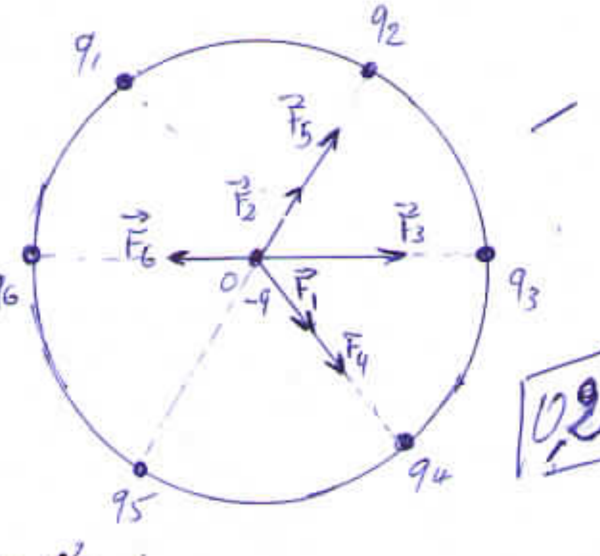
Corrigé examen final 2012 (Juin)

Exo 1 :

1/ Représentation des forces en tenant compte du signe de chacune des charges



$\boxed{0,25}$

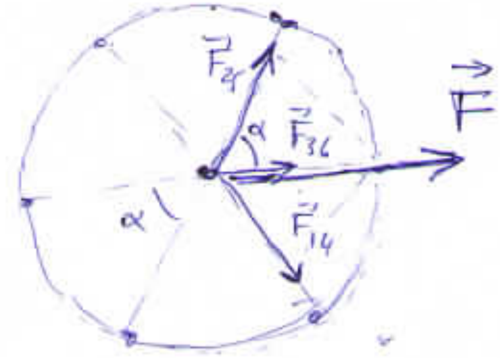
2/ Calculons chacune des forces

$$F_i = K \frac{\|q_i\| \|-q\|}{R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} - F_1 = K \frac{q^2}{R^2} \\ - F_2 = K \frac{q^2}{R^2} \\ - F_3 = 2K \frac{q^2}{R^2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} F_4 = 2K \frac{q^2}{R^2} \\ F_5 = 2K \frac{q^2}{R^2} \\ F_6 = K \frac{q^2}{R^2} \end{array}\right\} \boxed{0,5}$$

On fait les résultantes 2 à 2.

$$\left.\begin{array}{l} F_{14} = F_1 + F_4 = 3K \frac{q^2}{R^2} \\ F_{25} = F_2 + F_5 = 3K \frac{q^2}{R^2} \\ F_{36} = F_3 - F_6 = K \frac{q^2}{R^2} \end{array}\right\} =$$



$$\vec{F} = \vec{F}_{25} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{36}$$

$$F = F_{25} \cdot \cos\alpha + F_{14} \cdot \cos\alpha + F_{36} = 2F_{14}\cos\alpha + F_{36}$$

or $\alpha = 60°$, $\Rightarrow$ $\cos 60 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $F = 2F_{14} \cdot \frac{1}{2} + F_{36} = F_{14} + F_{36}$

soit $\boxed{F = 3K\frac{q^2}{R^2} + K\frac{q^2}{R^2} = 4K\frac{q^2}{R^2}}$ $\boxed{0,5}$

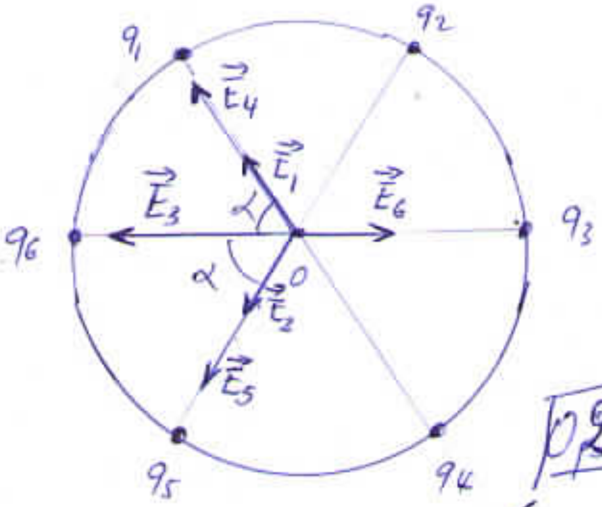
- sa direction : la droite joignant $(-q)$ et (q_3)
- son sens : vers la charge q_3

$\boxed{0,25}$

3)

Exo (suite)

3 - a/ Le champ créé par la charge q_i est représenté par $\vec{E_i}$



$\boxed{0{,}25}$

b) $\vec{E_T} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \vec{E_4} + \vec{E_5} + \vec{E_6}$

$\vec{E_i} = K \dfrac{q_i}{R^2} \vec{u_i}$, $E_i = K \dfrac{\|q_i\|}{R^2}$

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 = K \dfrac{q}{R^2} & E_4 = 2K \dfrac{q}{R^2} \\ E_2 = K \dfrac{q}{R^2} & E_5 = 2K \dfrac{q}{R^2} \\ E_3 = 2K \dfrac{q}{R^2} & E_6 = K \dfrac{q}{R^2} \end{array}\right\} - \boxed{0{,}5}$$

$$\left.\begin{array}{l} - E_{14} = E_1 + E_4 = 3K \dfrac{q}{R^2} \\ - E_{25} = E_2 + E_5 = 3K \dfrac{q}{R^2} \\ - E_{36} = E_3 + E_6 = K \dfrac{q}{R^2} \end{array}\right\} \vec{E} = \vec{E_{14}} + \vec{E_{25}} + \vec{E_{36}}$$

D'après la symétrie du symétrie :

$E = E_{14} \cos\alpha + E_{25} \cos\alpha + E_{36} = 2 E_{14} \cos\alpha + E_{36}$

soit $E = 2 . E_{14} . \frac{1}{2} + E_{36} = E_{14} + E_{36}$

$$\boxed{E = 4K \frac{q}{R^2}} - \boxed{0{,}5}$$

* Sa direction : la droite joignant q_6 et q_3
* Son sens : vers la gauche

$\boxed{0{,}25}$

c/ $V = \sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6$ $\boxed{1}$

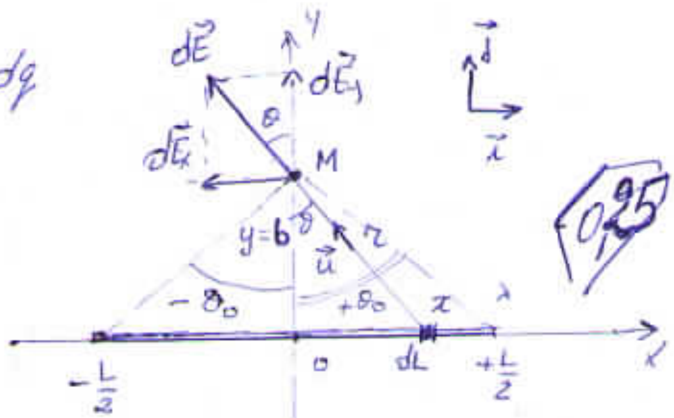
$= K \dfrac{q_1}{R} + K \dfrac{q_2}{R} + K \dfrac{q_3}{R} + K \dfrac{q_4}{R} + K \dfrac{q_5}{R} + K \dfrac{q_6}{R} = \dfrac{K}{R} (\sum q_i)$

$$\boxed{V = \frac{K}{R} (-q + q + 2q + 2q - 2q + q) = 3K \frac{q}{R}}$$

d) $U = (+3q) . V = 3q . 3K \dfrac{q}{R} = 9K \dfrac{q^2}{R}$ $\boxed{U = 9K \dfrac{q^2}{R}}$ - $\boxed{1}$

Exercice N°2 : Cet exercice est traité durant le cours avec une représentation du segment sur l'axe y'oy

* Prenons un élément de longueur dL du segment et portant une charge dq et situé à la coordonnée x
cet élément crée en M le champ



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}\,\vec{u} \quad \boxed{0,5}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dL}{r^2}\,\vec{u}$$

$$= dE_x\,\vec{i} + dE_y\,\vec{j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dL}{r^2} \sin\theta \\ dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dL}{r^2} \cos\theta \end{cases} \quad \boxed{1}$$

$$\vec{E} = \int_{\text{charge}} d\vec{E} = \int_{\text{charge}} (dE_x\,\vec{i} + dE_y\,\vec{j}) = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} \quad \text{Avec}$$

$$\begin{cases} E_x = \int_L dE_x = \int_L -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dL}{r^2} \sin\theta \\ E_y = \int_L dE_y = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dL}{r^2} \cos\theta \end{cases}$$

On a
$$\begin{cases} dL = dx \\ \cos\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow r = \frac{b}{\cos\theta} \\ tg\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\,tg\theta \Rightarrow dx = dL = \frac{b}{\cos^2\theta} d\theta \end{cases} \quad \boxed{0,5}$$

En remplaçant :

$$* \quad E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\frac{b}{\cos^2\theta} d\theta}{b^2/\cos^2\theta} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b} \left[\cos\theta\right]_{-\theta_0}^{\theta_0} = 0$$

$$* \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\frac{b}{\cos^2\theta} d\theta}{b^2/\cos^2\theta} \cdot \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b} \left[\sin\theta\right]_{-\theta_0}^{+\theta_0}$$

Soit $\boxed{E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b} \cdot \sin\theta_0}$

Exo-2 suite

$$\boxed{\vec{E}\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\cdot \sin\theta_0 \end{pmatrix}} \quad / \boxed{1}$$

Avec $\sin\theta_0 = \dfrac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b^2}}$

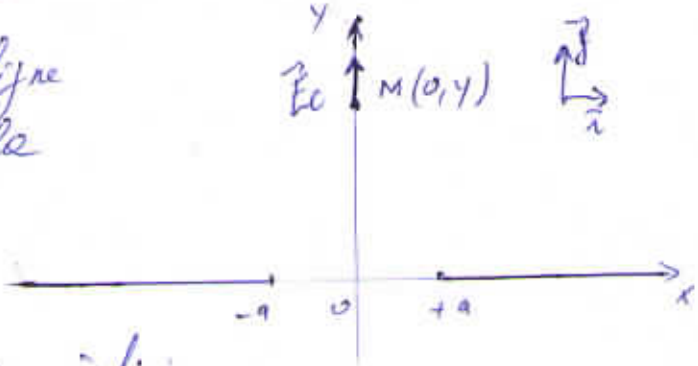
soit $$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 b}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}}\,\vec{J}} \quad / \boxed{0{,}25}$$

2) Pour un fil infini chargé avec $(+\lambda)$:

On a $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta_0 = 1$

Alors : $$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\,\vec{J}} \quad / \boxed{0{,}5}$$

3) Le champ crée par cette ligne infinie dont on découpe la portion de longueur 2b désigné par $\vec{E}_c$ est égal



au champ crée par une ligne infinie en M désigné par $\vec{E}_{inf}$ diminué du champ crée par le segment de longueur 2b en M (désigné par $\vec{E}_s$)

soit $\vec{E}_c = \vec{E}_{inf} - \vec{E}_s$ / $\boxed{1}$

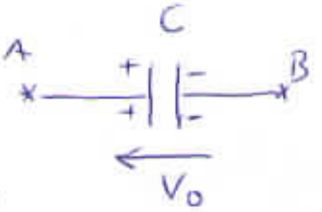
En remplacant $\vec{E}_{inf}$ et $\vec{E}_s$ par les résultats obtenus en 1) et 2)

On a : $\begin{cases} \vec{E}_{inf} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\,\vec{J} & \text{(on remplace } b \text{ par } y) \\ \vec{E}_s = \dfrac{\lambda\cdot 2a}{4\pi\varepsilon_0 y}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{J} & \text{(on remplace } b \text{ par } y \text{ et } L \text{ par } 2a) \end{cases}$ $\boxed{0{,}5}$

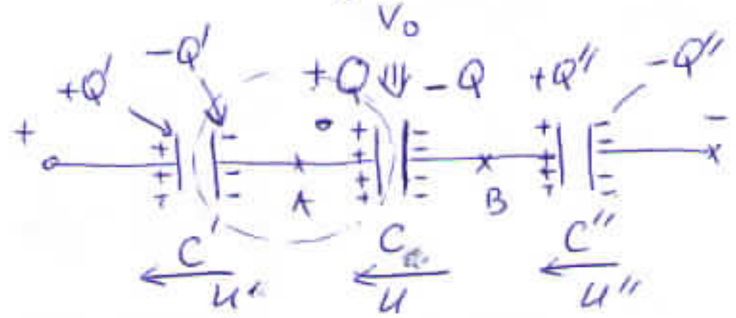
soit $$\boxed{\vec{E}_c = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\vec{J}} \quad / \boxed{0{,}5}$$

EX3

Exo traité en cours



$\rightarrow Q_0 = CV_0$ $\boxed{1}$



Soient Q, Q' et Q'' les charges des 3 condensateurs lorsque la ddp V est établie.

On a d'après le principe de conservation de la charge.

$$\left.\begin{aligned} -Q' + Q &= +Q_0 \\ -Q + Q'' &= -Q_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{Q' = Q''} \quad \boxed{1}$$

D'autre part on a :

$$V = U + U' + U'' \quad \boxed{1}$$

avec U, U', U'' ddp aux bornes des condensateurs.

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{C} + \frac{Q'}{C'} + \frac{Q''}{C''}$$

en remplaçant Q'' par Q'

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{C} + Q'\left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}\right)$$

Soit $\boxed{1}$

$$\left\{\begin{aligned} & -Q' + Q = Q_0 \quad (1) \\ & Q'\left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}\right) + \frac{Q}{C} = V \quad (2) \end{aligned}\right.$$

2 éq à 2 inconnues

$(1) \rightarrow Q = Q_0 + Q'$ dans $(2) \Rightarrow Q'\left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}\right) + \frac{Q_0 + Q'}{C} = V$

$$\Rightarrow Q'\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}\right) = V - \frac{Q_0}{C} = V - V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q' = \frac{V - V_0}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'}} = Q''} \quad \boxed{1}$$

Et enfin :

$$Q = q_0 + q'$$

$$= q_0 + \frac{V - V_0}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}}$$

$$\boxed{Q = CV_0 + \frac{V - V_0}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}}} \quad \boxed{1}$$

EXERCICE N° 4

$\boxed{0,75}$ 1/ Le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges contenues à l'intérieur de cette surface, appelée : surface de Gauss

2/

$\boxed{0,25}$ a) fil de longueur finie → Non

$\boxed{0,5}$ b) fil infini (λ) → Oui → surface de Gauss est un cylindre ayant pour axe le fil

$\boxed{0,25}$ c) circonférence (λ) → Non

$\boxed{0,25}$ d) disque (σ) → Non

$\boxed{0,5}$ e) plan infini → Oui → surface de Gauss ≡ cylindre d'axe ⊥ au plan et symétrique par rapport à ce plan

$\boxed{0,5}$ f) - Sphère chargée → Oui → surface de Gauss ≡ c'est une sphère de même centre