République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/MIRA de Bejaïa

Faculté de Technologie

Département de Génie Élécrtique

Support de Cours

Mathématiques 3

Destiné aux étudiants de $2^{\text{ème}}$ ***année LMD Génie électrique***

Auteur :

Dr. Leila YOUNSI-ABBACI.

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022/2023

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

PRÉFACE

Ce polycopié est destiné aux étudiants de troisième semestre licence mathématiques (LMD). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné (Maths 3) de licence Génie électrique. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exercices résolus. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

Ce manuscrit a la particularité de dégager les points essentiels qui permettent d'orienter le travail personnel de l'étudiant. Il est structuré en quatre chapitres ; chacun comporte un cours contenant les définitions, propriétés et théorèmes dont les preuves simples sont laissées à titre d'application au soin de l'étudiant. On y trouve aussi des exemples illustratifs, des remarques pertinentes ainsi qu'une série d'exercices résolus de façon détaillée visant l'assimilation du cours et l'acquisition des techniques. On y trouvera aussi des exercices sans solutions proposés dans le but de stimuler l'étudiant à fournir un effort personnel.

Le but des chapitres qui suivent est de définir une notion d'intégrale pour les fonctions de plusieurs variables. L'une des nouveautés est la richesse des domaines sur lesquelles on peut intégrer. En effet, le domaine d'intégration d'une intégrale simple est toujours un intervalle (ou une union d'intervalles). Par contre, on peut intégrer une fonction de deux variables sur un rectangle, un disque, un domaine entouré par une courbe compliquée (on parle d'intégrales doubles). On peut intégrer une fonction de trois variables sur une sphère, un cylindre, un cône, un ellipsode, etc. (on parle d'intégrales triples). La plupart des intégrales que vous rencontrerez ne sont pas des aires de domaines bornés du plan. Nous allons apprendre ici à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

CHAPITRE 1

INTÉGRALES SIMPLES

L'objectif de ce chapitre est purement technique, le but est d'exposer les principales techniques de calcul des primitives et des intégrales.
Les fonctions de ce chapitre sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

1.1 Primitives

1.1.0.1 Primitive d'une fonction

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f, une fonction F dont la dérivée est f :

$$\forall\, x \in K,\;\; F'(x) = f(x).$$

Remarque 1.1. *F primitive de f sur K alors pour tout réel c, $F + c$ est une primitive de f sur K et on note :*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Exemple 1.1.1.

- *La primitive de $f(x) = 2x$ est $F(x) = x^2 + c$ et on écrit :*

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + c,\;\; avec\, c\, une\, constante\, dans\, \mathbb{R}.$$

- *La primitive de $f(x) = \cos x$ est $F(x) = \sin x + c$ et on écrit :*

$$\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + c,\;\; c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2. *La primitive d'une fonction n'est pas unique, autrement dit, si F est une primitive de f, les autres primitives sont $F + (Constante)$.*

Exemple 1.1.2. *Soit la fonction f (x) = 2x + 8. On a :*

$$F(x) = x^2 + 8x,\ \ H(x) = x^2 + 8x + 1,\ \ G(x) = x^2 + 8x - 2020,\ .....$$

sont des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ car

$$F'(x) = G'(x) = H'(x) = f(x).$$

1.1.0.2 Propriétés des primitives

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle K de $\mathbb{R}$. Alors :

1. $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x).$
2. $\displaystyle\int \big(\lambda f(x)\big)dx = \lambda \int f(x)dx = \lambda F(x), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$

1.1.0.3 Primitives des fonctions usuelles

Ces primitives sont à connaître par coeur.

- $\int dx = x + c,\ \ c$ est une constante réelle
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + c$
- $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c,\ \ m \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$
- $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$
- $\int (u(x))^n u'(x)dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
- $\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)} + c$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c$
- $\int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)) + c$
- $\int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)) + c$
- $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = 2\sqrt{u(x)} + c$
- $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = -\frac{1}{u(x)} + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

Quelques formules de trigonométrie utiles

Soient a, b et x des réels (quelconques) :

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
- $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

1.1.1 Intégrale définie

1.1.1.1 Intégrales simples

Proposition 1.1. *Si F est une primitive de la fonction continue f sur $[a,b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 1.3. *Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux) :*

$\int f(x)dx$ s'appelle une intégrale indéfinie de f, c'est une fonction primitive de f.

$\int_a^b f(x)dx$ s'appelle une intégrale définie de f, c'est un nombre réel.

Remarque 1.4. *L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ peut représenter une aire "algébrique". Elle est positive si $f \geq 0$ et négative si $f \leq 0$.*

Remarque 1.5.

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Proposition 1.2. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :*

1. *$f+g$, $f.g$, et λf sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$.*
2. *$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.*
3. *$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.*
4. *$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.*
5. *Si $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$.*
6. *Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.*
7. *Si $n \leq f(x) \leq m$, $\forall\, x \in [a,b]$ et $n, m \in \mathbb{R}$, alors*

$$(b-a)n \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)m.$$

Exemple 1.1.3. *Calculer les intégrales :*

1. $I = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
2. $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.
   On a,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx &= \int x^2(1+x^3)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int 3x(1+x^3)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + c, \;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   a la fin on remplace les borne dans notre intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx &= [\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}(1+\frac{1}{8})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1-0)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

3. $III = \int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x^2+1}dx$.
   On a

$$\begin{aligned} III = \int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x^2+1}dx &= \int_0^1 (1 + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1})dx \\ &= \left[x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_0^1 \\ &= (1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}) - (0) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

1.1.1.2 Méthodes de calcul des primitives et des intégrales

A) Intégration par parties

De la formule de dérivation du produit des fonctions :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad u, v, \;\; de \;\; classe \;\; C^1,$$

on déduit

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

et si les intégrales sont définies, u et v ayant leurs dérivées continues sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Exemple 1.1.4. *Calculer :*

1. $J = \int_0^1 xe^x dx$. *On pose*

$$\begin{aligned} u(x) = x \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad v(x) = e^x, \end{aligned}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$J = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 = 1.$$

2. $\int_0^1 (x+1)e^x dx$. *On pose*

$$\begin{aligned} u(x) = (x+1) \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad v(x) = e^x, \end{aligned}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1)e^x dx &= \Big[(x+1)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \Big[(x+1)e^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 \\ &= e. \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$. *On pose*

$$\begin{aligned} u(x) = (x+1) \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad v(x) = -e^{-x}, \end{aligned}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1)e^{-x} dx &= \Big[(x+1) * (-e^{-x})\Big]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1 - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 \\ &= 2 - 3e^{-1}. \end{aligned}$$

4. $\int_1^2 \ln(x) dx$. *On pose*

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x}, \\ v'(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad v(x) = x, \end{aligned}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \Big[x \ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 1 dx = \Big[x \ln x\Big]_1^2 - \Big[x\Big]_1^2 = -1 + 2\ln 2.$$

B) Changement de variables

Pour obtenir une expression plus simple de l'élément différentiel, il peut etre utile de poser $x = \varphi(t)$ dont la différentielle est $dx = \varphi'(t)dt$; dans ces conditions :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + c = G(\varphi^{-1}(x)) + c.$$

où G est une primitive de g et c constante. Notons que la fonction φ doit âªtre inversible et à dérivée continue. Pour les intégrales définies, toujours avec $x = \varphi(t)$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha),$$

où $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$ étant inversible sur $[\alpha, \beta]$ et à dérivée continue sur $]\alpha, \beta[$.

Remarque 1.6. *Dans la pratique, on prend comme changement de variable $t = \varphi(x)$ pour faciliter le calcule de la primitive.*

Exemple 1.1.5. *Calculer :*

1. $I = \int \tan x dx.$

Corrigé

1. $I = \int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx.$
   On pose $u(x) = \cos x$ dont la différentielle est $du = -\sin x dx$.
   Alors $I = \int \dfrac{du}{u} = -ln|u(x)| + C = -\ln \mid \cos x \mid + C$.

Exemple 1.1.6. *Calculer*

1. $\int_2^3 \frac{1}{x \ln x} dx.$

   On pose

   $$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

   de plus pour $x = 2 \Rightarrow t = \ln 2$, et $x = 3 \Rightarrow t = \ln 3$,

   d'où

   $$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{t} dt = \Big[\ln \mid t \mid \Big]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= \ln(\mid \ln 3 \mid) - \ln(\mid \ln 2 \mid) = \ln(\frac{\ln 3}{\ln 2}). \end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx.$

   On pose

   $$t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$$

de plus pour $x = 0 \Rightarrow t = 0 + 1 = 1$, *et* $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 1 = 2$,

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx &= \int_1^2 \frac{t-1}{t}dt = \int_1^2 (\frac{t}{t} - \frac{1}{t})dt \\
&= \int_1^2 1dt - \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \Big[t\Big]_1^2 - \Big[\ln \mid t \mid\Big]_1^2 \\
&= 1 - \ln(\mid 2 \mid) = 1 - \ln 2.
\end{aligned}$$

C) Intégration des fractions rationnelles

C.1) Intégrale du type $\int \frac{1}{x+\lambda}dx$**,** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{x+\lambda}dx = \ln \mid x + \lambda \mid + c, \ \ c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.7. *Calculer les primitives suivantes*

1. $\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx$.

   On a

$$\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx \ = \ 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = 2\Big[\ln \mid x+1 \mid\Big]_0^1 = 2\ln 2.$$

2. $\int_{-1}^0 \frac{5}{1-2x}dx$.

   On a

$$\int_{-1}^0 \frac{5}{1-2x}dx \ = \ \frac{5}{-2}\int_{-1}^0 \frac{-2}{1-2x}dx = \frac{-5}{2}\Big[\ln \mid 1-2x \mid\Big]_{-1}^0 = \frac{5\ln 3}{2}.$$

C.2) Intégrale du type $\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx$**, pour** $\lambda \in \mathbb{R}$ **et** $n > 1$:

$$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x+\lambda)^{n-1}} + c, \ \ c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.8. *Calculer la primitive suivante*

$$\int_0^1 \frac{2}{(x-2)^3}dx \ = \ 2\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^3}dx = \Big[\frac{-1}{(x-2)^2}\Big]_0^1 = \frac{-3}{4}.$$

C.3) Intégrale du type $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$**, où** a, b, p **et** $q \in \mathbb{R}$:

C.3.1) Si $x^2 + px + q$ $(\Delta \geq 0)$ **possède deux racines réelles** α **et** β**, donc :**

Proposition 1.3. *Si* $\alpha \neq \beta$ $(\Delta > 0)$ *alors pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$*, il existe* $A, B \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Application au calcul intégral

Si $\alpha \neq \beta$, on a,

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int (\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta})dx \\ &= \int (\frac{A}{x-\alpha})dx + \int (\frac{B}{x-\beta})dx \\ &= A\ln \mid x-\alpha \mid + B\ln \mid x-\beta \mid +c, , \ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.9. *Calculer*

1. $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x}{x^2-1}dx.$

   On décompose d'abord $\frac{x}{x^2-1}$ *en éléments simples :*

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-1} &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{Ax-A+Bx+B}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(-A+B)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1x+0}{x^2-1} \end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} (A+B)=1 \\ (-A+B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A+B)=1 \\ A=B \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x}{x^2-1}dx &= \int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{2}^{3} \frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x-1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln \mid x+1 \mid + \ln \mid x-1 \mid\Big]_{\sqrt{2}}^{3} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln \mid x^2-1 \mid\Big]_{\sqrt{2}}^{3} = \frac{3}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Remarque *(on peut faire le calcule sans la décomposition mais pas toujours) :*

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{x}{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x}{x^2-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln \mid x^2-1 \mid\Big]_{\sqrt{2}}^{3} = \frac{3}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

2. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$.

On décompose d'abord $\frac{1}{x^2-1}$ *en éléments simples :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{Ax-A+Bx+B}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(-A+B)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{0x+1}{x^2-1}\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} (A+B)=0 \\ (-A+B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-A+B)=1 \\ A=-B \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}, A=-B=\frac{-1}{2},$$

d'où

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx &= \int_2^3 \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}dx \\ &= \int_2^3 \frac{-1}{2(x+1)}dx + \int_2^3 \frac{1}{2(x-1)}dx \\ &= \frac{-1}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x+1)}dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x-1)}dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\ln\mid x+1\mid\Big]_2^3 + \frac{1}{2}\Big[\ln\mid x-1\mid\Big]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{(}{3}2)\end{aligned}$$

3. $\int_2^3 \frac{2x-2}{x^2+x-2}dx$.

$$\frac{2x-2}{x^2+x-2} = \frac{2x+1-3}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{-3}{x^2+x-2}$$

On décompose d'abord $\frac{-3}{x^2+x-2}$ en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\frac{-3}{x^2+x-2} &= \frac{-3}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x+2)(x-1)} \\
&= \frac{0x+(-3)}{x^2+x-2}
\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (A+B)=0 \\ (2A-B)=-3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (2A-B)=-3 \\ A=-B \end{cases} \\
&\Rightarrow -2B-b=-3 \Rightarrow B=1, A=-B=-1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{-3}{x^2+x-2} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{2x-2}{x^2+x-2}dx &= \int_2^3 (\frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{-3}{x^2+x-2})dx \\
&= \int_2^3 (\frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2})dx \\
&= \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx + \int_2^3 \frac{-1}{x-1}dx + \int_2^3 \frac{1}{x+2}dx \\
&= \Big[\ln \mid x^2+x-2 \mid\Big]_2^3 - \Big[\ln \mid x-1 \mid\Big]_2^3 + \Big[\ln \mid x+2 \mid\Big]_2^3 \\
&= 2\ln(\frac{5}{4}).
\end{aligned}$$

Proposition 1.4. *Si α racine réelle double ($\Delta = 0$), alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$*

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Application au calcul intégral

On a,

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int (\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2})dx \\
&= \int (\frac{A}{x-\alpha})dx + \int (\frac{B}{(x-\alpha)^2})dx \\
&= A\ln \mid x-\alpha \mid + \frac{-B}{(x-\alpha)^1} + c,, \ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.10. *Calculer*

1. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-2x+1}dx$.

   On décompose d'abord $\frac{x}{x^2-2x+1}$ *en éléments simples :*

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-2x+1} &= \frac{x}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}\\ &= \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1x+0}{x^2-2x+1}\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} A=1\\ (-A+B)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1\\ A=B\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ A=1, B=1,$$

d'où

$$\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{x^2-2x+1}dx &= \int_2^3 (\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2})dx\\ &= \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx+\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx\\ &= \Big[\ln\mid x-1\mid\Big]_2^3+\Big[\frac{-1}{(x-1)}\Big]_2^3=\ln 2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

C.3.2) Si x^2+px+q n'a pas de racines réelles, écrivons :

$$x^2+px+q=(x-\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

En posant $\alpha=-\frac{p}{2}$ et $\beta^2=q-\frac{p^2}{4}$, on obtient :

$$x^2+px+q=(x-\alpha)^2+\beta^2.$$

On fait maintenant le changement de variable

$$t=\frac{x-\alpha}{\beta}\Rightarrow dt=\frac{1}{\beta}dx,\ de\,plus\ (x-\alpha)^2+\beta^2=\beta^2(t^2+1),$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{ax+b}{(x-\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx \\
&= \int \frac{a(\beta t+\alpha)+b}{\beta^2(t^2+1)}\beta dt \\
&= \int \frac{At+B}{(t^2+1)}dt \\
&= \int \frac{At}{(t^2+1)}dt + \int \frac{B}{(t^2+1)}dt \\
&= \frac{A}{2}\ln \mid (t^2+1) \mid + B\arctan(t)+c, \ \ c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{A}{2}\ln \mid ((\frac{x-\alpha}{\beta})^2+1) \mid + B\arctan(\frac{x-\alpha}{\beta})+c, \ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(à la fin on a remplacé $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$).

Exemple 1.1.11. *Calculer*

1. $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx$. *On a*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx &= \int_0^1 (\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{4}{x^2+2x+5})dx \\
&= \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx + \int_0^1 \frac{4}{x^2+2x+5}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{4}{x^2+2x+5}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln \mid x^2+2x+5 \mid\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}dx
\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}dx$,

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = (x+1)^2+2^2 = 4((\frac{x+1}{2})^2+1)$$

on pose

$$t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx,$$

de plus, pour $x=0$ *on a* $t=\frac{1}{2}$ *et pour* $x=1$ *on a* $t=\frac{1+1}{2}=1$, *puis On a*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}dx &= \int_0^1 \frac{1}{4((\frac{x+1}{2})^2+1)}dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}2dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\arctan(t)\right]_0^1
\end{aligned}$$

à la fin

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx &= \left[\frac{1}{2}\ln\mid x^2+2x+5\mid\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\mid x^2+2x+5\mid\right]_0^1 + 4(\left[\frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2}))\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\mid x^2+2x+5\mid\right]_0^1 + 2\left[\arctan(\frac{x+1}{2})\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(\frac{8}{5})) + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

ù

C.4) Intégration des fractions rationnelles en e^x :

On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc $dt = e^x dx$ d'où$dt = tdx$.

Exemple 1.1.12. *Calculer*

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

   On pose

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow \frac{1}{t}dt = dx,$$

   de plus, pour $x = 0$ on a $t = 1$ et $x = 1$ on a $t = e$,

   on obtient,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)}dt.$$

   On décompose d'abord $\frac{1}{t(1+t)}$ en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t(1+t)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)} \\
&= \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} \\
&= \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)} \\
&= \frac{0t+1}{t(t+1)}
\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=-B \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad A=1, B=-1,$$

d'où

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} + \frac{-1}{(t+1)},$$

Puis,

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{t(1+t)} dt &= \int_1^e (\frac{1}{t} + \frac{-1}{(t+1)}) dt \\ &= \Big[\ln \mid t \mid - \ln \mid t+1 \mid \Big]_1^e \\ &= 1 - \ln(e+1) + \ln(2) = 1 + \ln(\frac{2}{e+1}). \end{aligned}$$

1.1.2 Exercices corrigés sur les intégrales simples

Exemple 1.1. ***(Intégration par parties)***

Calculer les intégrales suivante :

1. $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx.$
2. $\int (2x+1)e^{-x} dx$
3. $\int e^{-x} \sin x dx$

Calculons les intégrales :

1. $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx.$

On peut utiliser l'intégration par parties trois fois pour calculer $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x d.$ Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x$ sous la forme $\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^x$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^x,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

On a $\left[\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^x\right]' = (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \left(3ax^2 + 2bx + c\right) e^x + \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) e^x &= (x^3 + \tfrac{1}{3}x^2)e^x \\ \Longrightarrow \quad \left(ax^3 + (3a+b)\, x^2 + (2b+c)x + (c+d)\right) e^x &= (x^3 + \tfrac{1}{3}x^2)e^x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = \frac{1}{3} \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-8}{3} \\ c = \frac{16}{3} \\ d = \frac{-16}{3} \end{cases}$$

D'où

$\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx = (x^3 + \frac{-8}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{16}{3})e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

2. $\int (2x+1)e^{-x} dx$, intégration par parties

$$g(x) = 2x + 1 \Longrightarrow g'(x) = 2.$$

$$f'(x) = e^{-x} \Longrightarrow f(x) = -e^{-x}$$

Donc

$\int(2x+1)e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} - \int -2e^{-x}dx$

$= \ -(2x+1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx$
$= \ -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Finalement,

$$\int (2x+1)e^{-x}dx = -(2x+3)e^{-x} + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

3. $\int e^{-x} \sin x dx$, intégration par parties

$$f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

$$g'(x) = \sin x \Longrightarrow g(x) = -\cos x.$$

Donc

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx$$

encore une deuxième fois intégration par parties pour $\int e^{-x}\cos x dx$

$$f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

$$g'(x) = \cos x \Longrightarrow g(x) = \sin x.$$

$$\int e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx$$

Finalement,

$$\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - (e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx)$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

Exemple 1.2. ***(Changement de variables)***

Calculer les intégrales suivante :

1. $\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$
2. $\int \frac{\ln x}{x(1-ln^2 x)} dx.$
3. $\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$

Calculons les intégrales :

1. $\int \dfrac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx.$

   On pose : $t = 3 + 2\sqrt{x}$, donc $dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

   Alors

   $$\begin{aligned} &\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx = \int t^5 dt \\ =\ & \frac{1}{(5+1)} t^{(5+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ =\ & \frac{1}{6} t^6 + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ =\ & \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Finalement,

   $$\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6 + C,$$

   où $C \in \mathbb{R}$
2. $\int \dfrac{\ln x}{x(1-ln^2 x)} dx.$

   On pose : $t = \ln x$, donc $dt = \dfrac{1}{x}dx$

   Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x(1-ln^2)x}dx &= \int \frac{t}{(1-t^2)}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{-2t}{(1-t^2)}dt \\
&= -\frac{1}{2}ln|1-t^2|+c, \qquad c\in\mathbb{R} \\
&= -\frac{1}{2}ln|1-(ln\ x)^2|+c, \qquad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. $\int \dfrac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx.$

   On pose : $t = 3+2\sqrt{x}$, donc $dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

   Alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx &= \int t^5 dt \\
&= \frac{1}{(5+1)}t^{(5+1)}+C, \quad C\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{6}t^6+C, \quad C\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6+C, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Finalement, $\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6+C$, où $C\in\mathbb{R}$

Exemple 1.3. *Calculer :*

1. $\int_1^2 x\ln(x)dx$. *On pose*

$$\begin{aligned}
u(x)=\ln(x) \quad &\Rightarrow \quad u'(x)=\frac{(x)'}{x}=\frac{1}{x}, \\
v'(x)=x \quad &\Rightarrow \quad v(x)=\frac{x^2}{2},
\end{aligned}$$

   et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\ln(x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2 \\
&= 2\ln(2)-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x)\sin(x)dx$. *On pose*

$$u(x) = (1-x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -1,$$
$$v'(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = -\cos(x),$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x)\sin(x)dx &= \Big[(1-x)(-\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx \\ &= \Big[(x-1)\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x dx$. *On pose*

$$u(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \cos(x),$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x,$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$I \quad = \quad \Big[\sin(x)e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx$$

Le calcule de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)dx$ *: on pose*

$$u(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\sin(x),$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x,$$

et l'on intègre une deuxième fois par parties, ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx \quad = \quad \Big[\cos(x)e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x dx$$

d'où,

$$\begin{aligned}
I &= \left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx \\
&= \left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (\left[\cos(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx) \\
&= \left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\cos(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I \\
&\Rightarrow\ 2I = \left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\cos(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\Rightarrow\ I = \frac{\left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\cos(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{2} \\
&\Rightarrow\ I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.4. ***(Intégration par changement de variables)***

Calculer :

1. $\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$.

   En posant

   $$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \Rightarrow dx = 2tdt,$$

   de plus, pour $x = 2$ on a $t = \sqrt{2-1} = 1$ et $x = 5$ on a $t = \sqrt{5-1} = 2$,

   on obtient

   $$\begin{aligned}
   \int_2^5 x\sqrt{x-1}dx &= \int_1^2 (t^2+1)t2tdt \\
   &= \int_1^2 (2t^4+2t^2)dt \\
   &= \left[(\frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3})\right]_1^2 = \frac{256}{15}.
   \end{aligned}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$.

   En posant

   $$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx,$$

   de plus, pour $x = 0$ on a $t = \sin 0 = 0$ et $x = 5$ on a $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

   on obtient

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^1 tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.5. ***(Intégration des fractions rationnelles)***

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int_4^{10}(\frac{x^3}{x^2-x-6})dx.$

1-ère étape : effectuer la division euclidienne :

$$(\frac{x^3}{x^2-x-6}) = x+1+(\frac{7x+6}{x^2-x-6}).$$

2-ème étape : d'écomposer en fractions simples :

$$\begin{aligned}
\frac{7x+6}{x^2-x-6} &= \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} \\
&= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)} \\
&= \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} \\
&= \frac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)} \\
&= \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)},
\end{aligned}$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} (A+B)=7 \\ (-3A+2B)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3A+3B)=21 \\ (-3A+2B)=6 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad 3B+2B = 21+6 \Rightarrow B = \frac{27}{5}, A = \frac{8}{5},$$

d'où

$$\frac{7x+6}{x^2-x-6} = \frac{7x+6}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{8}{5}}{x+2} + \frac{\frac{27}{5}}{x-3} = \frac{8}{5(x+2)} + \frac{27}{5(x-3)}.$$

Alors,

$$\frac{x^3}{x^2-x-6} = x+1+(\frac{7x+6}{x^2-x-6}) = x+1+\frac{8}{5(x+2)} + \frac{27}{5(x-3)}.$$

3-ème étape : intégrer :

$$\begin{aligned}
\int_4^{10} \frac{x^3}{x^2-x-6}dx &= \int_4^{10}(x+1+(\frac{7x+6}{x^2-x-6}))dx \\
&= \int_4^{10}(x+1)+\frac{7x+6}{x^2-x-6})dx \\
&= \int_4^{10}(x+1+\frac{8}{5(x+2)}+\frac{27}{5(x-3)})dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{5}\ln\mid(x+2)\mid+\frac{27}{5}\ln\mid(x-3)\mid\right]_4^{10} \\
&= 48+\frac{27}{5}\ln 7+\frac{8}{5}\ln 2.
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

INTÉGRALES DOUBLES

2.1 Itroduction

Dans cette section, nous définissons l'intégrale double d'une fonction àÂ deuxvariables $f(x, y)$ sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. Par la suite, nous présentons le calcul pratique des intégrales triples. Enfin, nous expliquons le changement de variable coordonnées polaires.

2.2 Intégrales doubles

Soit D une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (D est limité par des courbes simples dans $\mathbb{R}^2$), et soit

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

une fonction à deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur le domaine D. Donc l'intégrale double de f sur D est donnée par :

$$\int\int_D f(x, y) dx dy.$$

2.3 Propriétés de l'intégrale double

1. **Aire**(D) : Si $f(x, y) = 1$, alors :

$$Aire(D) = \int\int_D dx dy.$$

2. **Positivité** : Si $f(x,y) \geq 0$ pour $(x,y) \in D$, alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

3. **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions à deux variables qui sont intégrables sur D et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int\int_D \Big[\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\Big] dxdy = \lambda \int\int_D f(x,y)dxdy + \mu \int\int_D g(x,y)dxdy.$$

4. **Relation de Chasles** : Si $D = D_1 \cup D2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, (D_1 et D_2 deux domaines qui sont disjoints, i.e., Aire$(D_1 \cap D_2) = 0$, alors :

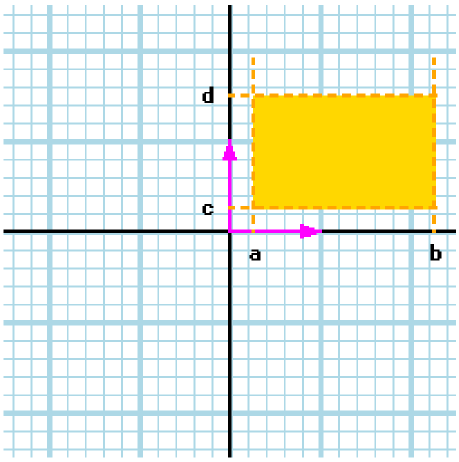
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

2.4 Méthodes de calcul des intégrales doubles

Nous intéressons dans cette section au calcul pratique des intégrales doubles.

2.4.0.1 Intégrale double sur un pavé (rectangle)

Soit $D = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$ un rectangle fermé du plan R^2 dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Par définition, $R = \{(x,y) \in R^2 / a \leq x \leq b, c \leq x \leq d\}$



ThÃ©orÃ¨me 2.4.1. *(**Théorème de Fubini**) L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un pavé (rectangle) $D = [a,b] \times [c,d]$ est égale à Â deux intégrales simples successives :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Remarque 2.1. ***Dans ce cas, l'ordre d'intégration n'est pas forcé.***

Exemple 2.4.1. *Calculer les intégrales suivantes*

1. *$I = \int\int_D (xy + y^2 + 1)dxdy$, pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \;\; et \;\; 0 \leq y \leq 3\}$.*

   Comme l'ordre d'intégration n'est pas important dans cette situation. Alors, nous commencons d'abord l'intégration par rapport à la variable y puis par rapport à x, ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\int\int_D (xy + y^2 + 1)dxdy &= \int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2 + 1)dydx = \int_1^2 \left[(\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + y) \right]_{y=0}^{y=3} dx \\ &= \int_1^2 (\frac{9}{2}x + 12)dx = \left[(\frac{9}{4}x^2 + 12x) \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= 33 - 12 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4}\end{aligned}$$

2. *Soit $D = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{xy}$. Calculons $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$.*

   on a

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 \left(\int_1^2 ye^{xy}dx \right) dy &= \int_0^2 \left[e^{xy} \right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^2 (e^{2y} - e^y)dy. \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2y} - e^y \right]_{y=0}^{x=2} = \frac{1}{4}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   ***Note** : En intégrant d'abord par rapport à x, le précédent calcul nous a pris juste deux lignes. Si nous commençons par intégrer d'abord par rapport à y, nous nous rendons vite compte que le calcul est moins évident. En effet $\int_1^2 \left(\int_0^2 ye^{xy}dy \right) dx$ nécessite une intégration par parties pour $\int_0^2 ye^{xy}dy$.*

$$\begin{aligned}\int_0^2 ye^{xy}dy &= \left[\frac{y}{x}e^{xy} - \frac{1}{x^2}e^{xy} \right]_{y=0}^{x=2} \\ &= e^{2y}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

   L'intégration de cette dernière expression nécessite manifestement encore une intégration par parties :

$$\int_1^2 e^{2x}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2}dx \;\; = \;\; \int_1^2 \frac{1}{x} 2 \times e^{2x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{2x}dx + \left[-\frac{1}{x} \right]_{y=1}^{x=2}.$$

   Une intégration par parties donne :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} 2 \times e^{2x}dx \;\; = \;\; \left[\frac{1}{x} \times e^{2x} \right]_{y=1}^{x=2} - \int_1^2 -\frac{1}{x^2} \times e^{2x}dx.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^2 e^{2x}\Big(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\Big)+\frac{1}{x^2}dx &= \Big[\frac{1}{x}\times e^{2x}\Big]_{y=1}^{x=2}+\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{y=1}^{x=2}\\ &= \frac{1}{2}e^4-e^2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Remarque 2.2. ***Il faut retenir que dans l'application du Théorème de Fubini, un choix judicieux de l'ordre d'intégration s'impose.***

Proposition 2.1. *Soient f, f_1 et f_2 trois fonctions continues ;*

$$\begin{aligned} f : D\subset\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto f(x,y)=f_1(x)\times f_2(y).\end{aligned}$$

Ici $D=[a,b]\times[c,d]$. Alors :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_{[a,b]\times[c,d]}(f_1(x)\times f_2(y))dxdy=\Big(\int_a^b f_1(x)dx\Big)\Big(\int_c^d f_2(y)dy\Big).$$

Exemple 2.4.2. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $I=\int\int_D 2x\sin y dxdy$, *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 1 \ \ et \ \ 0\le y\le\pi\}$.

   On peut remarquer facilement que la fonction f est bien à variables séparées (On peut séparer f en deux fonction indépendantes). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I=\int\int_{[0,1]\times[0,\pi]}2x\sin ydxdy &= \Big(\int_0^1 2xdx\Big)\Big(\int_0^\pi \sin ydy\Big)\\ &= \Big[x^2\Big]_0^1\Big[-\cos y\Big]_0^\pi=2.\end{aligned}$$

2. $J=\int\int_D \sin x\cos y dxdy$, *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le \frac{\pi}{2} \ \ et \ \ 0\le y\le\frac{\pi}{4}\}$.

   On peut remarquer facilement que la fonction f est bien à variables séparées (On peut séparer f en deux fonction indépendantes). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} J=\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]}\sin x\cos ydxdy &= \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos ydy\Big)\\ &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\sin y\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

2.4.1 Intégrale double sur une partie bornée et déformée de $\mathbb{R}^2$

Soit D une partie déformée de $\mathbb{R}^2$ incluse dans le pavé $[a,b]\times[c,d]$. Donc, la partie D peut se présenter sous l'une des formes suivantes :

Forme 1 *Domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites verticales* : Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur [a ;b].
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ \ et \ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$.

Forme 2 *Domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites horizontales* : Soient h_1 et h_2 deux fonctions continues sur [c ;d]. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \ \ et \ \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$.

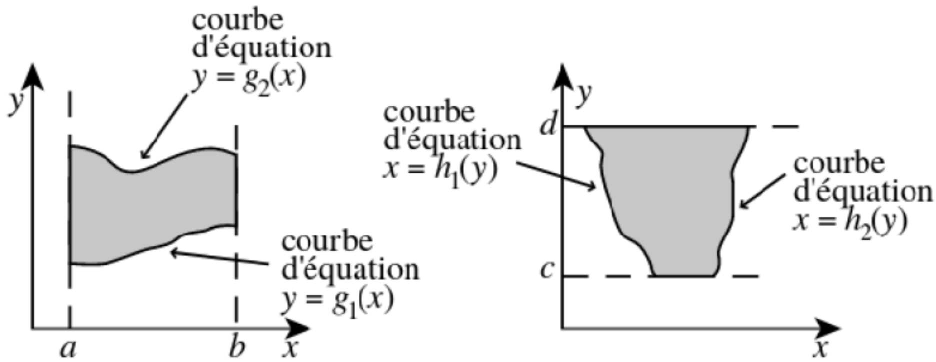
ThÃ©orÃ¨me 2.4.2. ***(Théorème de Fubini)*** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur D. Alors, on a*

1. *Si D s'écrit sous la* ***Forme 1*** *:*

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. *Si D s'écrit sous la* ***Forme 2*** *:*

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Exemple 2.4.3. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. *Soit D le domaine de R^2 compris entre les droites d'équations x =1, x=4 et les deux paraboles d'équations respectives $y = (x-2)^2 - 4$, $y = -(x-3)^2 + 4$. On considère sur D la fonction f définie par $f(x, y) = 3x - 2y + 1$. Nous allons calculer l'intégrale $I = \int \int_D f(x, y) dx dy$.*

   Posant $g_1(x) = (x-2)2 - 4$ et $g_2(x) = -(x-3)2 + 4$, on voit facilement que sur l'intervalle $[1, 4]$, on a $g_1 < g_2$ quel que soit x.

   $I = \int \int_D (3x - 2y + 1) dx dy$, pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 4 \ \ et \ \ (x-2)^2 - 4 \leq y \leq -(x-3)^2 + 4\}$.

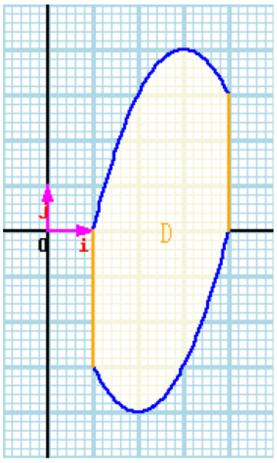


FIGURE 2.1 – $D = (x, y) \in R^2/1 \leq x \leq 4, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

*Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 1**. Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} I = \int\int_D (3x - 2y + 1)dxdy &= \int_1^4 \left(\int_{(x-2)^2-4}^{-(x-3)^2+4} (3x - 2y + 1)dy \right) dx \\ &= \int_1^4 \left[(3x + 1)y - y^2 \right]_{y=(x-2)^2-4}^{y=-(x-3)^2+4} dx \\ &= \int_1^4 (-2x^3 - 2x^2 + 55x - 30)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{55}{3}x^2 - 30x) \right]_1^4 = 153. \end{aligned}$$

2. *$II = \int\int_D \frac{1}{(x+y)^3} dxdy$, pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 1, \ y > 1 \ et \ x + y < 3\}$.*

On va essayer de trouver les bornes d'intégrations. On peut écrire le domaine d'intégration comme suivant :

cas 1 :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq y \leq 2 \ et \ 1 \leq x \leq 3 - y\}.$$

*Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 2**. Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} II = \int\int_D \frac{1}{(x+y)^3} dxdy &= \int_1^2 \left(\int_1^{3-y} \frac{1}{(x+y)^3} dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_{x=1}^{x=3-y} dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2(1+y)^2} - \frac{1}{18} \right) dy \\ &= \left[\left(\frac{1}{2(1+y)} - \frac{1}{18} y \right) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

cas 2 :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq x \leq 2 \ et \ 1 \leq y \leq 3 - x\}.$$

*Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 1**. Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
II = \int\int_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy &= \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{1}{(x+y)^3}dy\right)dx = \int_1^2 \left[\frac{-1}{2(x+y)^2}\right]_{y=1}^{y=3-x} dx \\
&= \int_1^2 (\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{18})dx \\
&= \left[(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{18}x)\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

2.4.2 Changement de variables

Les coordonnées cartésiennes (x ;y) ne sont pas toujours les plus adaptées au calcul d'une intégrale. On préfère parfois utiliser d'autres systèmes de coordonnées. Il est alors nécessaire d'exprimer dans ces systèmes de coordonnées les éléments de surface ou de volume.

Il existe des outils généraux, basés sur des calculs de dérivées partielles et de dé- terminant .

Soit $(\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ une bijection de classe C^1 de $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$. $\triangle$ porte sur (u,v) et D porte sur (x,y).
On a $D = \Phi(\triangle) \Leftrightarrow \triangle = \Phi^{-1}(D)$

On supposera en outre que les fonctions x et y admettent des dérivées partielles continues sur $\triangle$. On définira le Jacobien de l'application Φ par;

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{du} \end{pmatrix},$$

et

$$det(J) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{du} \end{vmatrix} = (\frac{dx}{du} \times \frac{dy}{du}) - (\frac{dy}{du} \times \frac{dx}{dv})$$

de plus et

$$\mid det(J) \mid = \mid \frac{dx}{du}\frac{dy}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dv} \mid$$

est la valeur absolue de déterminant du la matrice Jacobienne ne doit pas s'annuler sur $\triangle$ pour que l'application Φ soit inversible. Alors.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\triangle f(x(u,v), y(u,v)) \mid det(J) \mid dudv$$

Par la suite, nous présentons deux exemples différents qui montrent que le changement de variables est trés important dans les deux situations suivantes :

(1) le domaine D est délimitée par quatre droites.

(2) le domaine D est délimitée par des formes circulaires.

Cas 1 : La partie D est délimitée par quatre droites

Exemple 2.4.4. *Calculer*
$I = \int\int_D (x+2)^2 dxdy$, *pour* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x+y \leq 2 \ \ et \ \ -1 \leq x-y \leq 1\}$.
En utilisant le changement de variables suivant, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{u+v}{2} \\ v = \frac{u-v}{2}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, la matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{du} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

et

$$det(J) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}) - (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{-1}{2}$$

de plus

$$\mid det(J) \mid = \mid \frac{-1}{2} \mid = \frac{1}{2}.$$

Avec ce changement de variable, le nouveau domaine $\triangle$ s'écrit alors :

$$\triangle = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq u \leq 2 \ \ et \ \ -1 \leq v \leq 1\}.$$

La démarche du calcul de notre intégrale est :

$$\begin{aligned} I = \int\int_D (x+2)^2 dxdy &= \int\int_\triangle (\frac{u+v}{2} + 2)^2 \frac{1}{2} dudv = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (\frac{u+v}{2} + 2)^2 \frac{1}{2} du \right) dv \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3} (\frac{u+v}{2} + 2)^3 \right]_{u=-2}^{u=2} dv \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} ((\frac{v}{2} + 3)^3 - (\frac{v}{2} + 1)^3) dv \\ &= \left[\frac{1}{6} ((\frac{v}{2} + 3)^4 - (\frac{v}{2} + 1)^4) \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{6} ((\frac{7}{2})^4 - (\frac{3}{2})^4 - (\frac{5}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4) = \frac{53}{3}. \end{aligned}$$

Cas 2 : Coordonnées polaires

Lorsque le domaine D est délimitée par des formes circulaires, cela nous permet d'utiliser les coordonnées polaires comme changement de variable. Pour cela, on considère les variables suivantes :

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y = y(r,\theta) = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Comme rappel, notons qu'un point $M = (x, y)$ est caractérisé par :

— sa distance à l'origine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(r \geq 0)$

— et son angle $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ (d'une manière générale $0 \leq \theta < 2\pi$).

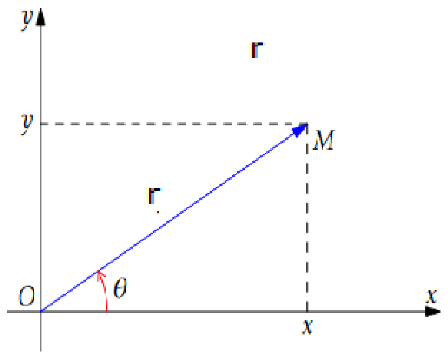


FIGURE 2.2 – Coordonnées polaire

En utilisant les coordonnées polaires, la matrice Jacobienne s'écrit souvent :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow det(J) = r.$$

Par conséquent, on a :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) rdrd\theta,$$

Exemple 2.4.5. *Calculer en utilisant le changement de variables (les coordonnées polaires) :*

1. $I = \int\int_D y^2 dxdy$, *en utilisant les coordonnées polaires, avec*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Le passage en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \end{cases}$$

donne immédiatement

$$I = \int\int_D y^2 dxdy = \int\int_\Delta (r\sin(\theta))^2 rdrd\theta = \int\int_\Delta r^3 \sin(\theta)^2 drd\theta,$$

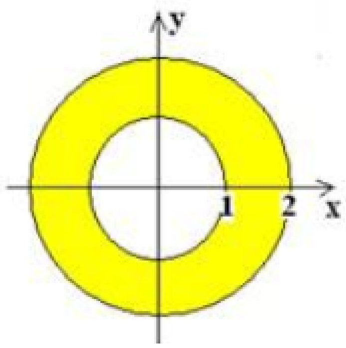


FIGURE 2.3 – Domaine d'integration

avec le domaine

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq r \leq 2 \textit{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

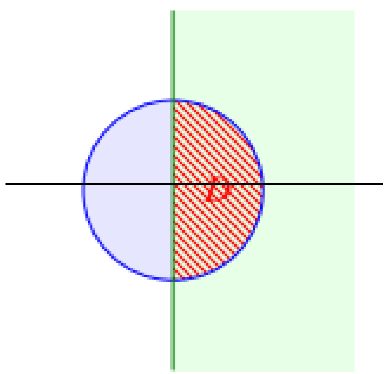
Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\int\int_{\Delta} dr d\theta = \int_1^2 r^3 dr \times \int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2 d\theta &= \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=1}^{r=2} \times \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{15}{4} + \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \frac{15}{4}\pi.\end{aligned}$$

Exemple 2.4.6. *Calculer en utilisant le changement de variables (les coordonnées polaires) :*

1. $I = \int\int_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dxdy$, *en utilisant les coordonnées polaires, avec*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \textit{ et } x \geq 0\}.$$



Le passage en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \end{cases}$$

donne immédiatement

$$\begin{aligned} I = \int\int_D \frac{x}{1+x^2+y^2}dxdy &= \int\int_\Delta \frac{r\cos\theta}{1+r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}rdrd\theta \\ &= \int\int_\Delta \frac{r^2}{1+r^2}\cos\theta drd\theta. \end{aligned}$$

avec le domaine

$$\Delta = \big\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 | 0\le r\le 1 \text{ et } \frac{-\pi}{2}\le\theta<\frac{-\pi}{2}\big\}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \int\int_\Delta \frac{r^2}{1+r^2}\cos\theta drd\theta &= \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}dr\times\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^1 1-\frac{1}{1+r^2}dr\times\Big[\sin\theta\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\Big[r-\arctan r\Big]_{r=0}^{r=1} = 2-\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. $II = \int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, *en utilisant les coordonnées polaires, avec*

$$D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le 1\big\}.$$

Le passage en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \end{cases}$$

donne immédiatement

$$II = \int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy == \int\int_\Delta \sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}rdrd\theta = \int\int_\Delta r^2drd\theta,$$

avec le domaine

$$\Delta = \big\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]/0\le r\le 1 \text{ et } 0\le\theta<2\pi\big\}.$$

Finalement, on obtient

$$\int\int_\Delta r^2drd\theta = \int_0^1 r^2dr\times\int_0^{2\pi}1d\theta = \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1}\times\Big[\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

2.5 Exercices corrigés sur les intégrales doubles

Exemple 2.1. *Calculer l'intégrale double suivante :*

1. $I = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ *lorsque :*

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0 \ \ et \ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 2 \ \ et \ \ -y \leq x \leq y\}$.

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 3 \ \ et \ \ y \geq 0\}$.

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0 \ \ et \ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

   Ici, le domaine est un carré, il est possible de séparer les variables :

$$\begin{aligned}
I = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy &= \int\int_D x^2 dxdy + \int\int_D y^2 dxdy \\
&= \left(\int_{-1}^{0} x^2 dx\right)\left(\int_{-1}^{0} dy\right) + \left(\int_{0}^{1} y^2 dy\right)\left(\int_{0}^{1} dx\right) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} \left[y\right]_{0}^{1} + \left[x\right]_{-1}^{0} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 2 \ \ et \ \ -y \leq x \leq y\}$.

   *Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 2** (nous intégrons d'abord par rapport à x puis par rapport à y). Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
I = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} (x^2+y^2)dx\right)dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=-y}^{x=y} dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(-y)^3}{3} - y^2(-y)\right)dy = \frac{8}{3}\int_0^2 y^3 dy = \frac{8}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 3 \ \ et \ \ y \geq 0\}$. *en utilisant les coordonnées polaires. Le passage en coordonnées polaires donne immédiatement*

$$I = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int\int_\Delta r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) r dr d\theta = \int\int_\Delta r^3 dr d\theta,$$

avec le domaine

$$\Delta = \big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi]/ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq \sqrt{3} \; et \; \frac{-\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}\big\}.$$

Finalement, on obtient

$$\int\int_\Delta r^3 dr d\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{3}} r^3 dr \times \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{r=\sqrt{3}} \times \Big[\theta\Big]_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{35\pi}{16}.$$

Exemple 2.2. *Calculer les intégrales doubles suivantes :*

1. $I = \int\int_D (xy+y^2)dxdy$, *pour* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 \;\; et \;\; 0 \leq y \leq 1\}$.

   Comme l'ordre d'intégration n'est pas important dans cette situation. Alors, nous commencons d'abord l'intégration par rapport à la variable y puis par rapport à x :

$$\begin{aligned} I = \int\int_D (xy+y^2)dxdy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 (xy+y^2)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3})\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^{1}(\frac{x}{2}+\frac{1}{3})dx = \left[(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{3}x)\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   et si nous commencons l'intégration par rapport à la variable x puis par rapport à y :

$$\begin{aligned} I = \int\int_D (xy+y^2)dxdy &= \int_{0}^{1}\left(\int_{-1}^1 (xy+y^2)dx\right)dy = \int_{0}^{1}\left[(\frac{x^2}{2}y+y^2x)\right]_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_{0}^{1}(2y^2)dx = \left[(2\frac{y^3}{3})\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. $I = \int\int_D (x^2+3y)dxdy$, *pour* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \;\; et \;\; 0 \leq y \leq 1\}$.

   Comme l'ordre d'intégration n'est pas important dans cette situation. Alors, nous commencons d'abord l'intégration par rapport à la variable y puis par rapport à x :

$$\begin{aligned} I = \int\int_D (x^2+3y)dxdy &= \int_{0}^{1}\left(\int_0^1 (x^2+3y)dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left[(x^2y+\frac{3}{2}y^2)\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{0}^{1}(x^2+\frac{3}{2})dx = \left[(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x)\right]_{0}^{1} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

3. $= \int\int_D \sin(x+y)dxdy$, *pour* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;\; et \;\; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

   Comme l'ordre d'intégration n'est pas important dans cette situation. Alors, nous commencons d'abord l'in-

tégration par rapport à la variable y puis par rapport à x :

$$\begin{aligned} I=\int\int_D \sin(x+y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy\Big)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x))dx \\ &= \Big[-\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2. \end{aligned}$$

4. $I=\int\int_D xydxdy$, *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1\ \ et\ \ 0\leq y\leq 1\}$.

   On peut remarquer facilement que la fonction $f(x,y)=xy$ est bien à variables séparées (On peut séparer f en deux fonction indépendantes). Ce qui donne :

$$I=\int\int_{[0,1]\times[0,1]} xydxdy = \Big(\int_0^1 xdx\Big)\Big(\int_0^1 ydy\Big)=\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{4}.$$

Exemple 2.3. *Calculer les intégrales doubles*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy,$$

où f et D sont donnés comme suit

1. $f(x,y)=x^2+y^2$ *et D étant defini par les conditions :* $0\leq x\leq 1$ *et* $0\leq y\leq x$.
2. $f(x,y)=y^3$ *et* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\geq 0$ *et* $x^2\leq y\leq 1\}$.

Corrigé

1. $\int\int_D(x^2+y^2)dxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leq x\leq 1$ *et* $0\leq y\leq x\}$.

   *Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 1** (nous intégrons d'abord par rapport à y puis par rapport à x).*

   Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I=\int\int_D(x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1\Big(\int_0^x(x^2+y^2)dy\Big)dx=\int_0^1\Big[(x^2y+\frac{y^3}{3})\Big]_{y=0}^{y=x}dx \\ &= \int_0^1(4\frac{x^3}{3})dx=\Big[(\frac{x^4}{3})\Big]_0^1=\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. $\int\int_D y^3dxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\geq 0$ *et* $x^2\leq y\leq 1\}$ = $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\leq x\leq 1$ *et* $x^2\leq y\leq 1\}$.

   *Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 1** (nous intégrons d'abord par rapport à y puis par rapport à x).*

Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I=\int\int_D y^3dxdy &= \int_0^1\Big(\int_{x^2}^1 y^3dy\Big)dx=\int_0^1\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=x^2}^{y=1}dx \\ &= \int_0^1(\frac{1}{4}-\frac{x^8}{4})dx=\left[(\frac{1}{4}x-\frac{x^9}{36})\right]_0^1=\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Exemple 2.4. *Calculer*

1. $\int\int_D(x^2+\frac{1}{y})dxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/xy\geq 1, xy\leq 2, y\geq 1, y\leq 4\}$.

   Corrigé*,on a le domaine* D *s'écrit*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/1\leq y\leq 4, \frac{1}{y}\leq x\leq\frac{2}{y}\}$$

   comme le domaine D *s'écrit sous la* ***Forme 2*** *(nous intégrons d'abord par rapport à* x *puis par rapport à* y*).*

   Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I=\int\int_D(x^2+\frac{1}{y})dxdy &= \int_1^4\Big(\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{2}{y}}(x^2+\frac{1}{y})dx\Big)dy=\int_1^4\left[(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{y}x)\right]_{x=\frac{1}{y}}^{x=\frac{2}{y}}dy \\ &= \int_1^4(\frac{7}{3y^3}+\frac{1}{y^2})dy=\left[(\frac{-7}{12y^4}+\frac{-1}{2y^2})\right]_1^4=\frac{59}{32}. \end{aligned}$$

2. $\int\int_D dxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq\pi, \sin x\leq y\leq\cos x\}$.

   comme le domaine D *s'écrit sous la* ***Forme 1*** *(nous intégrons d'abord par rapport à* y *puis par rapport à* x*).*

   Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I=\int\int_D dxdy &= \int_0^\pi\Big(\int_{\sin x}^{\cos x}dy\Big)dx=\int_0^\pi\Big[1\Big]_{y=\sin x}^{y=\cos x}dx \\ &= \int_0^\pi\cos x-\sin x dx=\Big[(\sin x+\cos x)\Big]_0^\pi=-2. \end{aligned}$$

3. $\int\int_D ydxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0, y\geq 0, x+2y\leq 3\}$.

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0, y\geq 0, x+2y\leq 3\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq, y\geq, x+2y\leq 3\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 3-2y, y\geq 0 \ \ et \ \ 3-2y\geq 0\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq y\leq\frac{3}{2}, 0\leq x\leq 3-2y\} \end{aligned}$$

*Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 2** (nous intégrons d'abord par rapport à x puis par rapport à y). Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} I=\int\int_D ydxdy &= \int_0^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^{3-2y} ydx\right)dy=\int_0^{\frac{3}{2}}\Big[yx\Big]_{x=0}^{x=3-2y}dy \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}}(3y-2y^2)dy=\Big[(3\frac{y^2}{2}-2\frac{y^3}{3})\Big]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

*On peut aussi utiliser la **forme 1**, dont le domaine est donné par*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq\frac{3-x}{2}\}.$$

4. $\int\int_D ydxdy$ *pour* $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2\leq 4x, x+y\leq 3\}$.

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2\leq 4x, x+y\leq 3\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\frac{y^2}{4}\leq x\leq 3-y \ \ et \ \ \frac{y^2}{4}\leq x\leq 3-y\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-6\leq y\leq 2, \frac{y^2}{4}\leq x\leq 3-y\} \end{aligned}$$

*Comme le domaine D s'écrit sous la **Forme 2** (nous intégrons d'abord par rapport à x puis par rapport à y). Donc, notre intégrale se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} I=\int\int_D ydxdy &= \int_{-6}^{2}\left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} ydx\right)dy=\int_{-6}^{2}\Big[yx\Big]_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=3-y}dy \\ &= \int_{-6}^{2}3y-y^2-\frac{y^3}{4}dy=\Big[3\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{16}\Big]_{-6}^{2}=\frac{-128}{3}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

INTÉGRALES TRIPLES

Dans cette section, nous définissons l'intégrale triple d'une fonction à trois variables $f(x, y, z)$ sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Par la suite, nous présentons le calcul pratique des intégrales triples. Enfin, nous expliquons les deux changements de variables essentiels, à savoir : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

Soit V une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$ et soit

$$\begin{aligned} f : V \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) \end{aligned}$$

une fonction à trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur le domaine V. Donc l'intégrale triple de f sur V est donnée par :

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz.$$

3.1 Propriétés de l'intégrale triple

1. **Volume**(V) : Si $f(x, y, z) = 1$, alors :

$$Volume(V) = \int\int\int_V dxdydz.$$

2. **Positivité** : Si $f(x, y, z) \geq 0$ pour $(x, y, z) \in V$, alors :

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz \geq 0.$$

3. **Linéearité** : Soient f et g deux fonctions à trois variables qui sont intégrables sur V et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\int\int\int_V \Big[\lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z)\Big] dxdydz &= \lambda \int\int\int_{V_1} f(x,y,z)dxdydz \\ &+ \mu \int\int\int_{V_2} g(x,y,z)dxdydz.\end{aligned}$$

4. **Relation de Chasles** : Si $V = V_1 \cup V2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, (V_1 et V_2 deux domaines qui sont disjoints, i.e., Volume$(V_1 \cap V_2) = 0$, alors :

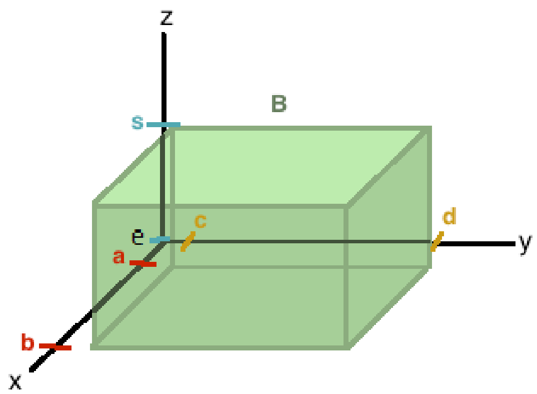
$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \int\int\int_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

3.2 Méthodes de calcul des intégrales triples

Il sâgit ici de généraliser les résultats du chapitre précédent, et nous présentons le calcul pratique des intégrales triples sur plusieurs parties de différentes formes.

3.2.1 Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,s], avec\, a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ s \in \mathbb{R}$ un parallélépipède fermé du plan R^3 dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Par définition, $V = \{(x,y,z) \in R^3/a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq s\}$.



ThÃ©orÃ¨me 3.2.1. *(**Théorème de Fubini**) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le parallélépipède $V = [a,b] \times [c,d] \times$*

$[e, s]$, *avec* $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ s \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^s f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_a^b \left(\int_e^s \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^s f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy \\
&= \int_c^d \left(\int_e^s \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy \\
&= \int_e^s \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dx\right)dz \\
&= \int_e^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1. *Important : Ici l'ordre d'intégration n'est pas forcé. Cependant, on peut choisir l'ordre qui peut nous faciliter d'avantage les calculs mathématiques.*

Exemple 3.2.1. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $I = \int\int\int_V (3x + y + 2z)dxdydz$, *pour*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Rappelons que l'ordre d'intégration ici n'est pas important. Par exemple, nous commençons d'abord l'intégration par rapport à la variable z, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I = \int\int\int_V (3x+y+2z)dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (3x+y+2z)dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[(3xz + yz + z^2)\right]_{z=0}^{z=1} dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (3x+y+1)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left[(3xy + \frac{1}{2}y^2 + y)\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left(3x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{x=0}^{x=1} = 3.
\end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Soientt f, f_1, f_2 et f_3 quatre fonctions continues ;*

$$\begin{aligned}
f : V \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\
(x,y,z) &\mapsto f(x,y,z) = f_1(x) \times f_2(y) \times f_3(z).
\end{aligned}$$

Ici $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,s]$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,s]} f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x)dxdydz \\
&= \left(\int_a^b f_1(x)dx\right) \times \left(\int_c^d f_2(y)dy\right) \times \left(\int_e^s f_3(z)dz\right).
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $I = \int\int\int_V x^2yzdxdydz$, *pour*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/0 \le x \le 1,\ \ 1 \le y \le 2 \text{ et } 0 \le z \le 2\big\}.$$

On peut remarquer facilement que la fonction f est bien à variables séparées (On peut séparer f en trois fonction indépendantes). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I = \int\int\int_V x^2yzdxdydz &= \left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_1^2 ydy\right)\left(\int_0^2 zdz\right) \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} \times \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=2} \times \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{y=0}^{y=2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. $II = \int\int\int_V xe^{x^2}\sin(y)\cos(z)dxdydz$, *pour*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \le z \le \frac{\pi}{4}\big\}.$$

On peut remarquer facilement que la fonction f est bien à variables séparées (On peut séparer f en trois fonction indépendantes). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} II = \int\int\int_V xe^{x^2}\sin(y)\cos(z)dxdydz &= \left(\int_0^1 xe^{x^2}dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(y)dy\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(z)dz\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} \times \Big[-\cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \times \Big[\sin(z)\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}(e-1)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{(e-1)(2\sqrt{2}-2)}{8}. \end{aligned}$$

3.2.2 Intégrale triple sur une partie bornée et déformée de $\mathbb{R}^3$

ThÃ©orÃ¨me 3.2.2. *(**Théorème de Fubini**) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue sur V, une partie déformée de $\mathbb{R}^3$ incluse dans le pavé $[a,b] \times [c,d] \times [e,s]$.*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D \text{ et } u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\big\}$$

où D est un domaine du plan, u_1 et u_2 sont des fonctions continues sur D. Alors

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdy = \int\int_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

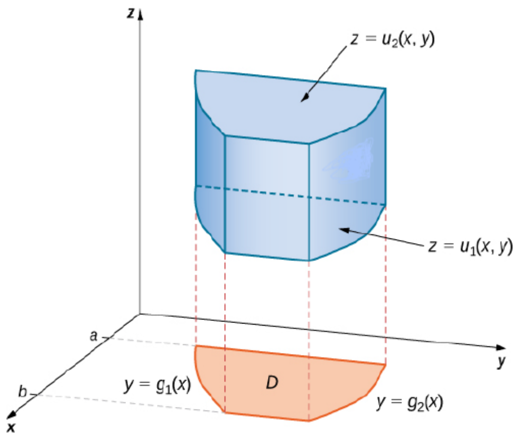
Remarque 3.2. *D est la projection orthogonale de V sur le plan (xOy).*

1. *Si* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ *(type 1), alors*

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\right\}$$

et

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

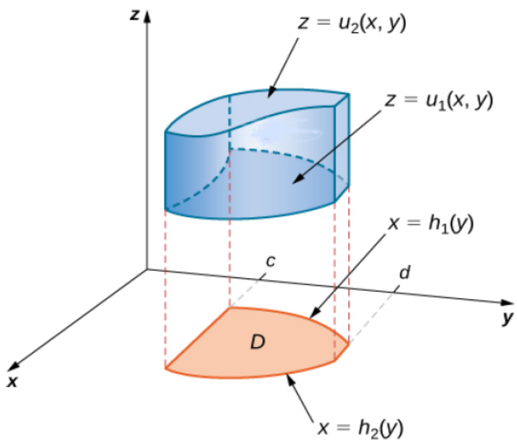


2. *Si* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ *(type 2), alors*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\right\}$$

et

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dx\right) dy.$$



ThÃ©orÃ¨me 3.2.3. ***(Théorème de Fubini en tranches (ou couches))*** *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continue sur* V*,une partie déformée de* $\mathbb{R}^3$ *incluse dans le pavé* $[a,b] \times [c,d] \times [e,s]$.

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | e \leq z \leq s \text{ et } (x,y) \in D_z\right\}$$

.

où pour tout z *; la tranche* $D_z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | (x;y;z) \in V\}$ *est un domaine régulier du plan.*

Alors

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdy = \int_e^s \left(\int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right) dz.$$

Exemple 3.2.3.

1. *Calculer* $\int\int\int_V 2xyzdxdydz$*, où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq z, \text{ et } 0 \leq x \leq y\right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V 2xyzdxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y 2xyzdx\right) dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z \left[(yzx^2)\right]_{x=0}^{x=y} dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z (zy^3) dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left[(\frac{zy^4}{4})\right]_{y=0}^{y=z} dz \\
&= \int_0^1 (\frac{z^5}{4}) dz \\
&= \left[(\frac{z^6}{24})\right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

2. *Calculer* $\int\int\int_V 2xydxdydz$*, où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x,\ \ \textit{et}\ \ 0 \le z \le x+y\right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V 2xydxdydz &= \int_0^1 \left(\int_x^{2x} \left(\int_0^{x+y} 2xydz\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^{2x} \left[(2xyz)\right]_{z=0}^{z=x+y} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^{2x} 2xy(x+y) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^{2x} (2yx^2 + 2xy^2) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[(y^2x^2 + \frac{2}{3}xy^3)\right]_{y=x}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^1 (4x^4 + \frac{16}{3}x^4) - (x^3 + \frac{2}{3}x^4) dx \\
&= \int_0^1 (\frac{23}{3}x^4) dx \\
&= \left[(\frac{23}{15}x^5)\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{23}{15}.
\end{aligned}$$

3. *Calculer le volume de* V*, où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 0 \le z \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{9-z^2},\ \ \textit{et}\ \ 0 \le x \le 2y\right\}.$$

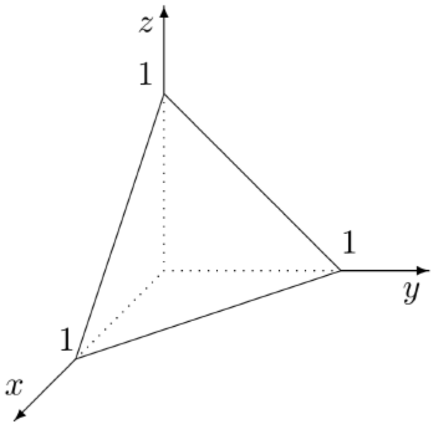
On a

$$\begin{aligned}
Volume(V) &= \int\int\int_V 2xyzdxdydz \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-z^2}} \left(\int_0^{2y} 1dx\right) dy\right) dz \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-z^2}} \Big[x\Big]_{x=0}^{x=2y} dy\right) dz \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-z^2}} 2ydy\right) dz \\
&= \int_0^3 \Big[y^2\Big]_{y=0}^{y=\sqrt{9-z^2}} dz \\
&= \int_0^3 (9-z^2)dz \\
&= \left[(9z - \frac{z^3}{3})\right]_{z=0}^{z=3} \\
&= 18.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.4. *Calculer*

1. $\int\int\int_V dxdydz$*, où*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0 \;\textit{ et }\; x+y+z \leq 1\big\}.$$



Dans cette situation, le calcul peut se faire de deux manières différentes :

— Soit V *s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
V &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0 \;\textit{ et }\; x+y+z \leq 1\big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\; 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1-x \;\textit{ et }\; 0 \leq z \leq 1-x-y\big\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, notre intégrale s'écrit

$$\int\int\int_V dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dxdy,$$

avec,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Le calcul final donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dxdy &= \int\int_D \Big[z\Big]_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy \\
&= \int\int_D (1-x-y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[(y - xy - \frac{1}{2}y^2)\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 ((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

— *Soit V s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \ \textit{ et } \ x+y+z \leq 1\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq 1 \ \textit{ et } \ (x,y) \in D_z\},
\end{aligned}$$

avec

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x+y \leq 1-z\}.$$

Finalement, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int\int_{D_z} dxdy\right) dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-x} dy\right) dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \Big[y\Big]_{y=0}^{y=1-z-x} dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x)dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left[x - zx - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1-z} dz \\
&= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\
&= \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

—

3.2.3 Changement de variables

Dans plusieurs situations le calcul de $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ s'avère très difficile. Afin de bien faciliter les calculs, on peut utiliser un changement de variables adéquat pour calculer cette intégrale $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$. Dans le cas, le changement de variables est donné comme suit :

$$(x,y,z) = h(u,v,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)),$$

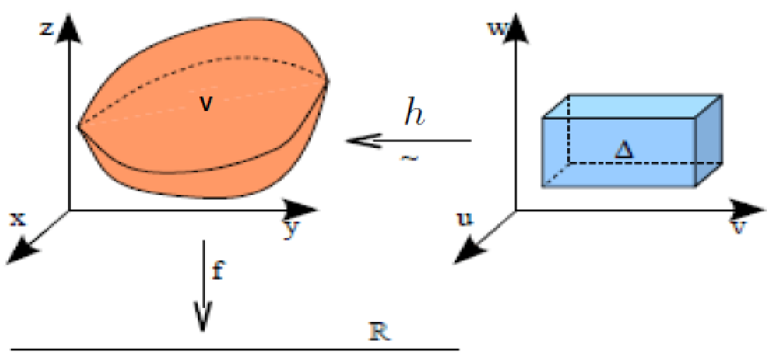
où h est une bijection et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Delta = h^{-1}(V)$. Alors, on a

$$\int\int\int_V f(x,y)dxdydz = \int\int\int_\Delta f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J_h|dudvdw,$$

où J est la matrice Jacobienne donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

et $|J_h|$ est la valeur absolue du Jacobien (déterminant de J) qui ne doit pas s'annuler sur Δ.

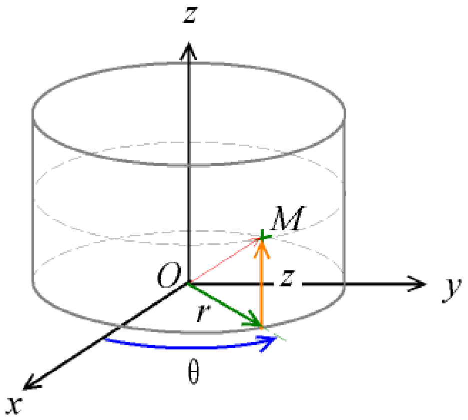


Maintenant, nous présentons deux variantes de changement de variables qui sont très importantes, à savoir, **les coordonnées cylindriques** et **les coordonnées sphériques**.

Changement 1 : Coordonnées cylindriques

On considère le changement de variables (coordonnées cylindriques) :

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos(\theta), \\ y = y(r,\theta) = r\sin(\theta), \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}), \\ z = z. \end{cases}$$



Notons qu'un point $M = (x, y, z)$ est caractérisé par la $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(r \geq 0)$, l'angle $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ avec $r \neq 0$ (en général $0 \leq \theta < 2\pi$), en projetant M sur le plan xOy, et par la hauteur $z = z$ $(z \in \mathbb{R})$.

En utilisant les coordonnées cylindriques, la matrice Jacobienne associée est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = |det(J)| = r.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz &= \int\int\int_\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, |J| drd\theta dz \\ &= \int\int\int_\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, rdrd\theta dz, \end{aligned}$$

où $\Delta = h^{-1}(V)$.

Exemple 3.2.5. *Claculer (en utilisant les coordonnées cylindriques)*

1. $\int\int\int_V zdxdydz$, *où*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1 \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

On pose,

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r\cos(\theta), \\ y = y(r, \theta) = r\sin(\theta), \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}), \\ z = z \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

avec

$$dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Le passage en coordonnées cylindriques donne immédiatement

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz,$$

avec

$$\Delta = \big\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ et } 0 \leq z \leq 1\big\}.$$

Cela donne le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} zrdz\right)drd\theta \\
&= \int_0^1 rdr \times \int_0^1 zdz \times \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1} \times \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=1} \times \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\pi \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2. $\int\int\int_V zdxdydz$, *où*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - (x^2+y^2)\big\}.$$

Le passage en coordonnées cylindriques donne immédiatement

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz,$$

avec

$$\Delta = \big\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - r^2\big\}.$$

Cela donne le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\int_0^1 zrdz\right)drd\theta \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} rzdz\right)dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \int_0^1 \left[\frac{r}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-r^2} dr \times \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \pi\int_0^1 r(1-r^2)^2 dr \\
&= \left[-\frac{\pi}{6}(1-r^2)^3\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

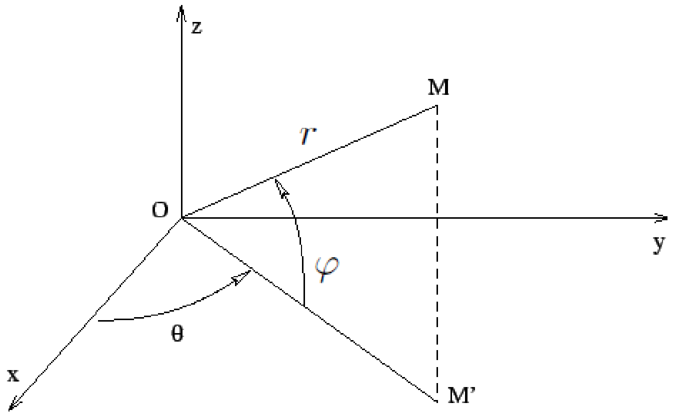
Changement 2 : Coordonnées sphériques

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos(\theta)\cos(\varphi), \\ y = y(r,\theta) = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ z = r\sin(\varphi), \end{cases}$$

Notons qu'un point $M = (x, y, z)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \text{sa distance à l'origine} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}(r \geq 0), \\ \text{sa longitude} \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \\ \text{sa latitude} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



Dans ce cas, la matrice Jacobienne, en utilisant les coordonnées sphériques, est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est donné par

$$|det(J)| = |J| = r^2\cos(\varphi).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} & \int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz \\ = & \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)|J_h|drd\theta d\varphi \\ = & \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi, \end{aligned}$$

où $\Delta = h^{-1}(V)$.

Exemple 3.2.6. *Calculer en utilisant coordonnées sphériques l'intégrales triples suivantes*

1. $\int\int\int_V dxdydz$, *avec*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

En passant aux coordonnées sphériques, on obtient

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int\int_\Delta r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi,$$

avec

$$\Delta = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq r \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \ \textit{et} \ \ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Delta r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi \\
&= \int_1^2 r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \\
&= \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{r=1}^{r=2} \times \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \times \left[\sin(\varphi)\right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{7}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{28\pi}{3}.
\end{aligned}$$

3.3 Exercices corrigés sur les intégrales triples

Exercice 3.1. **I.** *Calculer l'intégrale triple suivante :*

$$II_1 = \int\int\int_{V_1} (x+1)\cos(z)dxdydz, \quad avec \quad V_1 = [0,1]\times[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}].$$

II. *Calculer l'intégrale triple suivante :*

$$II_2 = \int\int\int_{V_2} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$$

où

$$V_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0,\ \ x+y+z\leq 1\}.$$

***Corrigé**,*

I. *Calculer l'intégrale triple suivante :*

$$II_1 = \int\int\int_{V_1} (x+1)\cos(z)dxdydz,$$

où

$$\begin{aligned} V_1 &= [0,1]\times[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}] \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq 2,\ \ 0\leq z\leq\frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} II_1 &= \int\int\int_{V_1} (x+1)\cos(z)dxdydz \\ &= \left(\int_0^1 (x+1)dx\right)\times\left(\int_0^2 1dy\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z)dz\right) \\ &= \left[(\frac{x^2}{2}+x)\right]_{x=0}^{x=1}\times\Big[y\Big]_{y=0}^{y=2}\times\Big[\sin(z)\Big]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{2}\times 2\times 1 = 3. \end{aligned}$$

II. *Calculer l'intégrale triple suivante :*

$$II_2 = \int\int\int_{V_2} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$$

où

$$V_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0,\ \ x+y+z\leq 1\}.$$

*Dans cette situation, le calcul peut se faire de deux manières différentes : Soit en utilisant la **Forme 1** ou bien en utilisant la **Forme 2**.*

— *Utilisons la **Forme 1**. L'idée est d'écrire V sous cette forme :*

$$\begin{aligned} V_2 &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \textit{ et }\ x+y+z\leq 1\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \textit{ et }\ z\leq 1-x-y\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0,\ y\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq 1-x-y\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0,\ y\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ y\leq 1-x\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ 0\leq 1-x\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ x\leq 1\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\big\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, notre intégrale s'écrit

$$II_2 = \int\int\int_{V_2} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz\right) dxdy,$$

avec,

$$D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\big\}.$$

Le calcul final donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} II_2 = \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dz\right) dxdy &= \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z+1)^{-3} dz\right) dxdy \\ &= \int\int_D \left[\frac{1}{-2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy \\ &= \int\int_D (\frac{-1}{8} + \frac{(x+y+1)^{-2}}{2}) dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (\frac{-1}{8} + \frac{(x+y+1)^{-2}}{2}) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(\frac{-y}{8} - \frac{(x+y+1)^{-1}}{2})\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 (\frac{-(1-x)}{8} - \frac{1}{4}) - (0 - \frac{(x+1)^{-1}}{2}) dx \\ &= \int_0^1 (\frac{(x-1)}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}) dx \\ &= \left[(\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\ln|x+1|)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Exemple 3.1. *Calculer les volumes des domaines V délimité par les surfaces d'équations :*

1. *Calculer l'intégrale triple*
$$III = \int\int\int_V \cos(x+y-z)dxdydz$$
avec $V = [0, \frac{\pi}{2}]^3$. *On a*

$$\begin{aligned}
III &= \int\int\int_V \cos(x+y-z)dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y-z)dx\right)dy\right)dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+y-z)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}dy\right)dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(y-z+\frac{\pi}{2})-\sin(y-z))dy\right)dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(-\cos(y-z+\frac{\pi}{2})+\cos(y-z))\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(\pi-z)+\cos(\frac{\pi}{2}-z))-(-\cos(\frac{\pi}{2}-z)+\cos(-z))dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(\pi-z)+2\cos(\frac{\pi}{2}-z)-\cos(-z))dz \\
&= \left[(\sin(\pi-z)-2\sin(\frac{\pi}{2}-z)+\sin(-z))\right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \\
&= (\sin(\pi-\frac{\pi}{2})-2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})+\sin(-\frac{\pi}{2}))-(\sin(\pi-0)-2\sin(\frac{\pi}{2}-0)+\sin(0)) \\
&= (1-0-1)-(0-2+0) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

2. *Calculer l'intégrale triple*
$$\int\int\int_V e^x dxdydz$$

où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq x \leq y,\ \ 0 \leq z \leq x+y\}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V e^x dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_0^{x+y} e^x dz\right) dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y \Big[e^x z\Big]_{z=0}^{z=x+y} dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y (x+y)e^x dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y (x+y)e^x dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \Big[((x+y)e^x - e^x)\Big]_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1 \Big[(x+y-1)e^x\Big]_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1 (2y-1)e^y + (1-y)dy \\
&= \int_0^1 (2y-1)e^y dy + \int_0^1 (1-y)dy \\
&= \Big[(2y-1)e^y - 2e^y\Big]_{y=0}^{y=1} + \Big[(y - \frac{y^2}{2})\Big]_{y=0}^{y=1} \\
&= \Big[(2y-3)e^y\Big]_{y=0}^{y=1} + \Big[(y - \frac{y^2}{2})\Big]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{7}{2} - e.
\end{aligned}$$

3. *Calculer l'intégrale triple*

$$\int\int\int_V (x+y+z)^2 dxdydz$$

où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ \ x+y+z \leq 1\}$.

Dans cette situation, le calcul peut se faire de deux manières différentes : Soit en utilisant la ***Forme 1*** *ou bien en utilisant la* ***Forme 2***.

Utilisons la ***Forme 1****. L'idée est d'écrire* V *sous cette forme :*

$$\begin{aligned}
V &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \textit{ et }\ x+y+z\leq 1\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \textit{ et }\ z\leq 1-x-y\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0,\ y\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq 1-x-y\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0,\ y\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ y\leq 1-x\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ 0\leq 1-x\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x\geq 0\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\ \textit{ et }\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ x\leq 1\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\ \textit{ et }\ 0\leq z\leq 1-x-y\big\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, notre intégrale s'écrit

$$\int\int\int_V (x+y+z)^2 dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y}(x+y+z)^2 dz\right) dxdy,$$

avec,

$$D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\big\}.$$

Le calcul final donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\int_0^{1-x-y}(x+y+z)^2 dz\right) dxdy &= \int\int_D \left[\frac{1}{3}(x+y+z)^3\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy\\
&= \int\int_D (\frac{1}{3}-\frac{(x+y)^3}{3})dxdy\\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(\frac{1}{3}-\frac{(x+y)^3}{3})dy\right)dx\\
&= \int_0^4 \left[(\frac{y}{3}-\frac{(x+y)^4}{12})\right]_{y=0}^{y=1-x} dx\\
&= \int_0^4 (\frac{(1-x)}{3}-\frac{1}{12})-(0-\frac{x^4}{12})dx\\
&= \int_0^4 (\frac{(1-x)}{3}-\frac{1}{12}+\frac{x^4}{12})dx\\
&= \left[(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x^5}{60})\right]_{x=0}^{x=1} = (\frac{1}{10}).
\end{aligned}$$

4. $x^2+y^2\leq 1$ *et* $x^2+z^2=1$.

On a

$$\begin{aligned}
V &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2\leq 1,\ \ x^2+z^2\leq 1\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/-\sqrt{1-x^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2},\ \ 1-x^2\geq 0,\ \ x^2+y^2\leq 1\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/-\sqrt{1-x^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2},\ \ -1\leq x\leq 1,\ \ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\big\}\\
&= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/-\sqrt{1-x^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2},\ \ (x,y)\in D\big\},
\end{aligned}$$

avec

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\}.$$

Donc

$$volume(V)=\int\int\int_V 1dxdydz \quad = \quad \int\int_D\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz\right)dxdy=\int\int_D\left(2\sqrt{1-x^2}\right)dxdy$$

de plus pour

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\},$$

on a

$$\begin{aligned}\int\int_D\left(2\sqrt{1-x^2}\right)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}2\sqrt{1-x^2}dydx\\ &= \int_{-1}^{1}\left[2\sqrt{1-x^2}y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \int_{-1}^{1}4(1-x^2)dx\\ &= \left[4(x-\frac{x^3}{3})\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

5. $z=x^2+y^2$ *et* $z=8-x^2-y^2$.

Soit

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z\ge x^2+y^2,\ z\le 8-x^2-y^2\}.$$

Le changement de variables en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ x=r\sin\theta\\ z=z,\end{cases}\quad avec\quad\begin{cases}r=\sqrt{x^2-y^2}\in\mathbb{R}^+,\\ \theta=\arctan(\frac{y}{x})\in[0,2\pi[,\\ z=z\in\mathbb{R},\end{cases}$$

Le domaine V *devient*

$$\begin{aligned}V &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z\ge x^2+y^2,\ z\le 8-x^2-y^2\}\\ &= \{(r,\theta,z)\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}/z\ge r^2,\ z\le 8-r^2\}\\ &= \{(r,\theta,z)\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}/r^2\le z\le 8-r^2,\ et\ r^2\le 8-r^2\}\\ &= \{(r,\theta,z)\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}/r^2\le z\le 8-r^2,\ et\ 0\le r\le 2\},\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta=\{(r,\theta,z)\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}/r^2\le z\le 8-r^2,\ et\ 0\le r\le 2\ et\ 0\le\theta\le 2\pi\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
volume(V) = \int\int\int_V 1dxdydz &= \int\int\int_\Delta rdrd\theta dz \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{8-r^2} rdzd\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}\Big[zr\Big]_{r^2}^{8-r^2} d\theta dr \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi}((8-2r^2)r)d\theta dr = \int_0^2\Big[((8r-2r^3)\theta\Big]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^2 (8r-2r^3)2\pi dr = \Big[(4r^2-\frac{r^4}{2})2\pi\Big]_0^2 \\
&= 16\pi.
\end{aligned}$$

CHAPITRE 4

INTÉGRALES IMPROPRES

Dans ce chapitre, nous allons donner une généralisation de l'intégral simple à des cas d'intervalles qui ne sont pas fermés et bornés, à savoir : $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$,...
Pour assimiler ce chapitre, vous avez juste besoin d'une petite révision des techniques de calcul des primitives, et d'une bonne compréhension de la notion de limite.

4.1 Quelque définitions importantes :

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle non borné et non fermé.

Définition 4.1 (Localement intégrable)**.** Soit f une fonction réelle définie sur I. On dit que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné continu dans I. C'est- à -dire, $\forall a, b \in I$, $a < b$, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Remarque 4.1. *Tout fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou discontinue sur un nombre fini de points) elle est localement intégrable sur cet intervalle.*

Définition 4.2 (Intégrable impropre)**.** Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction $F : x \longrightarrow \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b.
on écrit alors

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} \int_a^x f(t)dt$$

Cette limite s'appelle une intégrale impropre (ou bien une integrale généralisée) de f sur $[a, b[$.

Remarque 4.2. *On dit que l'intégrale est divergente si elle n'est pas convergente (la limite est infinie.*

Exemple 4.1.1. *1.* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Big[\ln t\Big]_1^x = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Big[\ln x - \ln 1\Big] = +\infty$. *Donc cette intégrale est divergente.*

2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Big[\frac{-1}{t}\Big]_1^x = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Big[\frac{-1}{x} + 1\Big] = 1$. *Donc cette intégrale est convergente.*

Remarque 4.3. *Convergence équivaut donc à limite finie. Divergence signifie soit qu'il n'y a pas de limites, soit que la limite est infinie.*

Exemple 4.1.2. *1.* $\int_0^{\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\longrightarrow\infty} \Big[1 - e^{-x}\Big]0 \Longrightarrow$ *Converge*

2. $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = +\infty \Longrightarrow$ *Diverge*

3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Big[\arctan\Big]_0^x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ *Converge*

4. $\int_0^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\longrightarrow 0} \Big[\ln t\Big]_x^1 = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \Big[-\ln(x)\Big] = +\infty \Longrightarrow$ *Diverge*

4.2 Propriétes des intégrales impropres

4.2.1 Relation de Chasles pour les intégrales impropres

ThÃ©orÃ¨me 4.2.1. *Soit f une fonction localement intégrable (continue) de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Si $c \in [a, b[$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt \quad \textit{converge} \Leftrightarrow \int_c^b f(t)dt \quad \textit{converge}$$

Dans ce cas, on a la relation de Charles suivante

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque 4.4. *La relation de Charles implique donc la convergence ne dépend pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

4.2.2 Linéarité des intégrales impropres

ThÃ©orÃ¨me 4.2.2. *Soit f et g deux fonctions localement intégrables (continues) de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b(\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge et :*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

.

Remarque 4.5. *La réciprocité dans la linéairité est fausse, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles que $\int_a^b (f(t) + g(t))dt$ converge, sans que $\int_a^b f(t)dt$, ni $\int_a^b (g(t)dt$ convergent.*

4.2.3 Positivité de l'intégrale impropres

ThÃ©orÃ¨me 4.2.3. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Si l'intégrale impropre*

$$\int_a^b f(t)dt \ \text{ est convergente et si } \ f \geq 0$$

Alors alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

.

4.3 Cas de deux points incertains

On peut considérer les intégrales doublement impropres, c'est- à -dire lorsque les deux extrémités de l'intervalle de définition sont des points incertains (singularités). Il s'agit juste de se ramener à deux intégrales ayant chacune un seul point incertain (une singularité).

Définition 4.3 (Intégrable impropre)**.** Soient $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Soit f $:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres (généralisées) $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. On écrit alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple 4.3.1. *Est-ce que l'intégrale suivante converge ?*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

On choisit (au hasard) $c = 2$. Il s'agit de savoir si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \ \text{ et } \ \int_{2}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

convergent.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{(1+t^2)} dt &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} \int_x^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left[\frac{-1}{2} \frac{1}{1+t^2} \right]_x^2 \\
&= \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ *converge et vaut* $-\frac{1}{10}$

De même

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_{2}^{x} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left[\frac{-1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_2^x \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Donc $\int_{2}^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ *converge et vaut* $+\frac{1}{10}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ *converge et vaut* $-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0$. *Cette fonction est impaire* $f(-x)=-f(x)$. *Refaites les calculs pour une autre valeur de c et vérifiez que l'on obtient le même résultat.*

Remarque 4.6. *Si une des deux intégrales* $\int_a^c f(t)dt$ *ou bien* $\int_c^b f(t)dt$ *diverge, alors* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

Exemple 4.3.2. $\int_{-x}^{x} tdt = 0$, *pourtant* $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ *diverge. En effet,* $\forall c \in \mathbb{R}$, $\int_{-c}^{+\infty} tdt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_{-c}^{+\infty} tdt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left[\frac{x^2}{2}-\frac{c^2}{2}\right] = +\infty$ *diverge.*

4.4 Fonctions positives

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, où f est de signe constant au voisinage de $+\infty$. Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f s'il est négatif, nous supposerons que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $[a,+\infty[$.

Rappelons que, par définition,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Observons que si la fonction f est positive, alors la primitive $\int_a^x f(t)dt$ est une fonction croissante de x (car sa dérivée est $f(x)$). Quand x tend vers l'infini, ou bien

Si $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors converge, ou bien

Si $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x f(t)dt$ est infinie alors diverge.

4.5 Critère de convergence

4.5.1 Critère de comparaison

ThÃ©orÃ¨me 4.5.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions positives et continues sur* $[a,b[$. *Supposons que* f *soit majorée par* g *au voisinage de* b *(*$b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*) :*

c'est- à -dire $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$, *alors*

1. *Si* $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ *converge alors* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*
2. *Si* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge alors* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

Exemple 4.5.1. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}dt$ *converge.*

comme $t \longrightarrow \frac{e^{-t}}{1+t}$ *est une fonction positive* $\forall t \in [0, +\infty[$*. Pour cela , on a* $\frac{e^{-t}}{1+t} \leq e^{-t}$
Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *est convergente.*
En effet,
$\int_0^x e^{-t}dt = \Big[- e^{-t} \Big]_0^x = -e^{-x} + 1$
d'où
$\int_0^x e^{-t}dt = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \Big[1 - e^{-x} \Big] = 1$
De ce fait, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}dt$ *converge.*

Exemple 4.5.2. *Montrer que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}dt$ *diverge.*
En effet, $t \longrightarrow \frac{1}{\sin t}$ *est une fonction positive* $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
De plus, on a $\sin t < t$, $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, *et* $\frac{1}{\sin t} > \frac{1}{t}$

comme

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}dt &= \lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}dt \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \Big[\ln \frac{\pi}{2} - \ln x \Big] = +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui implique $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}dt$ *diverge.*

4.5.2 Critère d'équivalent

ThÃ©orÃ¨me 4.5.2. *Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur* $[a, b[$*. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de b (b* $= +\infty$*), c'est- à -dire :*

$$\lim_{t \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Alors les intégrales
$\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de m ême nature (convergent les deux ou divergent les deux) .*

Exemple 4.5.3. *Est-ce que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t}dt$ *converge ?*

Indication : $t^{\alpha}e^{\frac{-t}{2}} \leq 1$, $\forall t \in [1,+\infty[$ *et* $\forall \alpha$ *comme* $t \longrightarrow \frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t}$ *est positive* $\forall t \in [1,+\infty]$.

De plus, $\frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t^2e^{-t}$.
et comme $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ *est convergente* $\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t}dt$ *convergete .*
En effet, $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt \leq \int_1^{+\infty} e^{\frac{-t}{2}}dt$

$$\int_1^x e^{\frac{-t}{2}}dt = \Big[-2e^{\frac{-t}{2}}\Big]_1^x = 2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-x}{2}}$$

et $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left[2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-x}{2}}\right] = 2e^{\frac{-1}{2}}$
On déduit que $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ *converge.*

4.5.3 Intégrales de Riemann

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, l'utilisation des équivalents permet de se ramener à un une intégrale de Riemann dont la nature est connue.

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, définie sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

ThÃ©orÃ¨me 4.5.3.

$$1.)\textit{L'intégrale} \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}dt \quad \textit{est} \quad \begin{cases} \textit{Convergente} & \textit{si } \alpha < 1 \\ \textit{Divergente} & \textit{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$2.)\textit{L'intégrale} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}dt \quad \textit{est} \quad \begin{cases} \textit{Convergente} & \textit{si } \alpha > 1 \\ \textit{Divergente} & \textit{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Proposition 4.1.

1. *Au voisinage de* $+\infty$*, soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[a,+\infty[$.

   — *S'il existe* $\alpha > 0$*,tel que,* $t^{\alpha}f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*
   — *Si* $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, alors* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge.*

2. *Au voisinage de zéro (0) : Soit* $a > 0$

   — *S'il existe* $\alpha < 0$*,tel que,* $t^{\alpha}f(t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$ *alors* $\int_0^{a} f(t)dt$ *converge.*
   — *Si* $tf(t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$*, alors* $\int_0^{a} f(t)dt$ *diverge.*

4.5.4 Intégrales de Bertrand

Une intégrale de Bertrand est
$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$
où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Proposition 4.2.

1. *Pour $a > 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si est seulement si $\alpha \geq 1$ et $\beta > 1$*
2. *Pour $a \in]0, 1]$, $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si est seulement si $\alpha \leq 1$ et $\beta > 1$*

Exemple 4.5.4. *Etudier la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} dt$, selon $\beta \in \mathbb{R}$*
La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} dt \quad = \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left[\dfrac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_2^x & si \;\; \beta \neq 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \Big[\ln(\ln t) \Big]_2^x & si \;\; \beta = 1 \end{cases}$$

De ce fait, on déduit la nature de cette intégrale de Bertrand.

- *Si ($-\beta + 1 < 0$) $\beta > 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} dt$ converge.*
- *Si $\beta \leq 1$ alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} dt$ diverge.*

Exemple 4.5.5. *Est-ce que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t} \ln(\cos \frac{1}{t}) \sin^2 \frac{1}{\ln t} dt$ converge ?*

Le point incertain est $+\infty$. Calculons un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$. On a :

- $\sqrt{t^2+3t} = t\sqrt{t + \frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t$
- $\ln(\cos \frac{1}{t}) = \ln \left(1 - \frac{1}{2t^2} + 0(\frac{1}{t^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2t^2}$
- $\sin^2 \frac{1}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{\ln t} \right)^2.$

D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2+3t} \ln(\cos \frac{1}{t}) \sin^2 \frac{1}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t(\ln t)^2}$$

comme $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$ de Bertrand converge, alors notre intégrale converge aussi .

4.6 Fonctions à signe quelconque

4.6.1 Critère de convergence absolue

Définition 4.4. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ $(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. –On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

ThÃ©orÃ¨me 4.6.1. *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque 4.7. *Ce résultat ne permet pas de calculer la valeur de cette intégrale.*

Exemple 4.6.1. *Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ est absolument convergente, donc convergente. En effet, pour tout t,*

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, ce qui implique la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ par comparaison.

4.6.2 Intégrales semi-convergentes

Définition 4.5. Une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 4.6.2. *$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est semi-convergente.*

4.6.3 Critère d'Abel

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

ThÃ©orÃ¨me 4.6.2. *Soit f une fonction C^1 sur $[a,+\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$ $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 0$. Soit g une fonction continue sur $[a,+\infty[$, s'il existe M> 0, telque $\forall x \in [a,+\infty[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge.*

Exemple 4.6.3. *La nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.*
Appliquons le théorème d'Abel : On pose

$f(t) = \frac{1}{t}$ *dt* $g(t) = \sin t$
$f(t)$ est une fonction positive $\forall t \in [1,+\infty[$.

$f'(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$, $\forall t \in [1,+\infty[$ *ce qui implique f est décroissante.*
$\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t} = 0$

⋆ *pour la fonction* $t \longrightarrow \sin t$

Pour $M = 2$, $\forall x \in [a, +\infty[$,

$$\left| \int_1^x \sin t dt \right| = \left| \left[\cos t \right]_1^x \right| = \left| \cos x - \cos 1 \right| \leq \left| \cos x \right| + \left| \cos 1 \right| \leq 1 + 1 = 2$$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge.*

4.7 Calcul des intégrales impropres

4.7.1 Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions deux fonctions de classe c^1 sur $[a, b[$. Supposons que $\lim\limits_{t \longrightarrow b} f(t)g(t)$ existe et soit finie. Alors $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t) \Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

avec $\Big[f(t)g(t) \Big]_a^b = \lim\limits_{x \longrightarrow b^-} \Big[f(t)g(t) \Big]_a^x$

Exemple 4.7.1. *Calculer* $\int_0^1 t \ln(t) dt$ *par parties.*

Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} f'(t) = t &\implies f(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ g(t) = \ln(t) &\implies g'(t) = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \ln(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 t dt \\ &= \frac{-x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^1 \\ &= \frac{-x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{-x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

l'intégrale impropre $\int_0^1 t \ln(t) dt$ *est convergente. De plus* $\int_0^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}$

Exemple 4.7.2. *Soit* $\lambda > 0$, *calculer l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

On effectue l'intégration par parties avec

$$\begin{aligned} f'(t) = e^{-\lambda t} &= f(t) = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \\ g(x) = \lambda t &= g'(t) = \lambda. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \int_0^x g(x) f'(t) dt \\ &= \Big[g(t) f(t) \Big]_0^x - \int_0^x g'(t) f(t) dt \\ &= \Big[\lambda t \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]_0^x - \int_0^x \lambda \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt \\ &= -x e^{-\lambda t} - \int_0^x e^{-\lambda t} dt \\ &= -x e^{-\lambda t} + \Big[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]_0^x \\ &= -x e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \Big[e^{-\lambda t} - 1 \Big]_0^x \\ &\longrightarrow \frac{1}{\lambda} \textit{ lorsque } x \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente c'est- à -dire elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 4.7.3. *D'après Abel cette intégrale est convergente.*

Montrons qu'elle n'est pas absolument convergent :

comme $|\sin t| \leq 1$, $\forall t$, *on a*

$\frac{\sin^2 t}{t} \leq \frac{|\sin t|}{2t}$, *(multipliant par* $|\sin t|$*)*

avec $\int \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int \frac{1-\sin 2t}{t} dt$

En appliquant une intégration par parties, on pose.

$$\begin{aligned} u'(x) = \cos(2t) &\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}\sin(2t), \\ v(x) = \frac{1}{t} &\Rightarrow v'(x) = \frac{-1}{t^2}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\int_1^x \frac{1-\cos(2t)}{2t}dt = \frac{1}{2}\Big[\ln x\Big]_1^x - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2t)}{t}\right]_1^x - \frac{1}{4}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}dt$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}dt$ *converge absolument. Les deux dernières termes de la somme convergent et le prmier tend vers* $+\infty$*, donc l'integrale diverge. Finalement d'après le critère de comparaison* $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ *diverge.*

4.7.2 Changement de variable

ThÃ©orÃ¨me 4.7.1. *Soient* $f :]a, b[\longrightarrow R$ *continue et* $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[$*, de classe* C^1 *et bijective alors*

$$\int_a^b f(x)dt \text{ et } \int_\alpha^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

sont deux intégrales impropres de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(x)dt = \int_\alpha^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exemple 4.7.4. *Etude de la nature de l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}dt$*. Posons le changement de variable :*
$u = e^t$ *alors* $t = \ln u \Longleftrightarrow du = e^t dt$ *et* $dt = \frac{du}{e^t = \frac{du}{u}}$
de plus pour $t = 0 \Rightarrow u = 1$*, et* $t = x \Rightarrow u = e^x$*.*
Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \longrightarrow ln(u)$ *est de classe* C^1 *sur* $[1, e^x]$*. On obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{e^t+1}dt &= \int_1^{e^x} \frac{1}{u(u+1)}du \\
&= \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\
&= \Big[\ln(|u|)\Big]_1^{e^x} - \Big[\ln(|u+1|)\Big]_1^{e^x} \\
&= \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + \ln(2) \longrightarrow t \to +\infty \ln(2)
\end{aligned}$$

On déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}dt$*. est convergente. De plus :* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}dt = ln(2)$*.*

4.8 Exercices corrigés sur les intégrales impropres

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales.

1. $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$
2. $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$.

3. $I_1 = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

4. $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{2+\sin(x)}{x^3} dx.$

5. $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx.$

Corrigé,

1. $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt.$
   La fonction est positive

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

   Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable $\alpha = 2 > 1$ On fait le changement de variable $u = t^2 + 1 \Longleftrightarrow t = \sqrt{u-1}$ dans l'intégrale

$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt = \int_1^x \frac{t}{t^2\sqrt{t^2+1}} dt$$

   On retrouve « presque » du= 2tdt au numérateur

   $t = 1 \Longrightarrow u = 2$ et $t = x \Longrightarrow u = x^2 + 1$

$$\int_1^x \frac{t}{t^2\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{1}{2} \int_2^{x^2+1} \frac{1}{(u-1)\sqrt{u}} du$$

   On fait le changement de variable $v = \sqrt{u} \Longleftrightarrow u = v^2, du = 2vdv$

   $u = 2 \Longrightarrow v = \sqrt{2}$ et $u = x^2 + 1 \Longrightarrow v = \sqrt{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{2}^{x^2+1}\frac{1}{(u-1)\sqrt{u}}du &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{2v}{(v^2-1)v}dv \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{(v^2-1)}dv \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{v-1}+\frac{\frac{-1}{2}}{v+1}\right)dv \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln|v-1|-\ln|v+1|\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|
\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x})}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}\right| \longrightarrow 0$

et

$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right) = \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$

Donc $I_1 = \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{2}+3)$

2. $I = \int_3^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$.

   En posant
   $$t=\sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx \Rightarrow dx = 2tdt,$$
   de plus, pour $x=3$ on a $t=\sqrt{3+1}=1$ et $x\to+\infty$ on a $t\to+\infty$,

   on obtient
   $$\begin{aligned}
   \int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx &= \int_{2}^{+\infty}\frac{2}{(t^2-1)}dt \\
   &= 2\int_{2}^{+\infty}(\frac{1}{(t-1)}-\frac{1}{(t+1)})dt \\
   &= \Big[(\ln\mid(t-1)\mid-\ln\mid(t+1)\mid)\Big]_{2}^{+\infty} = \Big[\ln(\frac{t-1}{t+1})\Big]_{2}^{+\infty} \\
   &= \lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{(t-1)}{t+1})-\ln\frac{1}{3} = \ln 3.
   \end{aligned}$$

   D'où l'intégrale I converge.

3. $I_1 = \int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

On peut appliquer le critère de comparaison. D'habord, on a

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}, \quad \forall\, x \geq 1.$$

De plus,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

et

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \Big[-e^{-x} \Big]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} -e^{-x} + e^{-1} = e^{-1}.$$

D'aprés le critère de comparaison et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge donc l'intégrale $I_1 = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge aussi.

4. $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{2+\sin(x)}{x^3} dx$.

   On peut appliquer le critère de comparaison. D'habord, on a

   $$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{2+\sin x}{x^3} \leq \frac{3}{x^3}$$

   d'où

   $$\frac{2+\sin x}{x^3} \leq \frac{3}{x^3}, \quad \forall\, x \geq 2.$$

   De plus,

   $$\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^3} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx$$

   et

   $$\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx = \left[\frac{-3}{2x^2} \right]_2^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{2x^2} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$$

   D'aprés le critère de comparaison et comme l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx$ converge donc l'intégrale $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^3} dx$ converge aussi.

   (L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx$ converge car c'est un intégrale de Riemann de 1^{er} type $\alpha = 3 > 1$).

5. $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$.

   On peut appliquer le critère de comparaison. D'habord, on a

   $$1 \leq e^x \leq e \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{e^x}{x} \leq \frac{e}{x}$$

   d'où

   $$\frac{1}{x} \leq \frac{e^x}{x}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

   De plus,

   $$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$$

   et

   $$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \Big[\ln x \Big]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \to 0} \ln = +\infty.$$

D'aprés le critère de comparaison et comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge donc l'intégrale $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx$ diverge aussi.

(L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge car c'est un intégrale de Riemann de 2^{eme} type $\alpha = 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. El Kaabouci, D. Essayed, Mathématiques, Edition ellipses, 2013.

[2] J.M. Monier, Analyse PC-PSI-PT, Dunod, Paris 2004.

[3] A. Bégyn, S. Pelletier, K. Jullian-Dupoiron, F. Desveaux, Mathématiques, Edition Dunod, 2011

[4] Y. Bougrov, S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, 1983.

[5] P. Dupont, Exercices corrigés de mathématiques, tome 2, 3e, 2008.

[6] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.

[7] K. Allab, Eléments d'Analyse, OPU, Alger, 1984.

[8] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.

[9] J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 4, Edition Dunod, 1992.