a_1 x$ *est une droite tangente à la courbe de la fonction* f *en point* $x = 0$.

Exemple 5.15 *On a :* $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3)$.

Donc, $y = x + 1$ *est une droite tangente à la courbe de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ *en point* $x = 0$.

Etude de branches infinies

Si $|x| + |f(x)|$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers x_0 ou $\pm\infty$, on dit que le graphe de la fonction f admet une branche infinie.

De plus,

1) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = 0$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe Ox.

2) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = \pm\infty$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe Oy.

3) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dira que la courbe de fonction f admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.

4) Si $\lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - ax) = b$, on dira que la courbe de fonction f admet la droite $y = ax + b$, comme une asymptote.

Proposition 5.3 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$. Supposons que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet un développement limité au voisinage de $+\infty$, du type :*

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \textit{avec } n \geq 2 \textit{ et } c \neq 0.$$

Alors, la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$.

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Introduction

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles très différents, comme l'ensemble des vecteurs du plan, l'ensemble des fonctions réelles, des polynômes, des matrices, Il est bon d'avoir d'abord étudié l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

6.2 Lois de composition interne, groupes

6.2.1 Loi de composition interne

Définition 6.1 *Soit E un ensemble non vide.*

On appelle " $*$ " loi (opération) de composition interne dans E l'application de $E \times E$ dans E.

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

C'est à dire $\forall x, y \in E : x * y \in E$.

Exemple 6.1 *L'addition dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x + y \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

La multiplication dans $\mathbb{R}$ est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \times y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} \times: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x\times y \end{array}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et " $*$ ", " $\triangle$ " deux lois de composition interne dans E, alors :

1) On dit que " $*$ " est commutative dans E si et seulement si et seulement si :

$$\forall x, y \in E : x * y = y * x.$$

2) On dit que " $*$ " est associative dans E si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z).$$

3) Soit $e \in E$, on dit que "e" est un élément neutre de " $*$ " dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

4) Soit $x \in E$, on dit que x' de E est le symétrique de x si et seulement si :

$$x * x' = x' * x = e.$$

5) On dit que " $*$ " est distributive par rapport à " $\triangle$ "si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E; \begin{cases} x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z) \\ (x \triangle y) * z = (x * z) \triangle (y * z) \end{cases}$$

6.2.2 Groupes

Définition 6.2 *Soit E un ensemble muni d'une loi " $*$ ". On dit que $(E, *)$ est un groupe si et seulement si :*

1) La loi " $*$ " est interne dans E.

2) La loi " $*$ " est associative.

3) La loi " $*$ " admet un élément neutre dans E.

4) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi " $*$ ".

Et si de plus " $*$ " est commutative, on dit que E est un groupe abélien (ou commutatif).

Exemple 6.2 $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{Z}, +)$ *sont des groupes abéliens.*

$(\mathbb{N}, +)$ *n'est pas un groupe car les éléments de $\mathbb{N}^*$ n'ont pas de symétrique.*

Exemple 6.3 *Soit $E = \{-1, 1\}$, on a : $(E, \times)$ est un groupe abélien.*

6.3 Espaces vectoriels

Dans cette partie, $(\Bbbk, +, .)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$. On note par $1_{\Bbbk}$ l'élément neutre pour la loi "."

6.3.1 Structure d'espace vectoriel

On appelle $\mathbb{k}-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $\oplus$ et d'une loi de composition externe notée $\otimes$

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & E \times E & \rightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{k} \times E & \rightarrow & E \\ & (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \otimes y \end{array}$$

tels que :

1. $(E, \oplus)$ est un groupe abélien.
2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \forall x \in E$:

a) $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$

b) $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda.\mu) \otimes x$

3. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$
4. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x$ avec $1_{\mathbb{k}}$ l'élément neutre de $\mathbb{k}$ pour la deuxième loi (la multiplication).

Lorsqu'on ne change pas le corps de base $\mathbb{k}$ on peut utiliser l'expression espace vectoriel au lieu de $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Exemples et conséquences

a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda, (x', y')) & \longmapsto & \lambda \otimes (x, y) = (\lambda.x, \lambda.y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

b) Le corps $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}-$espace vectoriel pour les lois $+$ et ., dans ce cas les éléments de $\mathbb{k}$ sont considérés simultanément comme vecteurs et scalaires.

c) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et en général si $\mathbb{k} \subset L$ alors L est un $\mathbb{k}-$espace vectoriel.

Conséquences

Théorème 6.4 *Soient $(E, \oplus, \otimes)$ un $\mathbb{k}-$espace vectoriel, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$, alors on a*

1. $\lambda \otimes x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ *ou* $x = 0_E$

2. $(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x)$

3. $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$

Preuve. $\Longrightarrow$) $\lambda \otimes x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E$?
Supposons que $\lambda \otimes x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$ et montrons que $x = 0_E$.
Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{k}}$, alors λ^{-1} existe dans $\mathbb{k}$ (car $\mathbb{k}$ est un corps). On a

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \lambda^{-1} \otimes 0_E = 0_E$$

et

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \left(\lambda^{-1}.\lambda\right) \otimes x = 1_{\mathbb{k}} \otimes x = x.$$

Donc $x = 0_E$.
$\Longleftarrow$) $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E \Longrightarrow \lambda \otimes x = 0_E$?
Supposons $\lambda = 0_{\mathbb{k}}$. On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{k}} \otimes x &= (0_{\mathbb{k}} + 0_{\mathbb{k}}) \otimes x \\ &= (0_{\mathbb{k}} \otimes x) \oplus (0_{\mathbb{k}} \otimes x). \end{aligned}$$

En composant par $-(0_{\mathbb{k}} \otimes x)$, on trouve $0_{\mathbb{k}} \otimes x = 0_E$.
Supposons maintenant que $x = 0_E$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes 0_E &= \lambda \otimes (0_E + 0_E) \\ &= (\lambda \otimes 0_E) \oplus (\lambda \otimes 0_E). \end{aligned}$$

En composant par $-(\lambda \otimes 0_E)$, on trouve $\lambda \otimes 0_E = 0_E$.
2. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= (\lambda - \mu + \mu) \otimes x \\ & [(\lambda - \mu) \otimes x] \oplus (\mu \otimes x). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= \lambda \otimes (x - y \oplus y) \\ & [\lambda \otimes (x - y)] \oplus (\lambda \otimes y). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$. ■

Appellations et conventions

- On appelle les éléments de E, les **vecteurs.**
- On appelle les éléments de $\mathbb{k}$, les **scalaires.**
- Loi de composition interne $\oplus$ sera notée par $+$
- Loi de composition externe $\otimes$ sera noté par . ou $\times$

Théorème 6.5 *Soient* $(E, +, \times)$ *un* $\Bbbk-$*espace vectoriel,* $\lambda, \mu \in \Bbbk$ *et* $x, y \in E$, *alors on a*

1) $\lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\Bbbk}$ *ou* $x = 0_E$

2) $(\lambda - \mu).x = (\lambda.x) - (\mu.x)$

3) $\lambda.(x - y) = (\lambda.x) - (\lambda.y)$

Exemple 6.6 *1)* $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 ...., \mathbb{R}^n$ *sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.

2) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est noté* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *est noté* $S(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

4) L'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *est noté* $M_{n,p}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

5) L'ensemble des polynômes des degrés n *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *est noté* $\mathbb{R}[x]$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

6.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 6.3 *Soient* E *un* $\Bbbk-$*espace vectoriel et* F *un sous ensemble de* E. *On dit que* F *est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de* E *si et seulement si*

$$\begin{cases} 1) \ F \neq \emptyset, \\ 2) \ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \beta \in \Bbbk, (\lambda.x + \beta.y) \in F. \end{cases}$$

Remarques

1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E.
2. $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.
3. Si F est un s.e.v. de E et E est un s.e.v. de G alors F est un s.e.v. de G.

Exemple 6.7 $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$.

F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* E, *supplémentaires dans* E.

Exercise 6.8 *Soient les ensembles suivants :*

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}, \ F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}.$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}.$$

1) Montrer que F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

3) F_3 est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution

1) Montrons que $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

On va montrer que :

$$F_1 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, car $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} X \in F_1 \Rightarrow X = (x_1, x_2) \;\; et\ x_1 = x_2 \\ Y \in F_1 \Rightarrow Y = (y_1, y_2) \;\; et\ y_1 = y_2 \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2) \end{aligned}$$

De plus on a : $\lambda x_1 + \beta y_1 = \lambda x_2 + \beta y_2$ car $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Alors, $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$

Donc, F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que : $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On va montrer que :

$$F_2 \neq \emptyset \quad et \ \ \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}, (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, car $(0, 0, 0) \in F_2$, puisque $0 + 0 + 2.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \;\; et\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 ...... (1) \\ Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \;\; et\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 ...... (2) \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda.X + \beta.Y &= \lambda.(x_1, x_2, x_3) + \beta.(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2, \lambda x_3 + \beta y_3) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$(\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) + 2(\lambda x_3 + \beta y_3)$$

$$= \lambda \underbrace{((x_1 + x_2 + 2x_3))}_{(1)} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + 2y_3)}_{(2)}$$

$$= \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in F_2$ *.*
Donc, F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?
F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3 \neq \emptyset \quad \textit{et} \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $(0, 0, 0) \notin F_3$ *car* $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.
Alors, $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel.*

Proposition 6.1 *Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel,* F_1, F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E*. L'ensemble défini par*

$$F_1 + F_2 \quad = \quad \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1 \ \textit{et}\ x_2 \in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E *appelé* ***somme*** *de* F_1 *et* F_2.

Preuve. 1. $F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.
2. Soient $x, y \in F_1 + F_2$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$

$$x \in F_1 + F_2 \Longrightarrow x = x_1 + x_2 : x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2$$

et

$$y \in F_1 + F_2 \Longrightarrow y = y_1 + y_2 : y_1 \in F_1 \text{ et } y_2 \in F_2.$$

Montrons que $\lambda x + \beta y \in F_1 + F_2$. On a

$$\begin{aligned} \lambda x + \beta y &= \lambda(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \beta y_1) + (\lambda x_2 + \beta y_2) \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

■

Proposition 6.2 *Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel, F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Alors, on a*

$$\begin{array}{lll}
F_1 + F_2 = F_2 + F_1 & F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1 & F_1 \cap F_1 = F_1 \\
F_1 \subset F_1 + F_2 & F_1 \cap F_2 \subset F_1 & F_1 \cap F_2 \subset F_2 \\
F_1 + E = E & F_1 + F_1 = F_1 & F_1 \cap E = F_1 \\
\left.\begin{array}{c} F_1 \subset F_3 \\ et \\ F_2 \subset F_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_1 + F_2 \subset F_3 & \left.\begin{array}{c} F_3 \subset F_1 \\ et \\ F_3 \subset F_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_3 \subset F_1 \cap F_2. &
\end{array}$$

Définition 6.4 ***(Somme directe)***

Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et on note $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 6.3 ***(Caractérisation de la somme directe)***

Pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de la somme $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un autre de F_2. C'est à dire,

$$\begin{array}{rcl}
F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 & \Longleftrightarrow & \forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1 \text{ et } \exists! x_2 \in F_2 \\
& & x = x_1 + x_2.
\end{array}$$

Définition 6.5 *Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. F_1, F_2 sont dits supplémentaires dans E si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.*

Exemple 6.9 $\mathbb{k} = \mathbb{R}, E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. *$F_1$ et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.*

6.4 Dépendance, Indépendance linéaires

6.4.1 Combinaisons linéaires

Définition 6.6 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. $v_1, v_2, ..., v_n \in E$. On appelle combinaison linéaires des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ tout vecteur v de E de la forme*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$.

Proposition 6.4 ***(Autre caractérisation d'un s.e.v. par les combinaisons linéaires)***

Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{k}^2, (\lambda x + \mu y) \in F. \\ \textit{(i.e. } F \textit{ est stable par combinaisons linéaires).} \end{cases}$$

6.4.2 Familles liées, familles libres

Définition 6.7 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v., $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$.*

1) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{k}}.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ sont linéairement indépendants.

2) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est liée si et seulement si $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k} - \{0_{\mathbb{k}}\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 6.10 *1) Soient $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a : v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Car, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.*

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (2,1,-1) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2) Soient $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,1)$, $v_3 = (-1,0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée. Car, *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (2,1) + \lambda_3 (-1,0) = (0,0) \\ &\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 + 2(-\lambda_1) = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *n'est pas toujours vérifié, prenons* $\lambda_1 = 1$ *on aura* $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$v_1 - v_2 - v_3 = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2},$$

c'est à dire $v_1 = v_2 + v_3$.

Remarque 6.1 *1) Pour que la famille* $\{v\}$ *soit liée il faut et il suffit que* $v = 0_E$.

2) $\forall v \in E, \{v, v\}$ *est liée* $v - v = 0_E$.

3) Toute famille contenant 0_E *est liée.*

4) Si la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *est liée alors tout* v_i *s'écrit comme combinaison linéaires des autres.*

6.4.3 Sous-espace engendré par une partie

Définition 6.8 *Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. et* $A \subset E$. *On appelle s.e.v. engendré par* A *l'intersection de tous les s.e.v. de* E *contenant* A *et on le note* $\langle A \rangle$ *ou bien*

$$Vect\,(A) = \cap_{\substack{F s.e.v \\ A \subset F}} F.$$

En d'autres termes, si $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$,

$$\langle A \rangle = \left\{ v \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}.$$

6.4.4 Familles génératrices, bases

Définition 6.9 *Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. et* $G \subset E$. *On dit que* G *est une famille génératrice de* E *si et seulement si* $E = \langle G \rangle$, *c'est à dire si* $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, *on dit que* G *engendre* E *(ou* G *est une partie génératrice de* E*) si et seulement si*

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Définition 6.10 *Soient E un $\mathbb{k}-$e.v. et B une partie de E.*

On dit que B est une base de E si et seulement si B est à la fois, libre et génératrice de E.

C'est à dire, si on pose $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, alors B est une base de E si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{k}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (ou bien les composantes) de x dans la base B.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 6.11 *Soit $B = \{e_1, e_2\}$ où $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.*

B est dite la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Rightarrow \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) B engendre $\mathbb{R}^2$, en effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\exists \lambda_1 = x \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y \in \mathbb{R}$:

$$(x, y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1).$$

Donc, B engendre $\mathbb{R}^2$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^2$, alors B est une base de $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$

Définition 6.12 *Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.*

B est dite base canonique de $\mathbb{R}^3$. Car :

a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc, B est libre

b) B engendre $\mathbb{R}^3$, en effet, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y, z) = \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1).$$

On a : $(x, y, z) = x (1, 0, 0) + y (0, 1, 0) + z (0, 0, 1)$.

d'où $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ et $\lambda_3 = z$.

Donc, B engendre $\mathbb{R}^3$ de plus B est libre dans $\mathbb{R}^3$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercise 6.11 *1) Montrer que* $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1, 1), e_2 = (2, 3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1, 3, 2), e_2 = (2, 1, -1), e_3 = (1, -1, 1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Solution

1) Montrons que $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1, 1), e_2 = (2, 3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

a) Montrons que B *est libre : Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \textit{On a : } \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \alpha (1, 1) + \beta (2, 3) = (0, 0) \\ &\Longrightarrow (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) = (0, 0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \ldots\ldots. (1) \\ \alpha + 3\beta = 0 \ldots\ldots. (2) \end{cases}. \end{aligned}$$

de $(2) - (1)$ *on a :* $\beta = 0$, $(1) \Rightarrow \alpha = -2\beta = 0$.

On conclut, $\alpha = \beta = 0$, *d'où* B *est libre.*

b) Montrons que B *engendre* $\mathbb{R}^2$ *: Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists?\lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists?\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x, y) = \lambda_1 (1, 1) + \lambda_2 (2, 3).$$

$$\textit{On a : } (x, y) = \lambda_1 (1, 1) + \lambda_2 (2, 3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \ldots\ldots. (1) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = y \ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

De $(2) - (1)$, *on a :* $\lambda_2 = y - x$ *et de* (1) *on obtient* $\lambda_1 = x - 2\lambda_2 = 3x - 2y$.

On conclut : $\exists\lambda_1 = 3x - 2y \in \mathbb{R}, \exists\lambda_2 = y - x \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x, y) = (3x - 2y) (1, 1) + (y - x) (2, 3).$$

Donc, $B = \{e_1, e_2\}$ *où* $e_1 = (1, 1), e_2 = (2, 3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1, 3, 2), e_2 = (2, 1, -1), e_3 = (1, -1, 1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

a) Montrons que B est libre : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a :

$$\begin{aligned}
&\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,3,2) + \beta(2,1,-1) + \gamma(1,-1,1) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - \beta + \gamma) = (0,0,0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \ldots\ldots. (1) \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0 \ldots\ldots. (2) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots. (3) \end{cases}
\end{aligned}$$

De $(2) + (3) \Rightarrow 5\alpha = 0$ *d'où* $\alpha = 0$ *et* $((1) + (2))$ *et* $(\alpha = 0)$ *on a :* $3\beta = 0$ *d'où* $\beta = 0$ *et on aura aussi* $\gamma = 0$. *On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* B *est libre.*

b) Montrons que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *où* $e_1 = (1,3,2), e_2 = (2,1,-1), e_3 = (1,-1,1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists? \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists? \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,1).$$

$$\begin{aligned}
&\textit{On a : } (x,y,z) = \lambda_1(1,3,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(1,-1,1) \\
&\textit{d'où } (x,y,z) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)
\end{aligned}$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x \ldots\ldots. (1) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = y \ldots\ldots. (2) \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \ldots\ldots. (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{de } (2) + (3) \quad \textit{on a} : 5\lambda_1 = y + z \ \textit{d'où } \lambda_1 = \frac{y+z}{5} \\
&\textit{de } (1) + (2) \quad \textit{on a} : \lambda_2 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{4}{3}\lambda_1 \\
&\qquad\qquad\qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{5}z\right) = \frac{5x + y - 4z}{15}
\end{aligned}$$

de (1), *on aura :*

$$\lambda_3 = x - 2\lambda_2 - \lambda_1 = x - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{15}y - \frac{4}{15}z\right) - \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z\right) = \frac{x - y + z}{3}$$

On conclut :

$$\exists \lambda_1 = \frac{y+z}{5} \in \mathbb{R}, \quad \exists \lambda_2 = \frac{5x + y - 4z}{15} \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \ \ \exists \lambda_3 = \frac{x - y + z}{3} \in \mathbb{R}$$

tel que :

$$(x,y,z)=\frac{y+z}{5}(1,3,2)+\frac{5x+y-4z}{15}(2,1,-1)+\frac{x-y+z}{3}(1,-1,1).$$

Donc, $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ *où* $e_1=(1,3,2)\,,e_2=(2,1,-1)\,,e_3=(1,-1,1)$ *engendre* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6.5 *Soient* F_1,F_2 *deux familles de vecteurs de* E *telles que* $F_1\subset F_2$*, alors on a*

a) Si F_2 *est libre alors* F_1 *est libre.*

b) Si F_1 *engendre* E *alors* F_2 *engendre* E*.*

Proposition 6.6 *Soient* $n\in\mathbb{N}^*,F_1=\{v_1,v_2,...,v_n\}\,,F_2=F_1\cup\{v_{n+1}\}=\{v_1,v_2,...,v_n,v_{n+1}\}$ *deux s.e.v. de* E*, alors on a*

a) F_1 *est libre et* $v_{n+1}\notin\langle F_1\rangle\Longrightarrow F_2$ *es libre.*

b) F_2 *engendre* E *et* $v_{n+1}\in\langle F_1\rangle\Longrightarrow F_1$ *engendre* E*.*

6.5 Théorie de la dimension

Définition 6.13 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. On appelle dimension de* E *le cardinal d'une base* B *de* E *et on note* $\dim E=$*card*B*.*

Exemple 6.12 *a)* $E=\mathbb{R}^n,B_{\mathbb{R}^n}=\{e_1=(1,0,...,0)\,,e_2=(0,1,...,0)\,,...,e_n=(0,0,...,1)\}$, $\dim\mathbb{R}^n=n$.

b) La famille $L=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\,,u_i\in\mathbb{R}^3$ *ne peut pas être une base de* $\mathbb{R}^3$ *car :* $\dim\mathbb{R}^3=3$ *et card*$L=4$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{k}-$e.v. de dimension finie $\dim E=n$, $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de E. Soit

$$L=\{u_1,u_2,...,u_r\}$$

$r\leq n$ une famille libre de E. Alors il existe au moins une façon de compléter L par $(n-r)$ vecteurs de B pour obtenir une nouvelle base de E.

Exemple 6.13 $E=\mathbb{R}^3$, $B=\{e_1=(1,0,0)\,,e_2=(0,1,0)\,,e_3=(0,0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Soit*

$$L=\{u_1=(1,0,1)\,,u_2=(0,1,1)\}$$

une famille libre de $\mathbb{R}^3$*. On peut prendre* $e_3 = (0,0,1)$ *de* B *pour compléter* L *et avoir une nouvelle base de* $\mathbb{R}^3$*.* $L' = \{u_1, u_2, e_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Proposition 6.7 *Soit* E *un* $\Bbbk-$*e.v. de dimension finie* $\dim E = n$*. Alors*

1. *Toute famille libre admet au plus* n *éléments.*
2. *Toute famille génératrice admet au moins* n *éléments.*
3. *Toute base de* E *admet exactement* n *éléments.*

Proposition 6.8 *Soit* E *un* $\Bbbk-$*e.v. de dimension finie* $\dim E = n$ *et soit* F *une famille finie d'éléments de* E*. On a :.*

1. *Si* $\text{card}F = n$ *et* F *est libre, alors* F *est une base de* E*.*
2. *Si* $\text{card}F = n$ *et* F *est génératrice, alors* F *est une base de* E*.*

Exercise 6.14 *Soient* $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *et* $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

1) Montrer que A *est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

2) Montrer que B *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Solution

1) Montrons que $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

On a $\text{card}A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$*, donc il suffit de montrer que* A *est libre ou bien* A *est génératrice.*

Montrons que $A = \{(2,1), (-1,1)\}$ *engendre* $\mathbb{R}^2$*.*

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*,* $\exists ? \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists ? \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1).$$

On a : $(x,y) = \lambda_1 (2,1) + \lambda_2 (-1,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \ldots\ldots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \ldots\ldots (2) \end{cases}$

De $(1)+(2)$ *on a :* $\lambda_1 = \dfrac{x+y}{3}$ *et* $(1) \Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1 - x = \dfrac{2y-x}{3}$.

On conclut : $\exists \lambda_1 = \dfrac{x+y}{3} \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = \dfrac{2y-x}{3} \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = \frac{x+y}{3}(2,1) + \frac{2y-x}{3}(-1,1).$$

Donc A *est engendre* $\mathbb{R}^2$*.*

On a $\text{card}A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ *et* A *est engendre* $\mathbb{R}^2$*, alors* A *est une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

2) Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

On a $\text{card}B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$*, donc il suffit de montrer que* B *est libre ou bien* B *est génératrice.*

Montrons que $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha (1,1,0) + \beta (1,0,1) + \gamma (0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\text{On a : } \alpha (1,1,0) + \beta (1,0,1) + \gamma (0,1,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ldots\ldots\ (1) \\ \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots\ (2) \\ \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ (3) \end{cases}$$

de $(1) - (2) \Rightarrow \beta = \gamma$
$(3) \Rightarrow 2\gamma = 0,$ *d'où* $\gamma = 0$ *et* $\beta = 0$ *et* $(1) \Rightarrow \alpha = 0$
On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0,$ *d'où* B *est libre.*
On a $cardB = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ *et* B *est libre dans* $\mathbb{R}^3$, *alors* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6.9 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie, alors tout s.e.v.* F *de* E *est de dimension finie et on a* $\dim F \leq \dim E$.

Proposition 6.10 *Soit* F *un s.e.v. de* E *avec* $dimE = n, \dim F = p$. *Alors*

1. F *admet un supplémentaire dans* E
2. *Tout supplémentaire de* F *dans* E *est de dimension* $n - p$.

Corollaire 6.15 *Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie,* F *et* G *sont deux s.e.v. de* E. *Alors*

$$\left.\begin{array}{r} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Longrightarrow F = G.$$

Preuve. $F \subset G \Longrightarrow F$ admet un supplémentaire H dans G.
$\dim H = \dim G - \dim F = 0 \Longrightarrow H = \{0_E\}$. Donc

$$G = F + H = F + \{0_E\} = F.$$

■

Théorème 6.16 ***(Formule de Grassmann)***

Soient E *un* $\mathbb{k}-$*e.v. de dimension finie. Pour tout* F, G *s.e.v. de* E.

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Corollaire 6.17 *Si F et G sont deux s.e.v. de E en somme directe. Alors*

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 6.14 *Soit E un $\Bbbk-$e.v. et F une famille d'éléments de E. On appelle rang de F et on note rgF le nombre maximal de vecteurs de F qui sont linéairements indépendants.*

Exemple 6.18 *Soit $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.*

On a : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$, on aura : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

D'où les vecteurs de B qui sont linéairements indépendants, donc $rgB = 3$

Exemple 6.19 *Soit $F = \{(1,2), (1,0), (1,-1)\}$ avec $v_1 = (1,2), v_2 = (1,0), v_3 = (1,-1)$.*

remarquons que $v_1 = 3v_2 - 2v_3$ donc toute famille de 3 vecteurs est liée, on déduit que $rgF \leq 2$.

Mais, $\{v_2, v_3\}$ est libre, en effet :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(1,0) + \beta(1,-1) = (0,0),$$

on aura : $\alpha = \beta = 0$. Alors, $rgF = 2$.

6.6 Exercices

Exercise 6.20 *1) On considère les vecteurs $v_1 = (1,-1,2,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$, $v_3 = (3,3,-2,1)$, on note $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

Déterminer une base de E_1.

2) Soit

$$E_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\right\}.$$

Montrer que E_2 est s.e.v de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Solution :

1) $E_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ où $v_1 = (1,-1,2,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$ et $v_3 = (3,3,-2,1)$.

Déterminons une base de E_1 :

Vérifions d'abord si $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) + \gamma (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) + \gamma (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ 2\alpha - 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

On a : $(3) \Rightarrow \alpha = \gamma$, *et* $(4) \Rightarrow \beta = -\gamma - \alpha = -2\gamma$ *on remplace les valeurs* $\alpha = \gamma$ *et* $\beta = -2\gamma$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $-\gamma - 2\gamma + 3\gamma = 0$ *on aura* $0 = 0$, *le même résultat si on remplace* $\alpha = \gamma$ *et* $\beta = -2\gamma$ *dans l'équation* (3)

On conclut, $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$ *et* $\gamma \in \mathbb{R}$, *alors la famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^4$.

Pour plus de détail voir l'exemple suivant, si on prend $\gamma = 1$ *d'où* $\alpha = 1$, $\beta = -2$ *et*

$$(1, -1, 2, 1) + (-2) (2, 1, 0, 1) + (3, 3, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Maintenant vérifions si $\{v_1, v_2\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha (1, -1, 2, 1) + \beta (2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc, la famille $\{v_1, v_2\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{v_1, v_2\}$ *engendre* E_1 *et libre, alors* $\{v_1, v_2\}$ *est une base de* E_1 *et* $\dim E_1 = 2$.

2) On a :

$$E_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \ \text{et} \ x - z - t = 0 \right\}.$$

Montrons que E_2 *est s.e.v de* $\mathbb{R}^4$ *et en donnons une base.*
E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$E_2 \neq \emptyset \quad et \quad \forall X, Y \in E_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in E_2.$$

On a : $E_2 \neq \emptyset$, *car* $(0,0,0,0) \in E_2$, *puisque* $0-0+0-2.0=0$ *et* $0-0-0=0$
Soient $X, Y \in E_2$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$X \in E_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *et* $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_1 - x_3 - x_4 = 0$...... (1)
$Y \in E_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ *et* $y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 = 0,\ y_1 - y_3 - y_4 = 0$...... (2)

On a :

$$\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta.(y_1, y_2, y_3, y_4)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3, \beta y_4)$$
$$\left(\underbrace{\lambda x_1 + \beta y_1}_{z_1}, \underbrace{\lambda x_2 + \beta y_2}_{z_2}, \underbrace{\lambda x_3 + \beta y_3}_{z_3}, \underbrace{\lambda x_4 + \beta y_4}_{z_4}\right)$$

De plus on a :

$$z_1 - z_2 + z_3 - 2z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_2 + \beta y_2) + (\lambda x_3 + \beta y_3) - 2(\lambda x_4 + \beta y_4)$$
$$= \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4) + \beta(y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

$$z_1 - z_3 - z_4 = (\lambda x_1 + \beta y_1) - (\lambda x_3 + \beta y_3) - (\lambda x_4 + \beta y_4)$$
$$= \lambda(x_1 - x_3 - x_4) + \beta(y_1 - y_3 - y_4) = \lambda.0 + \beta.0 = 0$$

D'où $\lambda.X + \beta.Y \in E_2$.
Donc, E_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.
Donnons une base à $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 2t = 0 \ et\ x - z - t = 0\}$
Cherchons d'abord une famille génératrice à E_2 :
On a :

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 3z \\ t = x - z \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E_2 \quad \Rightarrow \quad (x, y, z, t) &= (x, -x + 3z, z, x - z) \\ &= (x, -x, 0, x) + (0, 3z, z, -z) \\ &= x(1, -1, 0, 1) + (0, 3, 1, -1) \end{aligned}$$

Alors, $E_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$ *où* $w_1 = (1, -1, 0, 1), w_2 = (0, 3, 1, -1)$
Vérifions si $\{w_1, w_2\}$ *est linéairement indépendante dans* $\mathbb{R}^4$:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha(1,-1,0,1) + \beta(0,3,1,-1) = (0,0,0,0)$$

On a :

$$\alpha(1,-1,0,1) + \beta(0,3,1,-1) = (0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ -\alpha + 3\beta = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ \beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \alpha - \beta = 0 \ldots\ldots\ldots (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \\ \beta = 0 \end{cases}$$

On conclut, $\alpha = \beta = 0$, *d'où* $\{w_1, w_2\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^4$.

On a : $\{w_1, w_2\}$ *engendre* E_2 *et libre, alors* $\{w_1, w_2\}$ *est une base de* E_2 *et* $\dim E_2 = 4$

Exercise 6.21 *Montrer que dans* $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3,7,0)$, $w_2 = (5,0,-7)$.

Solution :

Montrons que dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1 = (3,7,0)$, $w_2 = (5,0,-7)$.

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $v_1 = (2,3,-1) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.

On a :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (2,3,-1) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 2 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 7\lambda = 3 \ldots\ldots\ldots (2) \\ -7\beta = -1 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

de (2) $\Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{7}$ *et* (3) $\Rightarrow \beta = \dfrac{1}{7}$

(1) $\Rightarrow 3\left(\dfrac{3}{7}\right) + 5\left(\dfrac{1}{7}\right) = 2$, *d'où* $2 = 2$

donc, $v_1 = \left(\dfrac{3}{7}\right)(3,7,0) + \left(\dfrac{1}{7}\right)(5,0,-7)$ *c-à-d* $v_1 = \left(\dfrac{3}{7}\right) w_1 + \left(\dfrac{1}{7}\right) w_2$.

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $v_2 = (1,-1,-2) = \lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7)$.

On a :

$$\lambda(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (1,-1,-2) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda + 5\beta = 1 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 7\lambda = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -7\beta = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

de (2) $\Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{7}$ *et* (3) $\Rightarrow \beta = \dfrac{2}{7}$, *remplaçons* λ *et* β *dans* (1) *on obtient :*

$(1) \Rightarrow 3\left(\dfrac{-1}{7}\right)+5\left(\dfrac{2}{7}\right)=1,$ *d'où* $1=1$

donc, $v_2=\left(\dfrac{-1}{7}\right)(3,7,0)+\left(\dfrac{2}{7}\right)(5,0,-7)$ *c-à-d* $v_2=\left(\dfrac{-1}{7}\right)w_1+\left(\dfrac{2}{7}\right)w_2.$

On a : $v_1=\left(\dfrac{3}{7}\right)w_1+\left(\dfrac{1}{7}\right)w_2$ *et* $v_2=\left(\dfrac{-1}{7}\right)w_1+\left(\dfrac{2}{7}\right)w_2.$

On conclut, que les vecteurs $v_1=(2,3,-1)$, $v_2=(1,-1,-2)$ *engendrent le même s.e.v que :* $w_1=(3,7,0)$, $w_2=(5,0,-7)$.

Exercise 6.22 *Soit* $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ *tel que* $v_1=(1,2,0), v_2=(0,2,1), v_3=(-1,0,3)$.

1) Montrer que B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposer le vecteur $v=(16,-4,4)$ *dans cette base.*

Solution :

1) Montrons que : $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ *tel que* $v_1=(1,2,0), v_2=(0,2,1), v_3=(-1,0,3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Il suffit de Montrer que* $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^3$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, *on suppose que:*

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,2,1)+\gamma(-1,0,3)=(0,0,0)$$

On a : $\alpha(1,2,0)+\beta(0,2,1)+\gamma(-1,0,3)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\gamma=0.........(1)\\2\alpha+2\beta=0.......(2)\\\beta+3\gamma=0........(3)\end{cases}$

de $(1)\Rightarrow\gamma=\alpha$ *et* $(2)\Rightarrow\beta=-\alpha$

$(3)\Rightarrow-\alpha+3\alpha=0,$ *d'où* $\alpha=0$

On conclut, $\alpha=\beta=\gamma=0,$ *d'où* B *est libre.*

On a card$B=3=\dim\mathbb{R}^3$ *et* B *est libre dans* $\mathbb{R}^3$, *alors* B *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

2) Décomposons le vecteur $v=(16,-4,4)$ *dans cette base* B.

On cherche $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tel que :*

$$v=(16,-4,4)=\alpha(1,2,0)+\beta(0,2,1)+\gamma(-1,0,3).$$

On a :

$$(16,-4,4)\ =\ \alpha(1,2,0)+\beta(0,2,1)+\gamma(-1,0,3)=(\alpha-\gamma,2\alpha+2\beta,\beta+3\gamma)$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 16..........(1) \\ 2\alpha + 2\beta = -4.......(2) \\ \beta + 3\gamma = 4..........(3) \end{cases}$$

de $(1) \Rightarrow \gamma = \alpha - 16$ *et* $(2) \Rightarrow \beta = -2 - \alpha$

$(3) \Rightarrow -2 - \alpha + 3(\alpha - 16) = 4$, *d'où* $2\alpha = 54$ *donc,* $\alpha = 27$, $\gamma = 27 - 16 = 11$ *et* $\beta = -2 - 27 = -29$

On conclut, $\alpha = 27, \beta = -29, \gamma = 11$, *alors la décomposition de vecteur* $v = (16, -4, 4)$ *dans la base* B *est :*

$$v = (16, -4, 4) = 27(1, 2, 0) - 29(0, 2, 1) + 11(-1, 0, 3).$$

Exercise 6.23 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$\begin{array}{lll} 1) & A & = & \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\} \\ 2) & B & = & \{(2, 0, -2), (3, 2, 1), (1, 2, 3)\} \\ 3) & C & = & \{(1, -2, 1, 5), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 3, 0)\} \end{array}$$

Solution :

1) Etudions la liberté des famille : $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 2), (-1, 0, 3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(-1, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0.......(1) \\ 2\alpha + \beta = 0.......(2) \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0.......(3) \end{cases}$$

On a : $(2) \Rightarrow \beta = -2\alpha$ *et de* (1) *on aura* $\gamma = \alpha - \beta = \alpha + 2\alpha$ *d'où* $\gamma = 3\alpha$, *remplaçons* β *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3) \Rightarrow -\alpha - 4\alpha + 9\alpha = 0$, *d'où* $\alpha = 0$

On conclut, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* A *est famille libre.*

2) Etudions la liberté des famille : $B = \{(2, 0, -2), (3, 2, 1), (1, 2, 3)\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha(2, 0, -2) + \beta(3, 2, 1) + \gamma(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

On a :

$$\alpha\,(2,0,-2)+\beta\,(3,2,1)+\gamma\,(1,2,3)=(0,0,0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\alpha+3\beta+\gamma=0......\,(1)\\ 2\beta+2\gamma=0...........\,(2)\\ -2\alpha+\beta+3\gamma=0.....\,(3)\end{array}\right.$$

On a : $(2)\Rightarrow\gamma=-\beta$ *et de* (1) *on aura* $2\alpha+3\beta-\beta=0$ *d'où* $\alpha=-\beta$, *remplaçons* α *et* γ *dans l'équation* (3) *on obtient :* $(3)\Rightarrow 2\beta+\beta-3\beta=0$, *d'où* $0.\beta=0$, *on déduit que* β *il est quelconque. Prenons par exemple* $\beta=1$ *on aura* $\alpha=-1$ *et* $\gamma=-1$ *c'est à dire*

$$(-1)\,(2,0,-2)+1\,(3,2,1)+(-1)\,(1,2,3)=(0,0,0)$$

On conclut, que la famille B *est liée.*

Exercise 6.24 *Etudier la liberté des familles suivantes :*

$$\begin{array}{lll}1)\;\;A&=&\{e^{x},\;xe^{x},\;e^{-x},\;xe^{-x}\}\\ 2)\;\;B&=&\{2x^{2}-3,\;-x+1,\;-x^{4}-3x^{2}-2x+1\}\\ 3)\;\;C&=&\{x^{2}+1,\;x^{3},\;x^{3}+x^{2}+2\}\end{array}$$

Solution :

3) Etudions la liberté de la famille : $A=\{e^{x},\;xe^{x},\;e^{-x},\;xe^{-x}\}$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$, *on suppose que:* $\alpha e^{x}+\beta xe^{x}+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}=0$

Pour $x\neq 0$, *on divise par* xe^{x} *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$ *on obtient :*

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha e^{x}+\beta xe^{x}+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}}{xe^{x}}\right)&=&\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha\dfrac{1}{x}+\beta+\gamma\dfrac{e^{-2x}}{x}+\lambda e^{-2x}\right)\\ &=&\beta=0\end{array}$$

donc $\beta=0$.

Pour $x\neq 0$, *on divise par* xe^{-x} *et en faisant tendre* x *vers* $-\infty$ *on obtient :*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha e^{x}+\gamma e^{-x}+\lambda xe^{-x}}{xe^{-x}}\right)\lim_{x\to-\infty}\left(\alpha\frac{e^{2x}}{x}+\gamma\frac{1}{x}+\lambda\right)=\lambda=0$$

donc, $\lambda=0$.

Prenons maintenant $x=0$ *et* $x=1$, *on obtient :*

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\gamma=0.............\,(1)\\ \alpha e+\dfrac{1}{e}\gamma=0.........\,(2)\end{array}\right.$$

On a : $(1) \Rightarrow \gamma = -\alpha$, *remplaçons* γ *dans l'équation* (2) *on obtient :* $(2) \Rightarrow \alpha\left(e - \dfrac{1}{e}\right) = 0$, *d'où* $\alpha = 0$ *car* $\left(e - \dfrac{1}{e}\right) \neq 0$. *On conclut,* $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$, *d'où* $A = \{e^x,\ xe^x,\ e^{-x},\ xe^{-x}\}$ *est famille libre.*

2) Etudions la liberté de la famille : $B = \{2x^2 - 3, \quad -x+1, \quad -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*:

$$\alpha\left(2x^2 - 3\right) + \beta\left(-x+1\right) + \gamma\left(-x^4 - 3x^2 - 2x + 1\right) = 0$$

On a :

$$\begin{aligned} & \alpha\left(2x^2 - 3\right) + \beta\left(-x+1\right) + \gamma\left(-x^4 - 3x^2 - 2x + 1\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & -\gamma x^4 + \left(2\alpha - 3\gamma\right)x^2 + \left(-\beta - 2\gamma\right)x + \left(\beta - 3\alpha + \gamma\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} -\gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *d'où* $B = \{2x^2 - 3, \quad -x+1, \quad -x^4 - 3x^2 - 2x + 1\}$ *est famille libre.*

3) Etudions la liberté de la famille : $C = \{x^2 + 1,\ x^3,\ x^3 + x^2 + 2\}$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *on suppose que*: $\alpha\left(x^2+1\right) + \beta x^3 + \gamma\left(x^3 + x^2 + 2\right) = 0$

$$\begin{aligned} \textit{On a :} \quad & \alpha\left(x^2+1\right) + \beta x^3 + \gamma\left(x^3 + x^2 + 2\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \left(\beta + \gamma\right)x^3 + \left(\alpha + \gamma\right)x^2 + \left(\alpha + 2\gamma\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \alpha + 2\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

Donc, $C = \{x^2 + 1,\ x^3,\ x^3 + x^2 + 2\}$ *est une famille libre.*

Exercise 6.25 *Dire si les ensembles de vecteurs suivants sont des espaces vectoriels, et justifier la réponse :*

1) $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
2) $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
3) $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}$
4) $F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y - 3z = 0\}$
5) $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$
6) $F_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$
7) $F_7 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$

Solution :

1) $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$?

F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_1.$$

On a : $F_1 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0) \in F_1$.

Soient $X, Y \in F_1$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X \in F_1 &\Rightarrow X = (x_1, x_2) \ \text{ et } 2x_1 + 3x_2 = 0 ...... (1) \\ Y \in F_1 &\Rightarrow Y = (y_1, y_2) \ \text{ et } 2y_1 + 3y_2 = 0 ...... (2) \end{aligned}$$

On a : $\lambda.X + \beta.Y = \lambda.(x_1, x_2) + \beta.(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\beta y_1, \beta y_2)$
$= (\lambda x_1 + \beta y_1, \lambda x_2 + \beta y_2)$

De plus on a :

$$\begin{aligned} 2(\lambda x_1 + \beta y_1) + 3(\lambda x_2 + \beta y_2) &= \lambda(\underbrace{2x_1 + 3x_2}_{(1)}) + \beta(\underbrace{2y_1 + 3y_2}_{(2)}) \\ &= \lambda.0 + \beta.0 = 0 \end{aligned}$$

On a : $\lambda.X + \beta.Y \in F_1$. *Alors,* F_1 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

2) $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$?

F_2 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_2.$$

On a : $F_2 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0) \in F_2$.

Remarquons que : $X = (3, 0) \in F_2$ *et* $Y = (0, 5) \in F_2$

Mais on a : $X + Y = (3, 0) + (0, 5) = (3, 5) \notin F_2$. *Alors,* $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

3) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - 4z = 0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?

F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_3 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_3.$$

On a : $F_3 \neq \emptyset$, *car* $(0, 0, 0) \in F_3$, *puisque* $3.0 + 2.0 - 4.0 = 0$

Soient $X, Y \in F_3$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$$X \in F_2 \Rightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \ \text{ et } 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 ...... (1)$$

$$Y \in F_2 \Rightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) \ \text{ et } 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 ...... (2)$$

On a : $\lambda.X+\beta.Y=\lambda.\left(x_1,x_2,x_3\right)+\beta.\left(y_1,y_2,y_3\right)=\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\right)+\left(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3\right)$

$=\left(\lambda x_1+\beta y_1,\lambda x_2+\beta y_2,\lambda x_3+\beta y_3\right)$

De plus on a :

$$3\left(\lambda x_1+\beta y_1\right)+2\left(\lambda x_2+\beta y_2\right)-4\left(\lambda x_3+\beta y_3\right)$$

$$=\lambda\underbrace{(3x_1+2x_2-4x_3)}_{(1)}+\beta\underbrace{(3y_1+2y_2-4y_3)}_{(2)}$$

$$=\lambda.0+\beta.0=0$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_3$ *. Donc,* F_3 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

4) $F_4=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ et } y-3z=0\right\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?

F_4 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_4\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_4,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R}:(\lambda.X+\beta.Y)\in F_4.$$

On a : $F_4\neq\emptyset$*, car* $(0,0,0,0)\in F_4$*, puisque* $0+0=0$ *et* $0-3.0=0$

Soient $X,Y\in F_4$ *et* $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.

$$X\in F_4\Rightarrow X=\left(x_1,x_2,x_3\right) \text{ et } x_1+x_2=0,\ x_2-3x_3=0\ldots\ldots(1)$$
$$Y\in F_4\Rightarrow Y=\left(y_1,y_2,y_3\right) \text{ et } y_1+y_2=0,\ y_2-3y_3=0\ldots\ldots(2)$$

On a : $\lambda.X+\beta.Y=\lambda.\left(x_1,x_2,x_3\right)+\beta.\left(y_1,y_2,y_3\right)=\left(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\right)+\left(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3\right)$

$$=\left(\underbrace{\lambda x_1+\beta y_1}_{z_1},\underbrace{\lambda x_2+\beta y_2}_{z_2},\underbrace{\lambda x_3+\beta y_3}_{z_3}\right)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= \lambda x_1+\beta y_1+\lambda x_2+\beta y_2\\ &= \lambda\left(x_1+x_2\right)+\beta\left(y_1+y_2\right)\\ &= \lambda.0+\beta.0=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2-3z_3 &= \lambda x_2+\beta y_2-3\left(\lambda x_3+\beta y_3\right)\\ &= \lambda\left(x_2-3x_3\right)+\beta\left(y_2-3y_3\right)\\ &= \lambda.0+\beta.0=0 \end{aligned}$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_4$.

Donc, F_4 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

5) $F_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y-z=0 \text{ et } x-2y-z=0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$?

F_5 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$F_5\neq\emptyset \quad et \quad \forall X,Y\in F_5,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R}:(\lambda.X+\beta.Y)\in F_5.$$

On a : $F_5\neq\emptyset$, *car* $(0,0,0,0)\in F_5$, *puisque* $2.0-0-0=0$ *et* $0-2.0-0=0$

Soient $X,Y\in F_5$ *et* $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$.

$$X\in F_5\Rightarrow X=(x_1,x_2,x_3) \text{ et } 2x_1-x_2-x_3=0,\ x_1-2x_2-x_3=0......(1)$$
$$Y\in F_5\Rightarrow Y=(y_1,y_2,y_3) \text{ et } 2y_1-y_2-y_3=0,\ y_1-2y_2-y_3=0......(2)$$

On a : $\lambda.X+\beta.Y=\lambda.(x_1,x_2,x_3)+\beta.(y_1,y_2,y_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)$

$$=\left(\underbrace{\lambda x_1+\beta y_1}_{z_1},\underbrace{\lambda x_2+\beta y_2}_{z_2},\underbrace{\lambda x_3+\beta y_3}_{z_3}\right)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}2z_1-z_2-z_3 &= 2(\lambda x_1+\beta y_1)-(\lambda x_2+\beta y_2)-(\lambda x_3+\beta y_3)\\ &= \lambda(2x_1-x_2-x_3)+\beta(2y_1-y_2-y_3)\\ &= \lambda.0+\beta.0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1-2z_2-z_3 &= (\lambda x_1+\beta y_1)-2(\lambda x_2+\beta y_2)-(\lambda x_3+\beta y_3)\\ &= \lambda(x_1-2x_2-x_3)+\beta(y_1-2y_2-y_3)\\ &= \lambda.0+\beta.0=0\end{aligned}$$

D'où $\lambda.X+\beta.Y\in F_5$.

Donc, F_5 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

6) $F_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y=0\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$?

F_6 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*

$$F_6\neq\emptyset \qquad et \quad \forall X,Y\in F_6,\forall\lambda,\beta\in\mathbb{R}:(\lambda.X+\beta.Y)\in F_6.$$

On a : $F_6\neq\emptyset$, *car* $(0,0)\in F_6$.

Remarquons que : $X=(1,-1)\in F_6$ *car* $(1)^2+(-1)=0$

et $Y=(-1,-1)\in F_6$ *car* $(-1)^2+(-1)=0$

Mais on a : $X+Y=(1,-1)+(-1,-1)=(0,-2)\notin F_2$, *car* $(0)^2 + (-2) \neq 0$. *Alors* F_6 *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

7) $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = x + y + z - t = 3x + 2z = 1\}$ *est-il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*?*

F_7 *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *si et seulement si :*

$$F_7 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in F_7, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : (\lambda.X + \beta.Y) \in F_7.$$

On a : $(0, 0, 0, 0) \notin F_7$. *Alors,* F_7 *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

6.7 Applications Linéaires

Définition 6.15 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{k}$ *et* $f : E \to F$ *une application. On dit que* f *est une application linéaire si et seulement si*

1. $\forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Ceci est équivalent à dire

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Terminologie et notations

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \to F$ est dite **endomorphisme**.
Si f est bijective et linéaire de $E \to F$, elle est dite **isomorphisme**.
Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un **automorphisme**.

Remarque 6.2 *Si* f *est une application linéaire alors* $f(0_E) = 0_F$.

Exemple 6.26 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x + y, x - z, y + 2z) \end{array}$$

f *est-il application linéaire ? c'est à dire :*

$$(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \ \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y))?$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^3$*, vérifions* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

$$x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3)$$

On a :

$$\begin{aligned}
& f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)) \\
& = f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)) \\
& = (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, \lambda x_2 + \mu y_2 + 2\lambda x_3 + 2\mu y_3) \\
& = \lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 + 2x_3) + \mu(y_1 + y_2, y_1 - y_3, y_2 + 2y_3) \\
& = \lambda f((x_1, x_2, x_3)) + \mu f((y_1, y_2, y_3)) = \lambda f(x) + \mu f(y).
\end{aligned}$$

Alors, f *est une application linéaire.*

Exemple 6.27 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = (x + y, 2y - x, x - y + 1) \end{array}$$

g *n'est pas linéaire car* $g(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$.

Exemple 6.28 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & h(x, y) = |x - y| \end{array}$$

h *n'est pas linéaire car* $h(X + Y) \neq h(X) + h(Y)$.

Proposition 6.11 *(Une autre caractérisation des applications linéaires)*
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{k}$ *et* $f \in L(E, F)$*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, ..., x_N) \in E^n, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$*, on a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 6.3 *Une application linéaire* $f \in L(E, F)$ *est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de* E.

Exemple 6.29 *Déterminer l'application linéaire* f *:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z), \end{array}$$

telle que :

$$\begin{cases} f(e_1) = & f((1,0,0)) = & (1,-1) \\ f(e_2) = & f((0,1,0)) = & (2,3) \\ f(e_3) = & f((0,0,1)) = & (-1,2) \end{cases}$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f((x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)) = f(x,0,0)+f(0,y,0)+f(0,0,z) \\ &= xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = x(1,-1)+y(2,3)+z(-1,2) \\ &= (x,-x)+(2y,3y)+(-z,2z) = (x+2y-z,-x+3y+2z) \end{aligned}$$

Donc, l'application linéaire f est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z,-x+3y+2z). \end{array}$$

6.7.1 Noyau, Image d'une application linéaire

Définition 6.16 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble défini par

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

2. On appelle noyau de f et on $\ker f$ l'ensemble défini par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Propriétés de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$

Proposition 6.12 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. Pour tout s. e. v. E_1 de E l'image directe $f(E_1)$ est un s. e. v. de F ; en particulier $\operatorname{Im} f$ est un s. e. v. de F.

2. Pour tout s. e. v. F_1 de F l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E ; en particulier $\ker f$ est un s. e. v. de E.

Preuve. 1. a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.

b) Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1, y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(E_1).$$

c) Soient $y \in f(E_1), \lambda \in \mathbb{k}$, donc $\exists x \in E_1, y = f(x)$.

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(E_1).$$

Ce qui montre que que $f(E_1)$ est un s. e. v. de F.

2. a) On a $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in F_1$. Donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$.

b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) &\Longrightarrow f(x_1) \in F_1 \text{ et } f(x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1) \end{aligned}$$

c) Soient $x \in f^{-1}(F_1)$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F_1) \text{ et } \lambda \in \mathbb{k} &\Longrightarrow f(x) \in F_1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{k} \\ &\Longrightarrow \lambda f(x) = f(\lambda x) \in F_1 \\ &\Longrightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que que $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E. ■

Proposition 6.13 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Preuve. 1. On suppose que f est injective et soit $x \in \ker f$

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Longrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \\ &\Longrightarrow x = 0_E \\ &\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose $\ker f = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \\ &\Longrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

2. Nous avons f est surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$, c'est à dire $F \subset f(E)$. On sait que $f(E) \subset F$, d'où $f(E) = F$. $\operatorname{Im} f = F$. $\blacksquare$

Exemple 6.30 *Soit f est une application linéaire définie comme suit :*

$$\begin{array}{rlcl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (y, x-z, z) \end{array}$$

Déterminer $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$.

On a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0) \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y, x-z, z) = (0,0,0) \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ et } x - z = 0 \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ (0,0,0) \right\}. \end{aligned}$$

d'où f est injective.

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{ f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ (y, x-z, z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x(0,1,0) + y(1,0,0) + z(0,-1,1) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que les vecteurs $(0,1,0), (1,0,0)$ *et* $(0,-1,1)$ *engendrent* $\operatorname{Im} f$ *.*

Vérifions que $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est linéairement indépendant :*

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on suppose que: $\alpha(0,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,-1,1) = (0,0,0)$

$$\textit{On a :} \ \alpha(0,1,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,-1,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 0........ (1) \\ \alpha - \gamma = 0.... (2) \\ \gamma = 0........ (3) \end{cases}$$

de $(1), (2)$ *et* (3) *on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où* $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est libre.*

on conclut que $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est libre et engendre* $\operatorname{Im} f$ *, alors* $\{(0,1,0), (1,0,0), (0,-1,1)\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$*. De plus on a :*

$$\left. \begin{array}{r} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ \textit{et} \\ \dim \ \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

D'où f est une application surjective.

6.7.2 Composition de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois $\mathbb{k}-$ev et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire. En effet ;

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \\ &= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Proposition 6.14 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de F vers E.*

Preuve. Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $x', y' \in F$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha x' + \beta y') &= f^{-1}(\alpha f(f^{-1}(x')) + \beta f(f^{-1}(y'))) \\ &= f^{-1}(f[\alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')]) = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Définition 6.17 *Deux $\mathbb{k}-$ev E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{k}-$ev de E sur F ou bien de F sur E.*

Proposition 6.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimensions finies. Pour que E et F soient isomorphes il faut et il suffit que* $\dim E = \dim F$.

6.7.3 Rang d'une application linéaire

Définition 6.18 *Soient E et F deux $\mathbb{k}-$ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. On appelle rang de f et on note $rg(f)$ l'entier naturel $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.*

Remarque 6.4 *1. Si B est une base de E, alors pour tout $f \in L(E, F)$, on a*

$$rg(f) = \dim f(\langle B \rangle) = \dim \langle f(B) \rangle = rg(f(B)).$$

2. Pour tout $f \in L(E, F)$, on a

$$rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème 6.31 *(Théorème du rang)*

Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. Alors, on a

$$rg(f) = \dim E - \dim \ker f.$$

Proposition 6.16 *Soient E et F deux $\Bbbk-$ev de dimensions finies et $f \in L(E, F)$. Alors*

1. *f est injective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$
2. *f est surjective si seulement si* $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

Corollaire 6.32 *Sur $\mathbb{R}$, on considère les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ et $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors*

1. *$n < p \Longrightarrow f$ n'est pas surjective.*
2. *$n > p \Longrightarrow f$ n'est pas injective.*
3. *$n = p$, on ne peut rien dire mais*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f.$$

1. Supposons par l'absurde que $n < p$ et f est surjective, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^p = p$. Ce qui implique, $n = p + \dim \ker f$ et $n < p$, contradiction. Donc, f n'est pas surjective.

2. On suppose de même que f est injective et $n > p$. donc $\dim \ker f = 0$. Ce qui implique, $n = 0 + \dim \operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq p \Longrightarrow n \leq p$, contradiction. Donc, f n'est pas injective.

3. Si $n = p$, on obtient $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ et on ne peut rien dire.

Si de plus, par exemple, f est injective, alors $\dim \ker f = 0$. Ce qui nous donne, $n = \dim \operatorname{Im} f$ et comme $n = p$, on déduit que f est surjective. Par suite, f est bijective.

Raisonnement analogue si f est surjective. ■

6.8 Exercices

Exercise 6.33 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + 3y, 2x - z) \end{array}$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.

2) Déterminer $\ker f$ *le noyau de f, puis donner* $\dim \ker f$.

3) f est-elle injective ?

4) Donner $\dim \operatorname{Im} f$, *puis donner une base à* $\operatorname{Im} f$.

5) f est-elle surjective ?

Solution

1) Vérifions que f est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda (x, y, z) + \mu (x', y', z')) \\ &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda x + \mu x' + 3\lambda y + 3\mu y', 2\lambda x + 2\mu x' - \lambda z - \mu z') \\ &= \lambda (x + 3y, 2x - z) + \mu (x' + 3y', 2x' - z') \\ &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')) = \lambda f(X) + \mu f(Y). \end{aligned}$$

Donc, f est une application linéaire.

2) Déterminons $\ker f$ *le noyau de f, puis nous donnons* $\dim \ker f$.

On a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3y, 2x - z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{-1}{3}x \text{ et } z = 2x\right\} \\ &= \left\{x\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right) : x \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

d'où le vecteur $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *engendre* $\ker f$ *de plus le vecteur* $\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)$ *est libre car il n'est pas nul en déduit que* $\left\{\left(1, \frac{-1}{3}, 2\right)\right\}$ *de* $\ker f$, *donc* $\dim \ker f = 1$.

3) f n'est pas injective car on a : $\ker f \neq (0, 0, 0)$.

4) Donnons $\dim \operatorname{Im} f$

On a : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, *on déduit que :* $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Nous donnons une base à $\operatorname{Im} f$, *on a :*

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{et} \\ \dim \ \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2,$$

donc $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est base de* $\operatorname{Im} f$.

5) f est surjective car : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercise 6.34 *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z) \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *en précisant leurs dimensions.*

3) f est-elle bijective ? Justifier.

Solution :

On a :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z).$$

1) Montrons que f est linéaire.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{cl} & f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ = & (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ = & (\alpha(x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2), \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2), \alpha(3x_1 + 2z_1) + \beta(3x_2 + 2z_2)) \\ = & \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2) \\ = & \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y). \end{array}$$

Donc, f est linéaire.

2) Déterminons $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

$$\begin{array}{rcl} Ker f & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2z, y+z, 3x+2z) = (0,0,0)\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2z = 0 \text{ et } y+z = 0 \text{ et } 3x+2z = 0\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } \; y = 0 \text{ et } z = 0\} = \{(0,0,0)\}. \end{array}$$

$Ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow \dim Ker f = 0.$

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Im} f & = & \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{(x+2z, y+z, 3x+2z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{x(1,0,3) + y(0,1,0) + z(2,1,2) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \left\langle \underbrace{(1,0,3)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(2,1,2)}_{u_3} \right\rangle. \end{array}$$

Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

Montrons que cette famille est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned}
\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha\,(1,0,3) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(2,1,2) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow (\alpha + 2\gamma, \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma) = (0,0,0) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 & \text{............}(1) \\ \beta + \gamma = 0 & \text{............}(2) \\ 3\alpha + 2\gamma = 0 & \text{...........}(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

(3)-(1) donne $2\alpha = 0$ *et donc* $\alpha = 0$*. On remplace* α *dans (1), on aura* $\gamma = 0$*. On remplace* γ *dans (2), on aura* $\beta = 0$*. Donc* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est libre.*

Finalement $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$ *et par suite* $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

3) $Ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow f$ *est injective*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espace d'arrivée}} \Longrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Finalement f *est bijective.*

Bibliographie

[1] R. COUTY et J. Ezra, Analyse. Tome 1 et 2, Librairie Armand Colin (1967).

[2] M. Messeri, Exercices de Mathématiques, Analyse 1. Tome 2, Collection Berlin (1980).

[3] J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.

[4] J. Quinet, Cours élémentaires de mathématiques supérieures, Tome 2, Fonctions unsuelles. Dunod (1976).

[5] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'analyse, 1er cycle, 1ère Année de Mathématiques Supérieurs. Librairie Armand Colin (1977).

[6] K. Allab, Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle. Office des publications universitaires, (1986).

[7] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, Précis de mathématiques, Analyse- première année, Bréal, Rosny 2003.

[8] J. P. Escofier, Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés, Dunod 2014.

[9] M. Mehbali, Mathématiques : (Fonction d'une variable réelle), Office des publications universitaires, 1 Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[10] J. M. Monier, ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigés, 5^{e} édition. Dunod, Paris, 2006.