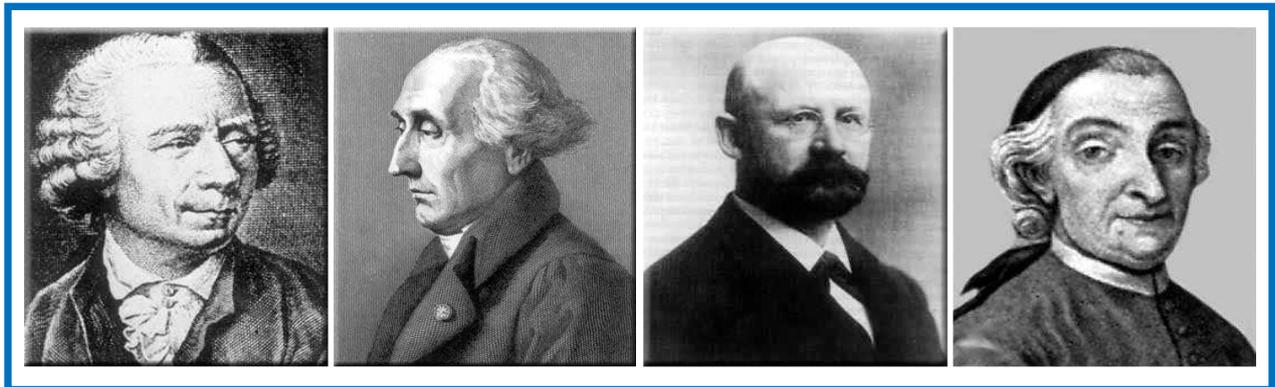


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA-BEJAIA
Faculté de Technologie
Département De Génie électrique

Intitulé du cours:

TECHNIQUES DE COMMANDES AVANCEES



Dr. OUARI KAMEL
Maître de Conférences Classe A

Année universitaire 2021/2022

SOMMAIRE

Chapitre I : La Commande dans l'espace d'état

I.1) Introduction:	6
I.2) Espace d'état.....	6
I.2.1) Grandeurs et équations d'état	6
I.2.2) Stabilité :	7
I.2.3) Commandabilité d'un système :	10
I.2.4) Observabilité d'un système :	10
I.2.5) Passage d'une représentation d'état vers fonction de Transfert :.....	11
I.3) Réglage d'état (la commande par retour d'état) :.....	13
I.3.1) Principe du réglage d'état:	13
I.3.2) Réglage d'état par placement de pôles :.....	14
I.3.3) Commande par retour d'état et action intégrale	14
I.4) Observateur et estimateur de d'état	20
I.4.1) Position du problème	21
I.4.2) Observateurs de Luenberger.....	21

Chapitre II : Commande optimale LQR

II.1) Introduction :.....	26
II.2)Formulation du problème de la commande optimale.....	26
II.2.1)Critère d'optimisation :.....	26
II.2.2) Les conditions aux limites: (conditions initiales et finales).	27
II.3) Principe de Calcul de la Commande optimale :.....	27
II.3.1) Principe du maximum de Pontriaguin (PMP).....	27
II.3.2) Détermination des valeurs aux conditions limites :.....	28
II.4) Commande Linéaire Quadratique LQ (LQR):.....	30
II.4.1) Commande LQR à horizon fini	30
II.4.2) Commande LQ à horizon infini	32
II.4.3) Choix des pondérations :.....	33

Chapitre III: Commande Prédictive

III.1) Principe de la commande prédictive :	38
III.2) Notions de la géométrie différentielle :	40
III.2.1) Système mono-entrée/mono-sortie : SISO	40
III.2.2) Système multi-entrée multi-sortie : (MIMO)	42
III.3) Commande prédictive généralisée (G.P.C.).....	42

Chapitre IV : Commande adaptative

IV.1 Introduction :	50
IV.2) Différentes stratégies de la commande adaptative:	50
IV.2.1) Commande adaptative auto-ajustable indirecte	50
IV.2.2) Commande adaptative avec modèle de référence	50
IV.3) la synthèse de commande adaptative à modèle de référence MRAS :.....	51
IV.3.1) Méthode basée sur l'hyper stabilité:.....	52
Bibliographie	61

Chapitre I

Figure 1-1 Schéma bloc du modèle d'état.....	6
Figure 1-2 MCC.....	7
Figure 1-3 Schéma bloc d'un modèle espace d'état en Boucle ouverte.....	13
Figure 1-4 Structure de la commande par retour d'état.....	13
Figure 1-5 Le schéma bloc du retour d'état.....	14
Figure 1-6 Commande par retour d'état et action intégrale.....	14
Figure 1-7 Système en boucle fermée.....	16
Figure 1-8 Influence des pôles sur le comportement dynamique en BF.....	19
Figure 1-9 Allure de la vitesse pôles= $[-85, -5-2i, -5+2i]$	19
Figure 1-10 Allure de la vitesse pôles= $[-85, -5-8i, -5+8i]$	19
Figure 1-11 Pôles = $[-85, -5-20i, -5+20i]$	20
Figure 1-12 Réglage d'état avec observateur.....	21
Figure 1-13 Observateur Luenberger.....	21
Figure 1-14 Schéma de l'Observateur Luenberger.....	22

Chapitre II

Figure II-1 Représentation du système contrôlé par un régulateur LQ.....	33
Figure II-2 Représentation du système contrôlé par un régulateur LQ.....	36

Chapitre III

Figure III-1 Principe de la commande prédictive.....	37
Figure III-2 Principe de la commande prédictive.....	38
Figure III-3 Exemple Principe de la commande prédictive.....	38

Chapitre IV

Figure IV-1 Commande adaptative auto-ajustable (indirecte).....	48
Figure IV-2 Schéma d'une Commande adaptative avec modèle de référence (directe) ..	49
Figure IV-3 Schéma fonctionnel d'une commande à gain constant.....	50
Figure IV-4 Schéma fonctionnel d'un système non linéaire variable dans le temps.....	53
Figure IV-5 Schéma fonctionnel d'un système non linéaire variable dans le temps avec compensation.....	54
Figure IV-6 Schéma de commande adaptative à modèle de référence (MRAC).....	55

Chapitre I

La Commande dans l'espace d'état

I.1) Introduction:

La modélisation de la représentation d'un système multi-variables, multi-entrées et multi-sorties au moyen de fonctions de transfert ne donne pas un aperçu de l'état interne du système. En effet, l'application de techniques de commande avancées repose sur la connaissance des variables d'état du système à commander. Toutes les méthodes, qu'elles soient linéaires ou non linéaires, en temps continu ou discret, restent valables et efficaces jusqu'à ce que ces systèmes atteignent un niveau de complexité tel que l'on ne se contente plus d'une seule relation entrée-sortie pour bien contrôler. La représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

I.2) Espace d'état

Un vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système en se basant sur les équations et les entrées de ce système. En générale, l'état d'un système est représenté par son vecteur d'état sous conditions de l'indépendance linéaire des variables d'état choisies.

I.2.1) Grandeurs et équations d'état

Pour introduire la modélisation par variables d'état, on part d'un exemple d'un système (fig.1- 1) qu'on peut commander par une entrée u . On est intéressé par sa sortie y . Les matrices A , B , C et D sont indépendantes du temps.

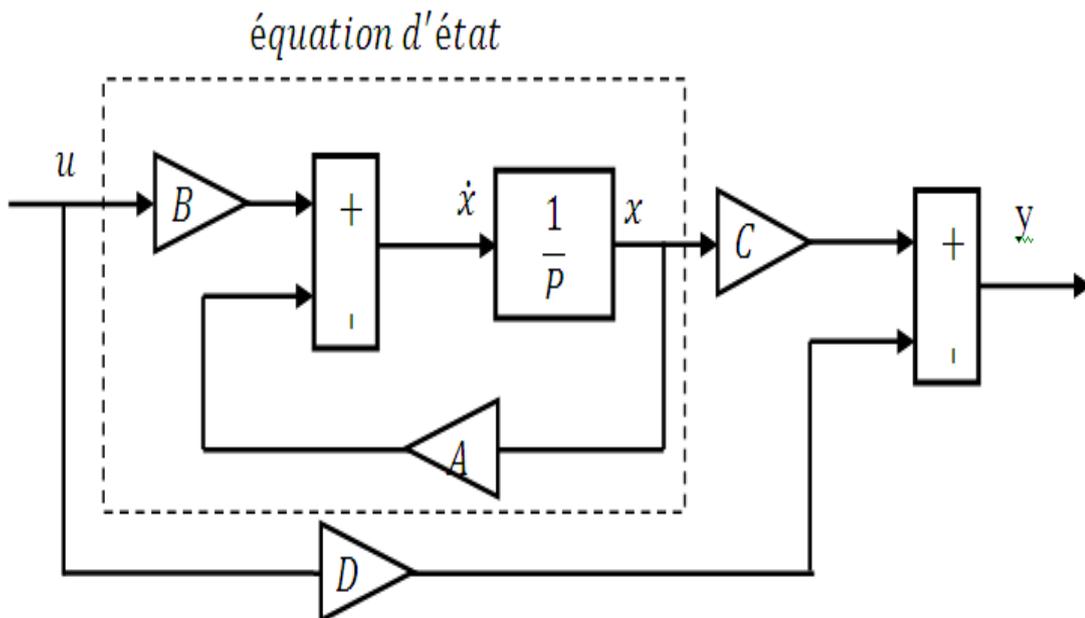


Figure 1-1 Schéma bloc du modèle d'état

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

La forme généralisée des équations d'état d'un système linéaire multi-entrée, multi-sortie est:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u} & : \text{équation d'état ou équation de commande} \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & : \text{équation de sortie ou équation d'observation} \end{cases} \quad (\text{I. 1})$$

- $\mathbf{x}(\mathbf{t})$: vecteur d'état $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathcal{R}^n$ (n: nombre d'états ; l'ordre du système)
- $\mathbf{u}(\mathbf{t})$: vecteur des entrées $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathcal{R}^m$ (m: nombre d'entrées)
- $\mathbf{y}(\mathbf{t})$: vecteur des sorties : $\mathbf{y}(\mathbf{t}) \in \mathcal{R}^p$ (p : nombre de sorties)

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

- A : Matrice d'état $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ (matrice carré)
- B : Vecteur de commande d'entrée $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$
- C : matrice de sortie $\mathbf{y}(\mathbf{t}) \in \mathcal{R}^{p \times n}$
- D : Matrice de couplage $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p \times m}$ (souvent D=0)

Interprétation du schéma :

- *Equation d'état = vue interne du système*
- *A : représente les interactions dynamiques entre les différents éléments internes du système*
- *B : représente l'action des entrées sur l'évolution dynamique du système*
- *C : indique les capteurs permettent d'obtenir les sorties*

Exemple : Un MCC fonctionne en régime linéaire. Le schéma de ce moteur est représenté sur la figure 1-2. La sortie $\theta(\mathbf{t})$ est la position angulaire du moteur. Il entraîne une charge présentant un couple de charge $C_r(\mathbf{t})$. On suppose que toute la puissance électrique du MCC se transforme en puissance mécanique.

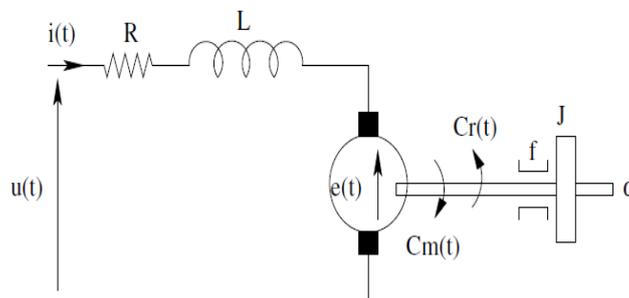


Figure 1-2 MCC

A partir de la loi d'Ohm, appliquée à l'induit, et de la loi fondamentale de la dynamique déduire les équations dynamiques gouvernant le comportement du moteur, L'équation électrique de l'induit et l'équation mécanique s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \mathbf{R}\mathbf{i}(t) + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}(t)}{dt} + \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{C}_{em} - \mathbf{C}_r \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Les relations qui lient les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques sont :

$$\begin{cases} \mathbf{e}(t) = \mathbf{k}\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{C}_{em} = \mathbf{k}\mathbf{i}(t) \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

La représentation du système :

Variables d'état : courant dans l'induit $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i}$

Position angulaire : $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\theta}$

Vitesse angulaire : $\mathbf{x}_3 = \boldsymbol{\omega}$

La sortie $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}$

L'équation électrique de l'induit et l'équation mécanique s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \mathbf{R}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} + \mathbf{k}\mathbf{x}_3(t) \\ \mathbf{x}_2(t) = \boldsymbol{\theta} = \int \mathbf{x}_3(\tau)d\tau \\ \mathbf{J}\frac{d\mathbf{x}_3}{dt} = \mathbf{k}\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{C}_r \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Pour mettre en évidence les variables d'état, on transforme ces équations différentielles quelconques en un système d'équations différentielles du premier ordre, en écrivant la grandeur dérivée dans le membre de gauche et une combinaison de grandeurs non dérivées dans le membre droit de chaque égalité.

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}\mathbf{x}_1(t) - \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{L}}\mathbf{x}_3(t) + \frac{1}{\mathbf{L}}\mathbf{u}(t) \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{x}_3 \\ \frac{d\mathbf{x}_3}{dt} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{J}}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{\mathbf{J}}\mathbf{C}_r \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

$\mathbf{y} = \mathbf{x}_2$

On pose :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système d'équation (I.5) sous forme matricielle.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u} + \mathbf{B}_r\mathbf{C}_r & : \text{équation d'état ou équation de commande} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & : \text{équation de sortie ou équation d'observation} \end{cases}$$

Les matrices se déduisent

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -R/L & 0 & -k/L \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_u = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (0 \quad 1 \quad 0) \quad \mathbf{D} = 0$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & 0 & -k/L \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J \end{pmatrix} \mathbf{C}_r \quad (\text{I.6})$$

$$\mathbf{y}(t) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 0\mathbf{u} \quad (\text{I.7})$$

- La matrice A est appelée matrice fondamentale, car elle contient la description du comportement dynamique du système.
- \mathbf{B}_u vecteur d'entrée
- \mathbf{B}_r Vecteur d'entrée de perturbation
- la matrice C le vecteur-ligne de sortie
- la matrice D est en général nulle dans les systèmes physiques

I.2.2) Stabilité :

Un système est stable si, en l'absence d'excitation et abandonné dans des conditions initiales non nulles, il revient à son état d'équilibre en un temps raisonnable. Considérons un système d'écrit par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

En l'absence d'excitation et abandonné dans des conditions initiales non nulles:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \quad (\text{I. 9})$$

On applique la TL pour des conditions initiales \mathbf{x}_0 non nulles, puis on extrait $\mathbf{X}(P)$.

$$\text{TL } \mathbf{P}\mathbf{X}(P) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(P) \Rightarrow (\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(P) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{I. 10})$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}(P) = (\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A})_{\min}}{\det(\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{x}_0 = \mathbf{k}_f \frac{\prod_{j=1}^m (\mathbf{P} - \mathbf{z}_j)}{\prod_{i=1}^n (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i)}\mathbf{x}_0 \quad (\text{I. 11})$$

Le polynôme caractéristique $\det(\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A})$ peut s'exprimer de manière factorisée avec les valeurs propres P_i ou pôles.

$$\det(\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) = (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1)(\mathbf{P} - \mathbf{P}_2)(\mathbf{P} - \mathbf{P}_3) \dots \dots (\mathbf{P} - \mathbf{P}_n) = 0 \quad (\text{I. 12})$$

La stabilité du système est déterminée par les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} , qui sont les solutions de son équation caractéristique.

I.2.3) Commandabilité d'un système :

La commandabilité d'un système est une condition nécessaire à l'établissement d'un régulateur. Un système est dit commandable depuis l'entrée u s'il est possible d'intervenir sur cette entrée pour atteindre un état final $x(t) = 0$ à partir de conditions initiales $x(0)$ quelconques en un temps t fini.

Le modèle d'état permet de déterminer si un système est commandable en construisant sa matrice de commandabilité \mathbf{Q}_c . C'est une matrice carrée de même dimension que la matrice fondamentale.

On considère un système(1), la matrice de commandabilité \mathbf{Q}_c est définie comme suit :

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (\text{I. 13})$$

Avec : $\mathbf{Q}_c(\mathbf{k}) = \mathbf{A}\mathbf{Q}_c(\mathbf{k} - 1)$

Un système est commandable si sa matrice de commandabilité est régulière : $\det \mathbf{Q}_c \neq 0$

I.2.4) Observabilité d'un système :

Un système est dit observable si on peut déterminer de manière univoque son état de départ $x(t_0)$ en mesurant sa sortie $y(t)$ lorsqu'il est soumis à une commande $u(t)$ pendant un temps fini.

Un système défini par son modèle d'état \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} est observable si sa matrice d'observabilité \mathbf{Q}_{obs} est régulière.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} \end{cases} \mathbf{Q}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

Exemple

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = [2 \quad -1]\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Etudier la stabilité la commandabilité et l'observabilité

➤ Stabilité : on calcule les valeurs propres de la matrice A

$$[\mathbf{PI} - \mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} + 3 & -2 \\ -4 & \mathbf{p} + 5 \end{pmatrix}$$

$$\det[\mathbf{PI} - \mathbf{A}] = (\mathbf{p} + 3)(\mathbf{p} + 5) - 8 = \mathbf{p}^2 + 8\mathbf{p} + 7 = (\mathbf{p} + 1)(\mathbf{p} + 8)$$

Deux valeurs propres (pôles) -1 et -7 par conséquent le système est stable.

➤ Commandable n=2

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det\mathbf{Q}_c=16$ par conséquent le système est commandable.

➤ Observabilité

$$\mathbf{Q}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = [-10 \quad 9]$$

$$\mathbf{Q}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 9 \end{bmatrix} \det\mathbf{Q}_{\text{obs}} = 18 - 10 = 8 \quad \text{donc le système est observable}$$

I.2.5) Passage d'une représentation d'état vers fonction de Transfert :

On considère un système LTI (linéaire temps invariant) décrit par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

Dans le cas des systèmes multi-entrées multi-sorties (système mimo), G est une matrice des fonctions de transfert entre une entrée et une sortie. Par exemple :

$$\mathbf{G}_{ij}(P) = \frac{\mathbf{Y}_i(P)}{\mathbf{U}_j(P)} \quad (\text{I. 16})$$

On se restreint au cas d'un système à une entrée et une sortie. Exprimons la fonction de Transfert $G(p)$ du système en fonction des matrices A , B et C .

$$\mathbf{G}(P) = \frac{\mathbf{Y}(P)}{\mathbf{U}(P)} \quad (\text{I. 17})$$

En prenant les T.L (transformée de Laplace) des équations d'état et de sortie, on obtient:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{X}(P) = \mathbf{A}\mathbf{X}(P) + \mathbf{B}\mathbf{U}(P) \\ \mathbf{Y}(P) = \mathbf{C}\mathbf{X}(P) \end{cases} \quad (\text{I. 18})$$

En supposant les conditions initiales nulles.

$$\begin{cases} \mathbf{X}(P) = (\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(P) \\ \mathbf{Y}(P) = \mathbf{C}[(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{U}(P) \end{cases} \quad (\text{I. 19})$$

Avec \mathbf{I}_n est la matrice identité de dimension $\mathbf{I}_n^{n \times n}$.

Finalement :

$$\mathbf{G}(P) = \frac{\mathbf{Y}(P)}{\mathbf{U}(P)} = \mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{I. 20})$$

L'inverse d'une matrice est obtenu par :

$$(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})_{\min}}{\det(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})} = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})_{\text{cof}}^T}{\det(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})} \quad (\text{I. 21})$$

En substituant à l'inverse sa définition, il vient :

$$\mathbf{G}(P) = \frac{\mathbf{Y}(P)}{\mathbf{U}(P)} = \left[\mathbf{C} \frac{(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})_{\min}}{\det(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})} \mathbf{B} \right] \quad (\text{I. 22})$$

$\det(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ est un polynôme en P dont les racines sont les valeurs propres β_i de la matrice fondamentale A .

$$\mathbf{G}(P) = \frac{\mathbf{Y}(P)}{\mathbf{U}(P)} = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})_{\min}\mathbf{B}}{\prod_{i=1}^n (P - \beta_i)} \quad (\text{I. 23})$$

On peut reprendre la fonction de transfert sous la forme d'Evans qui met en évidence les pôles P_i et les zéros z_j .

$$\mathbf{G}(P) = \frac{\mathbf{Y}(P)}{\mathbf{U}(P)} = \mathbf{k}_s \frac{\prod_{j=1}^m (P - z_j)}{\prod_{i=1}^n (P - P_i)} \quad (\text{I. 24})$$

En comparant les relations, il apparaît qu'il y a identité entre les pôles P_i de la fonction de transfert et les valeurs propres β_i de la matrice d'état A .

Pour les zéros sont les racines du polynôme $C^T \cdot (PI - A)_{\min} B$

I.3) Réglage d'état (la commande par retour d'état) :

Le réglage par le retour d'état consiste à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en comparant en permanence la valeur de la consigne et l'état réel du système.

I.3.1) Principe du réglage d'état:

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles de la fonction de transfert du système boucle (BF) soient convenablement imposés selon le cahier des charges. Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de modifier convenablement la matrice d'état du système.

Soit un système linéaire stationnaire défini par sa représentation d'état (A,B,C).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (\text{I. 25})$$

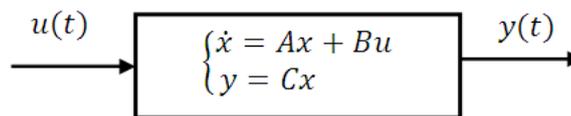


Figure 1-3 Schéma bloc d'un modèle espace d'état en Boucle ouverte

La commande par retour d'état linéaire est construite par rétroaction linéaire de l'état du système sur l'entrée:

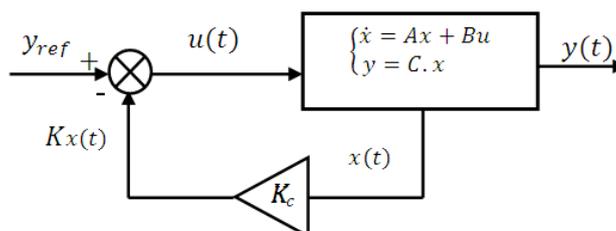


Figure 1-4 Structure de la commande par retour d'état

Dans le cas d'un système à une entrée, la commande par retour d'état s'écrit :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}_{ref}(t) \quad (\text{I.26})$$

avec: $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_n)$

Avec $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^n$: est une matrice appelée gain du retour d'état et $\mathbf{y}_{ref}(t)$: la consigne.

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} + \mathbf{y}_{ref}(t) = -(\mathbf{k}_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{k}_n \mathbf{x}_n) + \mathbf{y}_{ref}(t) \quad (\text{I.27})$$

En tenant compte de l'équation (19), la représentation d'état (17) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}_{ref}(t)] \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}_{ref}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

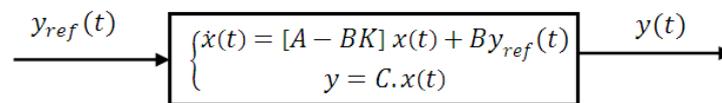


Figure 1-5 Le schéma bloc du retour d'état

Ainsi, la dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la nouvelle matrice d'état $[\mathbf{A} - \mathbf{BK}]$. Ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det[\mathbf{PI} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = 0 \quad (\text{I.29})$$

I.3.2) Réglage d'état par placement de pôles :

Le principe de la méthode de placement de pôles consiste à imposer les polynômes caractéristiques du système en BF :

$$\lambda_{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})}(\mathbf{P}) = \det[\mathbf{PI} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \lambda_{des}(\mathbf{P}) \quad (\text{I.30})$$

$\lambda_{des}(\mathbf{P})$: Polynôme caractéristique du système désiré en BF (même degré) qui est imposé par le cahier des charges.

$\lambda_{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})}(\mathbf{p})$: Polynôme caractéristique du système en BF.

I.3.3) Commande par retour d'état et action intégrale

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

La commande par retour d'état permet de modifier les pôles du système en boucle fermée. Cependant, cette dernière ne permet pas d'assurer une erreur de position nulle. Pour cela on insère un intégrateur dans la chaîne directe. Pour montrer l'intérêt d'une telle commande, on choisit un système SISO.

Le principe est d'insérer un intégrateur dans la chaîne directe comme le montre la figure

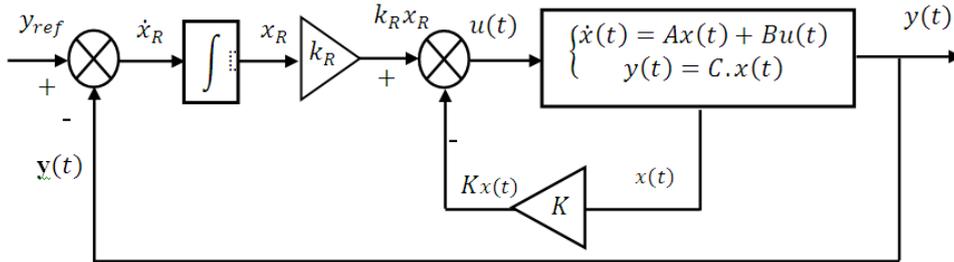


Figure 1-6 Commande par retour d'état et action intégrale

➤ Etablissement du modèle d'état du système en boucle fermée :

A partir du schéma de la figure 8, on écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{y}_{ref}(t) - \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

La loi de commande est définie par :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_R\mathbf{x}_R(t) = -[\mathbf{K}-\mathbf{k}_R] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_R(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

avec: $\mathbf{x}(t) = (x_1 x_2 \dots x_n) \mathbf{e} \mathbf{t} \mathbf{K} = (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_n)$

C'est donc une commande par retour d'état pour le système globale (BF) suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{ref}(t) \quad (\text{I.36})$$

On pose : $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix}$

on aura:
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{y}_{ref}(t) \\ \mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{K}}.\mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

avec: $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K}-\mathbf{k}_R]$

On remplace la commande dans l'équation d'état, on obtient :

$$\dot{\mathbf{z}}_{\infty} = (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})\mathbf{z}_{\infty} + \widehat{\mathbf{D}}\mathbf{Y}_{\text{ref}} \quad (\text{I. 38})$$

La commande par retour d'état intégrale doit assurer :

- 1) la stabilité du système en boucle fermée.
- 2) une erreur nulle en régime permanent.

En régime permanent, les différents signaux convergent vers une valeur finie :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t)] = \mathbf{x}_{\infty} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}_{\text{R}}(t)] = \mathbf{x}_{\text{R}\infty} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{u}(t)] = \mathbf{u}_{\text{e}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{y}_{\text{ref}}(t)] = \mathbf{Y}_{\text{ref}} \end{cases} \quad (\text{I. 39})$$

En régime permanent, à partir de l'équation (I.31), le calcul des points singuliers du système en BF donne alors l'équation statique :

$$\dot{\mathbf{z}}_{\infty} = (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})\mathbf{z}_{\infty} + \widehat{\mathbf{D}}\mathbf{Y}_{\text{ref}} \quad (\text{I. 40})$$

On établit la dynamique de l'erreur à partir de l'équation (I.31) et (I. 34)

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\infty} \\ \mathbf{x}_{\text{R}}(t) - \mathbf{x}_{\text{R}\infty} \end{bmatrix} = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_{\infty} + \mathbf{e}\mathbf{y}_{\text{ref}}(t) = \mathbf{Y}_{\text{ref}}$$

La dynamique de l'erreur est exprimée par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) - (\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})\mathbf{e}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{I. 41})$$

Pour montrer que la dynamique de l'erreur est stable et tend vers zéro pour des temps suffisamment grands, il faut choisir :

$\widehat{\mathbf{K}}$ tel que $(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})$ soit stable.

Par ailleurs, le choix des pôles de $(\widehat{\mathbf{A}} - \widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}})$ permet d'imposer la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro et donc de $\mathbf{x}(t)$ vers \mathbf{x}_{∞} . Le problème de la synthèse d'une commande par retour d'état avec action intégrale revient donc au calcul classique d'un retour d'état sur un système augmenté.

Exemple : Soit l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{3}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

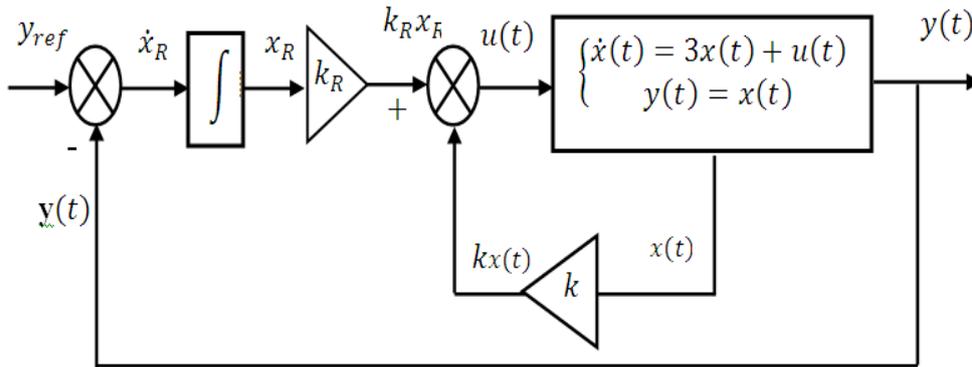


Figure 1-7 Système en boucle fermée

Le cahier des charges impose le polynôme désiré :

$$\lambda_{(\text{des})} = P^2 + 5P + 25.$$

- 1) Etablir le modèle d'état du système en boucle fermée :
- 2) Etablir les équations en régime permanent
- 3) Etablir la dynamique de l'erreur :
- 4) Calculer les gains du correcteur d'état

- 1) Etablir le modèle d'état du système en boucle fermée :

A partir du schéma de la figure 9, on écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{3}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{3}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{ref}}(t)$$

La loi de commande est définie par:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k}\mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_R\mathbf{x}_R(t) = -[\mathbf{k}-\mathbf{k}_R] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_R(t) \end{bmatrix}$$

On pose : $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix}$

on obtient :
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{y}_{\text{ref}}(t) \\ \mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{K}}.\mathbf{z}(t) \end{cases}$$

avec : $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{k} - \mathbf{k}_R]$

2) Etablir les équations en régime permanent

En régime dynamique :
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{y}_{\text{ref}}(t) \\ \mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{K}}.\mathbf{z}(t) \end{cases}$$

3) Etablir la dynamique de l'erreur :

La convergence des états, vers leurs valeurs en régime permanent, est exprimée par la dynamique de l'erreur :

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_R(t) - \mathbf{x}_{R_\infty} \end{bmatrix} = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\infty$$

On obtient : $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}(t) + (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{z}_\infty + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{y}_{\text{ref}}$

En régime permanent : $(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{z}_\infty + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{y}_{\text{ref}-0} = \mathbf{0}$

donc : $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}(t)$

Finalement, la dynamique de l'erreur est donc gouvernée par l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) - (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$$

4) Calculer les gains du correcteur d'état

Le choix des pôles (valeurs propres), de la matrice $(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})$, permet d'imposer la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro et donc de $\mathbf{x}(t)$ vers \mathbf{x}_∞ .

Pour cela on doit imposer un polynôme caractéristique associé à $(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})$ selon le cahier des charges.

Le polynôme caractéristique associé à $(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})$ s'écrit :

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

$$(\hat{A} - \hat{B}\hat{K}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 - k_R] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 - k_R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - k_1 & k_R \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[PI - (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})] = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 - k_1 & k_R \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P - 3 + k_1 & -k_R \\ 1 & P \end{pmatrix}$$

$$\det[PI - (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})] = P(P - 3 + k_1) + k_R$$

$$\lambda_{[\hat{A} - \hat{B}\hat{K}]}(P) = P^2 + (k_1 - 3)P + k_R$$

Le cahier des charges impose le polynôme désiré : $P_{(des)} = P^2 + 5P + 25$.

Par identification, on en déduit alors les gains du correcteur :

$$\lambda_{[\hat{A} - \hat{B}\hat{K}]}(P) = \lambda_{(des)}(P) \Rightarrow \begin{cases} k_1 - 3 = 5 \\ k_R = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_R = 25 \end{cases}$$

Le schéma bloc du système asservi figure 9.

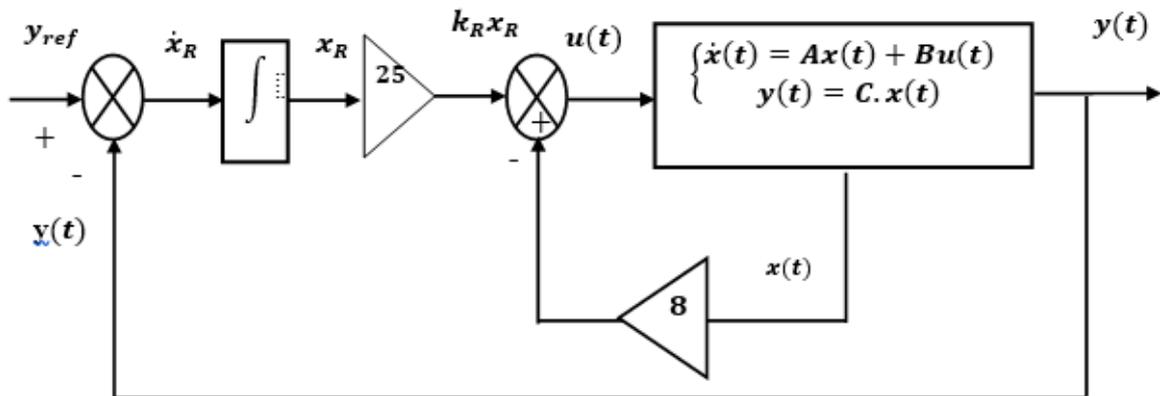


Figure 1-8 Influence des pôles sur le comportement dynamique en BF

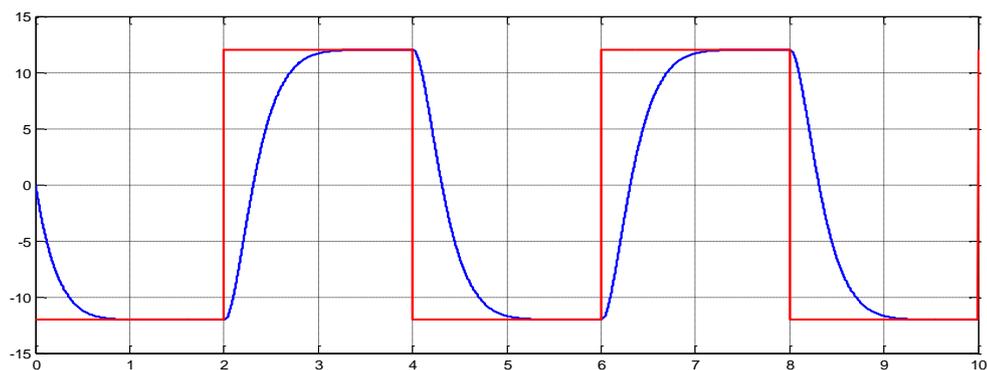


Figure 1-9 Allure de la vitesse poles= $[-85, -5-2i, -5+2i]$

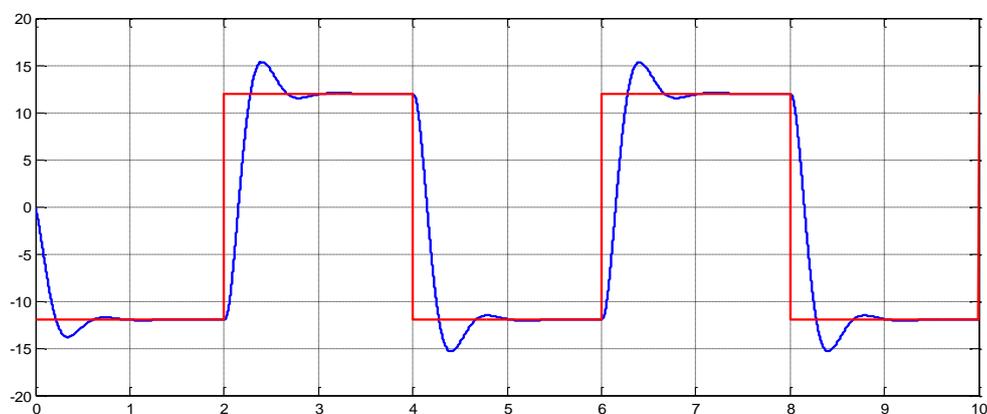


Figure 1-10 Allure de la vitesse pôles= $[-85, -5-8i, -5+8i]$

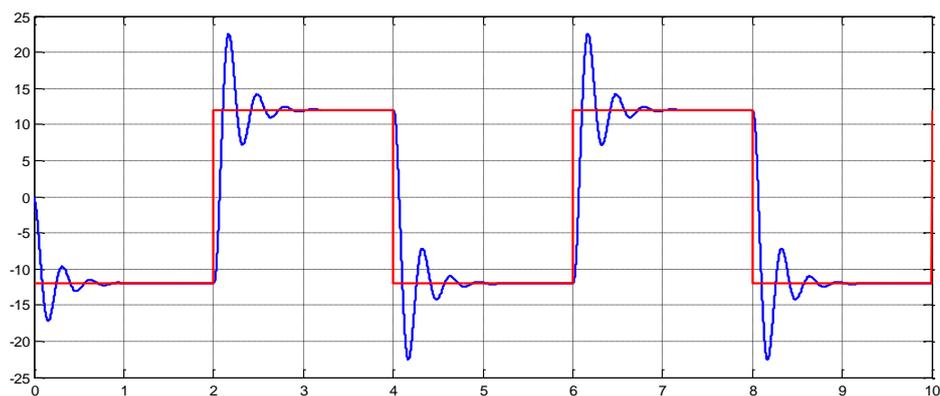


Figure 1-11 Pôles = $[-85, -5-20i, -5+20i]$

I.4) Observateur et estimateur de d'état

I.4.1) Position du problème

L'application de la commande par retour d'état nécessite la mesure de toutes les variables d'état.

En réalité, les systèmes physiques sont très peu instrumentés, les raisons sont :

Le cout, La difficulté d'accéder a certaines variables, la fiabilité, l'encombrement...

On cherche à commander un système dont le modèle d'état est :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

L'état $\mathbf{x}(t)$ du système n'est pas accessible à la mesure. Seules l'entrée \mathbf{u} et la sortie $\mathbf{y}(t)$ qui sont mesurables. On cherche à estimer l'état courant du système pour calculer la commande \mathbf{u} . Pour cela, on intègre un simulateur du système à commander appelé observateur.

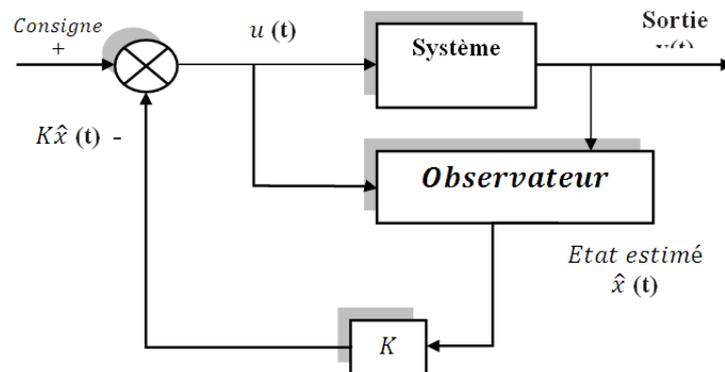


Figure 1-12 Réglage d'état avec observateur

Son rôle dans la structure de commande est de donner une bonne estimation du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ afin d'appliquer la commande par retour d'état.

I.4.2) Observateurs de Luenberger

Calcul du gain de l'observateur Φ

Un observateur d'état est un système qui, excité par l'entrée et la sortie du système, est capable de reconstruire (estimer) de manière asymptotique l'état courant du système à observer. Sa structure est basée sur le modèle d'état du système:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

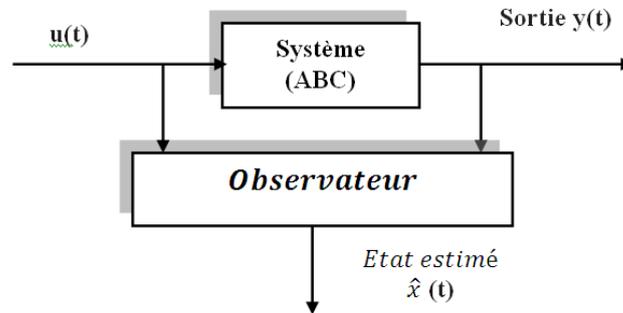


Figure 1-13 Observateur Luenberger

I.4.3) Observateurs de Luenberger

On appelle observateur (de Luenberger) du système (I.37) un système qui est décrit par le schéma fonctionnel suivant :

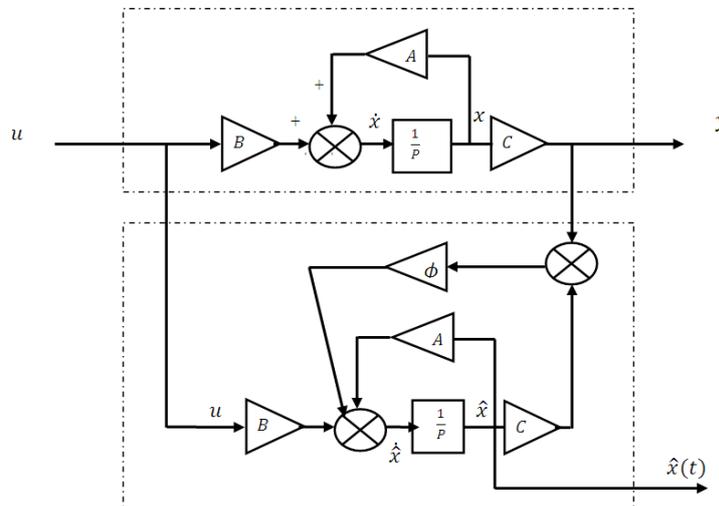


Figure 1-14 Schéma de l'Observateur Luenberger

Le modèle de l'observateur est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \phi[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

Avec :

- ✓ $\hat{\mathbf{x}}(t)$ est le vecteur d'état estimé
- ✓ $\hat{\mathbf{y}}(t)$ est la sortie estimée
- ✓ Φ est le (la matrice de) gain de l'observateur.

Calcul du gain de l'observateur Φ

L'objectif est de calculer convenablement la matrice Φ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \quad (\text{I. 39})$$

Si l'erreur converge asymptotiquement vers zéro, alors $\hat{\mathbf{x}}(t)$ converge asymptotiquement vers $\mathbf{x}(t)$.

Calculons la dynamique de l'erreur $\mathbf{e}(t)$:

A partir des équations (I. 37) et (I. 38), on obtient :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(t) + \Phi\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{I. 40})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(t) + \Phi\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{I. 41})$$

(I. 41) – (I. 36) il vient que :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}](\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) \quad (\text{I. 42})$$

On obtient la relation suivante:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]\mathbf{e}(t) \quad (\text{I. 43})$$

Avec : $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$

La matrice $[\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]$ doit alors être choisie de manière à assurer la stabilité asymptotique de $\mathbf{e}(t)$ et la convergence de $\mathbf{e}(t)$ vers 0.

Choisir les valeurs propres de $(\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C})$

$$\lambda_{(\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C})}(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]) = \lambda_{\text{des}}(\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^n (\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \quad (\text{I. 44})$$

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

Exemple : Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (1 \quad 1)$$

Pour: $n=2$ $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$

La dynamique du système à observer

$$\lambda_{(A)}(P) = \det(\mathbf{P}\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} P+1 & 0 \\ 0 & P+2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(A)}(P) = (P+1)(P+2)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $P_1 = -2$ $P_2 = -1$

Choix des valeurs propres à imposer

On impose une dynamique plus rapide que le système

$$\lambda_{\text{des}}(P) = (P - \lambda_1)(P - \lambda_2)$$

$$\lambda_1 = 2P_1 = -4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2P_2 = -2$$

$$\lambda_{\text{des}}(P) = (P+4)(P+2) = P^2 + 6P + 8$$

Calcul du gain de l'observateur

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = \lambda_{\text{des}}(P)$$

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = \det(\mathbf{P}\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}])$$

$$[\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} (1 \quad 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi_1\Phi_1 \\ \Phi_2\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \Phi_1 - \Phi_1 \\ -\Phi_2 - 2 - \Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 - \Phi_1 - \Phi_1 \\ -\Phi_2 - 2 - \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P+1 + \Phi_1\Phi_1 \\ \Phi_2P + 2 + \Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = \det(\mathbf{P}\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]) = (P+1 + \Phi_1)(P+2 + \Phi_2) - \Phi_1\Phi_2$$

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = \det(\mathbf{P}\mathbf{I} - [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]) = P^2 + (3 + \Phi_2 + \Phi_1)P + (1 + \Phi_1)(2 + \Phi_2) - \Phi_1\Phi_2$$

Chapitre I Commande dans l'espace d'état

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = P^2 + (3 + \Phi_2 + \Phi_1)P - \Phi_1\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2 + 2\Phi_1 + 2$$

$$\lambda_{(A-\Phi C)}(P) = P^2 + (3 + \Phi_2 + \Phi_1)P + \Phi_2 + 2\Phi_1 + 2$$

$$P^2 + (3 + \Phi_2 + \Phi_1)P + \Phi_2 + 2\Phi_1 + 2 = P^2 + 6P + 8$$

$$\begin{cases} \Phi_2 + 2\Phi_1 = 6 \\ \Phi_2 + \Phi_1 = 3 \end{cases} \begin{cases} \Phi_1 = 3 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \Phi\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(t) + \Phi \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Chapitre II :
Commande optimale LQR

II.1) Introduction :

L'objectif de la commande optimale est de chercher parmi toutes les commandes possibles la solution optimale qui permet à la fois :

- de vérifier des conditions initiales et finales donnés.
- de satisfaire diverses contraintes imposées.
- d'optimiser un critère choisi.

D'un point de vue formel, le problème de commande optimale est un problème de minimisation ou de maximisation d'une fonctionnelle.

II.2) Formulation du problème de la commande optimale

On considère un système dynamique continu, dont le comportement est décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n \\ \mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^r \\ \mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R}^m \\ \mathbf{f}(t) = [\mathbf{f}_1(t), \dots, \mathbf{f}_n(t)]^T \in \mathfrak{R}^n \\ \mathbf{g}(t) = [\mathbf{g}_1(t), \dots, \mathbf{g}_m(t)]^T \in \mathfrak{R}^m \end{array} \right.$$

Les contraintes sont:

Les variables d'états : $\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{X}_{\min}, \mathbf{X}_{\max}] \subset \mathfrak{R}^n$ (II. 2)

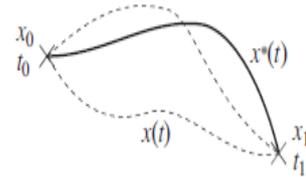
Les commandes : $\mathbf{u}(t) \in [\mathbf{U}_{\min}, \mathbf{U}_{\max}] \subset \mathfrak{R}^r$ (II. 3)

Les sorties : $\mathbf{y}(t) \in [\mathbf{Y}_{\min}, \mathbf{Y}_{\max}] \subset \mathfrak{R}^m$ (II. 4)

Le temps : $t \in [t_0, t_f] \subset \mathfrak{R}^+$ (II. 5)

Ces contraintes correspondent à des propriétés physiques du système réel.

La commande optimale consiste à calculer un vecteur de commande $\hat{\mathbf{u}}(t)$ satisfaisant la contrainte (4) qui transfère le vecteur d'état du système (1) d'une valeur initiale $\mathbf{x}_0(t=t_0)$ à une valeur finale $\mathbf{x}_f(t=t_f)$, (ensemble objectif) en minimisant un critère d'optimisation et en satisfaisant la contrainte (5).



II.2.1) Critère d'optimisation :

Il s'agit d'une grandeur mathématique désignée dans la littérature technique selon le domaine : critère (en automatique), fonction coût (en économie), fonctionnelle (en mathématique). Dans ce qui suit, on utilise le terme critère.

La formulation générale du critère d'optimisation est conçue selon les propriétés physiques du système considéré et l'objectif du problème d'optimisation. On peut considérer :

- minimiser un temps ;

Chapitre II : Commande optimale LQR

- optimiser une amplitude ;
- maximiser un profit où un revenu;
- minimiser une erreur ;
- minimiser une consommation.

II.2.2) Les conditions aux limites: (conditions initiales et finales).

Dans le cas réel les conditions aux limites sont déterminées comme suit :

- Les conditions initiales t_0 et $\mathbf{x}_0(\mathbf{t} = \mathbf{t}_0) = [\mathbf{x}_1(\mathbf{t}_0), \mathbf{x}_2(\mathbf{t}_0) \dots \dots \mathbf{x}_n(\mathbf{t}_0)]^T$ sont fixées et connues ;
- Les conditions finales t_f et $\mathbf{x}_f(\mathbf{t} = \mathbf{t}_f) = [\mathbf{x}_1(\mathbf{t}_f), \mathbf{x}_2(\mathbf{t}_f) \dots \dots \mathbf{x}_n(\mathbf{t}_f)]^T$ sont établies en fonction du but qu'on veut atteindre.

II.3) Principe de Calcul de la Commande optimale :

Soit le système (1) décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \end{cases}$$

\mathfrak{J} : la fonction coût à minimiser :

$$\mathfrak{J} = \mathbf{S}(\mathbf{x}_f, \mathbf{t}_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{V}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}] dt \quad (\text{II. 6})$$

Avec : x_0 et t_0 sont fixées et connues,

x_f et t_f peuvent être : libres ; partiellement libres ou fixés

où « V » et « S » sont des fonctions scalaires.

- $\mathbf{S}(\mathbf{x}_f, \mathbf{t}_f)$: représente le coût sur le vecteur d'état final $\mathbf{x}(t_f)$ par-rapport à sa valeur désirée x_f .
- $\mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$: est évaluée le long de la trajectoire $\mathbf{x}(t)$, obtenue dans l'espace d'état pour $\mathbf{t} \in [t_0, t_f]$.

On adopte les hypothèses suivantes :

1) $\mathbf{S}(\mathbf{x}_f, \mathbf{t}_f)$ et $\mathbf{V}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}]$ sont continues, dérivables par-rapport à $(\mathbf{x}(t), t)$ et admettent des dérivées première et seconde continues sur $[t_0, t_f]$.

2) $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = [\mathbf{u}_1(\mathbf{t}), \dots \dots \mathbf{u}_r(\mathbf{t})]^T$ où les $u_i(t)$, pour $i=1, \dots, n$, sont continues, indépendantes les unes des autres et les $d^j u_i(t)/dt^j$ sont continues;

II.3.1) Principe du maximum de Pontriaguin (PMP)

On introduit le vecteur des multipliers de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(t) = [\boldsymbol{\lambda}_1(t), \dots, \boldsymbol{\lambda}_n(t)]^T$, appelé aussi vecteur adjoint (co-état), associé aux « n » équations d'état du système considéré.

On définit l'Hamiltonien comme une fonction scalaire et elle est définie comme suit :

$$\mathcal{H}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t}] = \mathbf{V}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{t}] + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) \quad (\text{II. 7})$$

Les conditions nécessaires d'optimalité en fonction de l'Hamiltonien:

$$1) \text{ Équation d'états du système : } \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) \quad (\text{II. 8})$$

$$2) \text{ Équation d'états du système adjoint : } \dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) \quad (\text{II. 9})$$

$$3) \text{ La commande optimale : } \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \mathbf{0} \quad (\text{II. 10})$$

On a 2n équations différentielles du premier ordre, elles nécessitent le même nombre de conditions initiales ainsi que les instants limites t_0 et t_f , donc 2n+2 valeurs limites à connaître.

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = t_0) = [\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0) \dots \dots \dots \mathbf{x}_n(t_0)]^T$$

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t = t_f) = [\mathbf{x}_1(t_f), \mathbf{x}_2(t_f) \dots \dots \dots \mathbf{x}_n(t_f)]^T$$

La solution optimale $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)$ correspond au minimum du critère \mathfrak{J} , qui la solution du système d'équation (8)-(10) sur $[t_0, t_f]$.

II.3.2) Détermination des valeurs aux conditions limites :

Dans le problème de commande optimale à résoudre, t_0 et $\mathbf{x}_0(t = t_0)$ sont fixées et connues, Il resten+1(t_f et \mathbf{x}_f) conditions finales à déterminer. Pour cela, on utilise les conditions limites ou conditions de transversalités.

Dans le cas général, où les conditions finales t_f et $\mathbf{x}(t_f)$ sont libres, ces conditions s'écrivent:

$$\left[\widehat{\mathcal{H}} + \frac{\partial S}{\partial t} \right] \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \lambda(t) \right] \delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0} \quad t = t_f \quad (\text{II.11})$$

Selon la définition des valeurs des conditions finales, on a différents problèmes de commande optimale :

➤ Si $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ et t_f sont fixés, alors $\delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0}$ et $\delta t_f = \mathbf{0}$:

Alors la condition finale est satisfaite

➤ Si \mathbf{x}_f est fixé alors $\delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0}$ et t_f reste libre de choix

La condition limite (11) devienne : $\left[\widehat{\mathcal{H}} + \frac{\partial S}{\partial t} \right] = \mathbf{0} \quad t = t_f$

➤ Si t_f est fixé, alors $\delta t_f = \mathbf{0}$ à $t = t_f$, : alors la condition finale est :

La condition limite (II.11) devienne : $\lambda(t) = \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\text{opt}} \quad t = t_f$

NB : Les conditions aux limites sont nécessaires pour le calcul de la solution optimale.

Exemple :

On considère le système linéaire du premier ordre : $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t)$

Partant de l'état initial donne $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Appliquer le principe du maximum pour résoudre le problème suivant :

Chapitre II : Commande optimale LQR

1) Au bout du temps T donné, amener le système en $x(T) = 0$, tout en minimisant le critère suivant:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2) dt$$

Solution :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{V}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2)$$

1) Le hamiltonien s'écrit : $\mathcal{H} = \mathbf{V}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2) + \lambda \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{H} \\ \dot{\hat{\lambda}}(t) &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{H} &= 0 \end{aligned}$$

2) La commande optimale :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{H} = 0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2) + \lambda \mathbf{u} \right) \Big|_{\text{opt}} = \hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{\lambda}(t) = 0$$

d'où:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\hat{\lambda}(t)$$

3) L'équation d'état :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2) + \lambda \mathbf{u} \right) = \mathbf{u}(t)$$

d'où : $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) = -\hat{\lambda}(t)$

4) Le système d'état adjoint s'écrit :

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \omega^2 \mathbf{x}^2) + \lambda \mathbf{u} \right) = -(\omega^2 \mathbf{x})$$

d'où:

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = -\omega^2 \hat{\mathbf{x}}$$

5) Le système d'équation différentiel

En reportant la commande optimale dans l'équation d'état, on obtient le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = -\hat{\lambda}(t) \\ \dot{\hat{\lambda}}(t) = -\omega^2 \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \omega^2 \hat{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\omega t} + \mathbf{B}e^{-\omega t} \\ \hat{\lambda}(t) = -\omega(\mathbf{A}e^{\omega t} - \mathbf{B}e^{-\omega t}) \end{cases}$$

6) Conditions aux limites :

$$x(t=0) = x_0 \text{ est donne, } \lambda(0) \text{ est inconnu : } \hat{x}(t = 0) = Ae^{\omega 0} + Be^{-\omega 0} = A + B = x_0$$

$$x(t=T) = 0 \text{ est donne, } \lambda(T) \text{ est inconnu : } \hat{x}(t = T) = Ae^{\omega T} + Be^{-\omega T} = x_f = 0$$

La résolution de ces deux équations en A, B donne :

$$\begin{cases} A = -\frac{e^{-\omega T}}{e^{\omega T} - e^{-\omega T}} x_0 \\ B = \frac{e^{\omega T}}{e^{\omega T} - e^{-\omega T}} x_0 \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = -\hat{\lambda}(t)$$

On en déduit la commande optimale : $\hat{u}(t) = \hat{x}(t) = \omega A e^{\omega t} - \omega B e^{-\omega t}$

II.4) Commande Linéaire Quadratique LQ (LQR):

Le système à commander est linéaire et le critère à minimiser est quadratique basée sur les énergies de commande et énergie de sortie. Ces systèmes sont d'une grande importance en pratique. En effet un critère quadratique est souvent très naturel dans un problème, par exemple lorsqu'on veut minimiser le carré de l'écart par rapport à une trajectoire (problème de poursuite). Le modèle d'état d'un système linéaire stationnaire est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{(II. 12)}$$

La dimension des vecteurs des différents vecteurs est définie :

$$\text{Avec : } \begin{cases} x(t) \in \mathfrak{R}^n \\ u(t) \in \mathfrak{R}^r \\ y(t) \in \mathfrak{R}^m \\ A: \mathfrak{R}^{n \times n} \\ C: \in \mathfrak{R}^m \\ B: \in \mathfrak{R}^m \end{cases}$$

Dans le cas du réglage d'état classique, nous avons choisi nous-mêmes les pôles (ou valeurs propres) du système bouclé afin de pouvoir calculer la matrice de retour K, d'où le nom de placement de pôles. Pour la commande LQR, un algorithme détermine automatiquement les pôles du système bouclé selon un critère J.

La Commande LQ Régulateur est encore connue sous le nom de "Gain de Kalman". Il consiste à trouver une loi de commande optimale u(t) en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées. Le système contrôlé par le gain de Kalman ainsi calculé, est illustré en schéma bloc à la figure suivante :

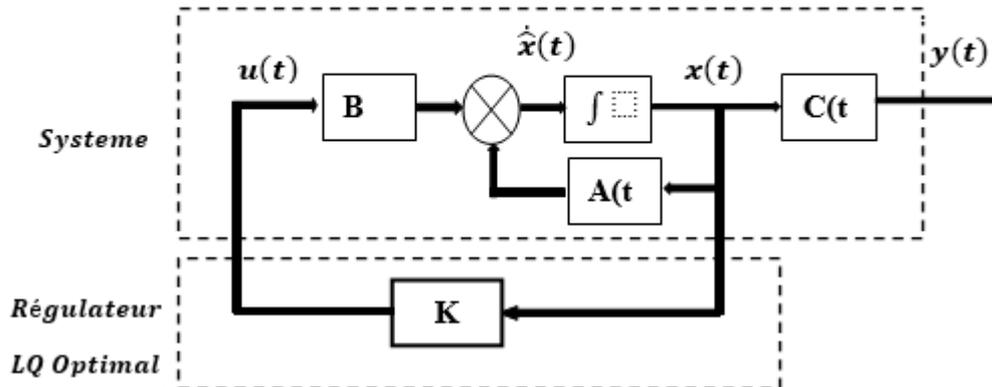


Figure II-15 Représentation du système contrôlé par un régulateur LQ

II.4.1) Commande LQR à horizon fini

On cherche à déterminer un vecteur de commande optimale $u(t)$ qui minimise le critère quadratique, sur l'horizon (t_0, t_f) , suivant:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} x_f^T G x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (II. 13)$$

Les matrices Q, R et S étant symétriques avec Q et S ≥ 0 et R > 0 .

➤ Formulation de l'Hamiltonien:

A partir du Critère quadratique (13), on détermine l'expression du Lagrangien et l'Hamiltonien :

$$\left\{ \begin{array}{l} L[x(t), u(t), t] = \frac{1}{2} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T R u) \\ \mathcal{H}[x, u, \lambda, t] = \frac{1}{2} (x^T \cdot Q \cdot x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu) \end{array} \right. \quad (II. 14)$$

Calcul des équations canoniques et l'équation algébrique :

La solution optimale $(u(t), x(t), \lambda(t))$ qui minimise le critère \mathfrak{J} est la solution des équations d'Euler-Lagrange sur $[t_0, t_f]$. L'hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

La commande optimale : $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0 \Rightarrow u = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (II. 15)$

Équation d'états du système : $\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{H} = Ax + Bu$
 $\Rightarrow \dot{x}(t) = Ax - BR^{-1} B^T \lambda \quad (II. 16)$

Équation d'états du système adjoint :

$\dot{\hat{\lambda}}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, \lambda, t) \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = -Qx - A^T \lambda \quad (II. 17)$

Chapitre II : Commande optimale LQR

Sachant que R est une matrice définie positive alors, elle est réversible, on obtient l'expression de $\mathbf{u}(t)$:

Les équations d'état (II.16) et (II.17) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé système hamiltonien :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{(II. 18)}$$

Le second membre (18) un polynôme en x pour cela on cherche $\boldsymbol{\lambda}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad \text{(II. 19)}$$

La commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad \text{(II. 20)}$$

$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$ avec: $\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)$: Gain de Kalman

Calcul de la matrice P(t) solution de l'équation de Riccati:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \quad \text{(21)}$$

En tenant compte des équations (12) (15) et (17) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \text{(II. 12)} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) & \end{cases}$$

$$u = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad \text{(II.15)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \text{(II. 17)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = -\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ou bien:

$$(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{(II. 22)}$$

On obtient ainsi une équation différentielle matricielle dite de Riccati.

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \text{(II. 23)}$$

La condition finale sur P(t) : $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{G}(t_f)$

Dans le cas de l'horizon fini, t_f est fixé. La condition aux bornes (relation 11) est réduite à :

$$\left[\widehat{\mathcal{H}} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{t}} \right] \delta \mathbf{t}_f + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) \right] \delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0} \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_f \delta \mathbf{t}_f = \mathbf{0} \quad \text{(II. 11)}$$

$$\lambda(t) = \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\text{opt}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \right) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_f$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{G}(t_f)\mathbf{x}_f = \mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}_f \Rightarrow \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{G}(t_f) \quad \text{(II. 24)}$$

II.4.2) Commande LQ à horizon infini

En régime permanent, c'est-à-dire pour t tend vers l'infini, en supposant que $P(t)$ converge, nous aurons alors : $\dot{P}=0$

Dans ce cas P est une constante solution de l'équation algébrique de Riccati :

On calcule un vecteur de commande optimale $\mathbf{u}(t)$ qui minimise le critère quadratique suivant:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (\text{II.25})$$

Sous

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{II.26})$$

On montre que ce critère est fini si le système est stabilisable à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $\mathbf{K}(t)$ tel que les valeurs propres de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ soient à partie réelle négative).

Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un problème LTI (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique : $\mathbf{u}(t) = \mathbf{k} \mathbf{x}(t)$

Où \mathbf{K} est exprimé par : $\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$

où P vérifie l'équation algébrique de Riccati : ($\dot{P} = 0$)

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{II.27})$$

II.4.3) Choix des pondérations :

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice \mathbf{Q} par un scalaire α (accélération avec $\alpha > 1$ et décélération avec $\alpha < 1$) jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de \mathbf{Q} correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de \mathbf{R} leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier de charges.

Exemple Calcul d'une commande optimale en BF à horizon infini avec critère quadratique pour un système linéaire stationnaire.

Soit le modèle d'état d'un système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On cherche à déterminer un vecteur de commande optimale $\mathbf{u}(t)$ qui minimise le critère quadratique suivant :

Chapitre II : Commande optimale LQR

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

- 1) Vérifier que les matrices sont réelles et positive
- 2) déterminer P solution de l'équation algébrique de Riccati
- 3) Calcul de la matrice du gain

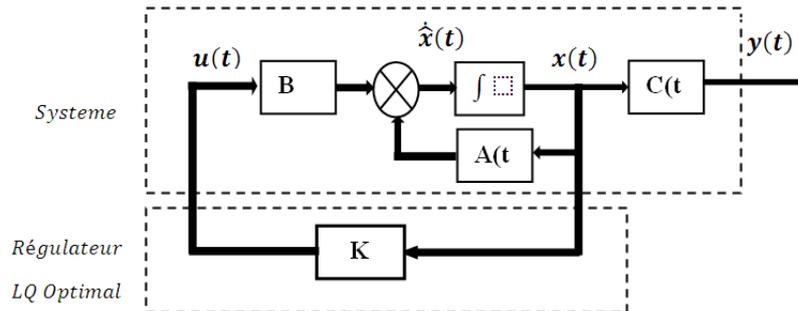


Figure II-16 Représentation du système contrôlé par un régulateur LQ

Dans le cas d'une commande optimale en BF à horizon infini avec critère quadratique pour un système linéaire stationnaire.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

Ret \mathbf{Q} sont des matrices de pondération. Ces matrices sont définies positives et leurs éléments sont choisis de sorte à assurer une pondération relative aux variables d'état individuelles et à la loi de commande à l'entrée du système.

La commande est un retour d'état statique :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

Où \mathbf{K} est exprimé par : $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$

\mathbf{K} vecteur des gains optimal du retour d'état.

où \mathbf{P} solution de l'équation algébrique de Riccati: ($\dot{\mathbf{P}} = 0$)

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

$$\text{On a } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}$$

Chapitre II : Commande optimale LQR

$$PA = \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 P_1 \\ 0 P_2 \end{pmatrix}$$

$$A^T P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_1 P_2 \end{pmatrix}$$

$$PBR^{-1}B^T P = \frac{1}{r} PBB^T P = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 P_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_2^2 P_2 P_3 \\ P_2 P_3 P_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 P_1 \\ 0 P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_1 P_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_2^2 P_2 P_3 \\ P_2 P_3 P_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{r} P_2^2 P_1 - \frac{1}{r} P_2 P_3 \\ P_1 - \frac{1}{r} P_2 P_3 \quad q + 2P_2 - \frac{1}{r} P_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{r} P_2^2 = 0 \\ q + 2P_2 - \frac{1}{r} P_3^2 = 0 \\ P_1 - \frac{1}{r} P_2 P_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = \sqrt{r} \\ P_3 = \sqrt{rq + 2r\sqrt{r}} \\ P_1 = \frac{1}{r} \sqrt{r} \sqrt{rq + 2r\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{rq + 2r\sqrt{r}} \end{cases}$$

Calcul de la matrice du gain

$$K = R^{-1}B^T P = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ P_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_2 P_3 \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{1}{r} \left(\sqrt{r} \sqrt{rq + 2r\sqrt{r}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{rq + 2r\sqrt{r}} \right)$$

Rappel une matrice réelle symétrique est définie positive ssi les déterminants de n mineures principaux sont >0

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1^{er} mineur $|2| = 2 > 0$

Chapitre II : Commande optimale LQR

$$2^{\text{eme}} \text{ mineur } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -12 & \end{vmatrix} = 5 > 0$$

$$3^{\text{eme}} \text{ mineur } \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -12 & -1 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -12 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -12 & \end{vmatrix} = 2 * 3 + 3 = 9 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1^{\text{er}} \text{ mineur } |3| = 3 > 0$$

$$2^{\text{eme}} \text{ mineur } \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$3^{\text{eme}} \text{ mineur } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$4^{\text{eme}} \text{ mineur principal } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 * 1 * \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

Chapitre III: Commande Prédictive

III.1) Principe de la commande prédictive :

Le principe de la commande prédictive consiste à créer pour le système à commander un effet anticipatif par rapport à une trajectoire à suivre connue à l'avance. Cela en se basant sur la prédiction du comportement futur du système et en minimisant un certain critère de performances (fonction coût).

Les concepts de la commande prédictive sont:

- Utilisation d'un modèle pour construire la prédiction du futur ;
- Connaissance de la trajectoire à suivre ;
- Minimisation d'un critère de performance
- Utilisation d'un algorithme de résolution produisant en temps réel la solution optimale

Le principe de la commande prédictive est illustré dans la Figure (1)

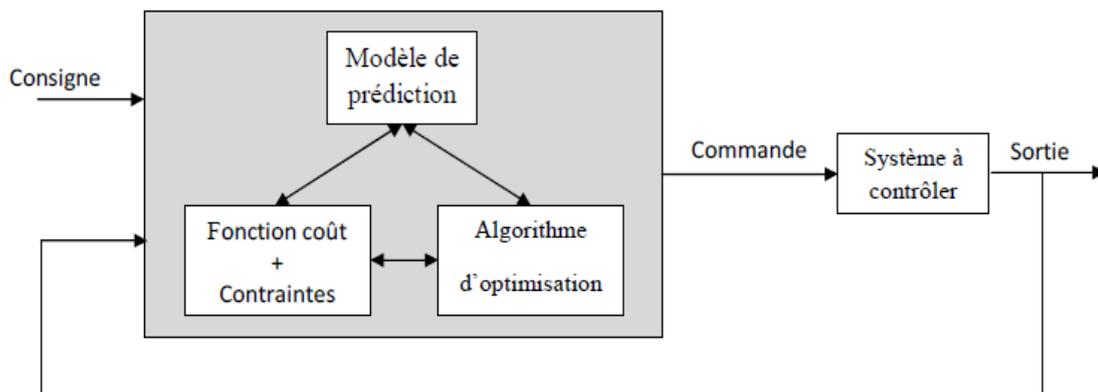


Figure III-17 Principe de la commande prédictive

A chaque période d'échantillonnage du contrôleur :

- Un calcul des prédictions des variables contrôlées est effectué jusqu'à un horizon de temps N (horizon de prédiction).
- Une séquence de commande est calculée, en minimisant un certain critère de performances.
- Cette procédure est ensuite répétée: c'est le principe de l'horizon fuyant. Ainsi à chaque période d'échantillonnage, un problème d'optimisation doit être résolu en temps réel.

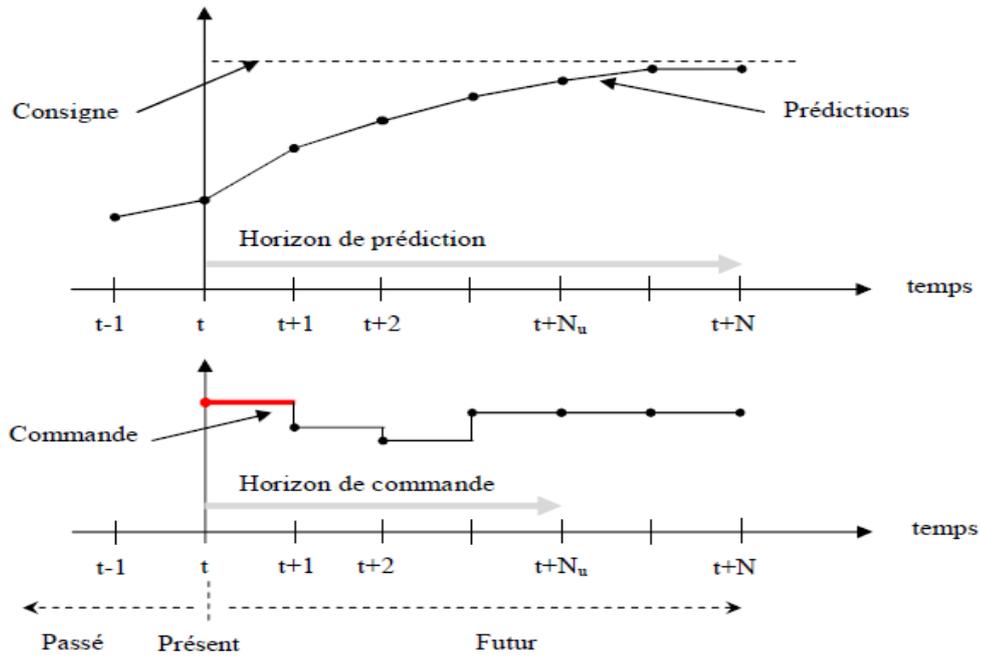


Figure III-18 Principe de la commande prédictive.

Exemple : le conducteur d'un véhicule connaît la trajectoire de référence désirée à l'avance (la route) sur un horizon de commande fini (son champ visuel), et en prenant en compte les caractéristiques de la voiture (modèle du véhicule), il décide quelles actions faut-il réaliser afin de suivre la trajectoire désirée : accélérer, freiner ou tourner le volant.

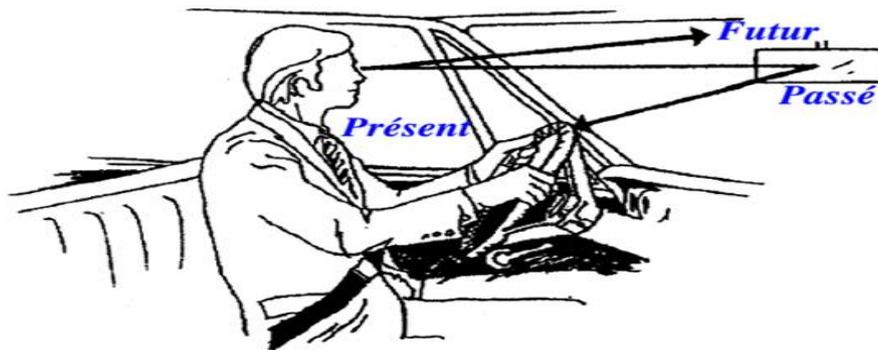


Figure III-19 :Exemple Principe de la commande prédictive

Les différents algorithmes de la commande prédictive les plus utilisées sont :

- La commande prédictive généralisée (GPC) : Generalized Predictive Control
 - La commande prédictive à base de modèle : (MBPC) Model (Based) Predictive Control
- ou (MPC : Model Predictive Control**

➤ La commande prédictive fonctionnelle (PFC).

III.2) Notions de la géométrie différentielle :

III.2.1) Système mono-entrée/mono-sortie : SISO

On considère un système non linéaire avec une seule entrée et une seule sortie (SISO) décrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \dots, \dots, \mathbf{x}_n(t)]^T \in \mathfrak{R}^n \\ \mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R} \\ \mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \dots, \mathbf{f}_n(\mathbf{x})]^T \in \mathfrak{R}^n \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x})]^T \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

$\mathbf{x}(t)$: Vecteur d'état

$\mathbf{u}(t)$: Vecteur d'entrée du système ;

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$: Fonction analytique de \mathbf{x} .

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})$: champs de vecteurs supposés infiniment différentiables.

Définition 1: Dérivée de Lie :

la dérivée temporelle de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ s'écrit:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t)] = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (\text{III.2})$$

La dérivée de Lie de \mathbf{h} suivant le champ de vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire définie par :

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{III.3})$$

Les dérivée de Lie d'ordre supérieur sont donnée par :

$$\mathbf{L}_f^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_f (\mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))$$

La k^{eme} dérivée de Lie : $\mathbf{L}_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_f [\mathbf{L}_f^{(k-1)}(\mathbf{x})]$ (III.4)

La dérivée de Lie de \mathbf{h} suivant le champ de vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire définie par :

Chapitre III: Commande Prédicative

$$\mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{III. 5})$$

La dérivée de Lie de $\mathbf{L}_f \mathbf{h}$ suivant le champ de vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire définie par :

$$\mathbf{L}_g(\mathbf{L}_f \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad (\text{III. 6})$$

Définition 2: (Degré relatif) : Le degré relatif (ρ) de la sortie y (du système) est le nombre de fois qu'il faut dériver $y(t)$ pour faire apparaître la commande u

Si on dérive la sortie du système d'équation, on obtient:

$$\dot{y}(t) = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (\text{III. 7})$$

On exprime avec les dérivées de Lie :

$$\dot{y}(t) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (\text{III. 8})$$

➤ Si $\mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Le degré relatif } \rho > 1 \\ \dot{y}(t) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (\text{III. 9})$

On passe à la deuxième dérivée :

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt} \dot{y}(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \frac{\partial \mathbf{L}_f \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{L}_f \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{L}_f \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t)]$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial (\mathbf{L}_f \mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial (\mathbf{L}_f \mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) = \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f \mathbf{h} \mathbf{u}(t) \quad (\text{III. 10})$$

➤ Si $\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Le degré relatif } \rho > 2 \\ \ddot{y}(t) = \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (\text{III. 11})$

En conclusion : Le système est dit de degré relatif ρ

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \geq k > \rho : y^{(k)} = \mathbf{L}_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ k = \rho : y^{(\rho)}(t) = \mathbf{L}_f^{(\rho)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \end{array} \right. \quad (\text{III. 12})$$

III.2.2) Système multi-entrée multi-sortie : (MIMO)

Les systèmes dynamiques non linéaires, multi-entrées multi-sorties sont donnés sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{III. 13})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n \\ \mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m \\ \mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^r \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^r \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^n \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^{nm} \end{cases}$$

Définition 3 : le degré relatif du système ρ est défini comme étant la somme de tous les degrés relatifs ρ_i de chaque sortie. $i=1..r$

$$\rho = \sum_{i=1}^r \rho_i \quad (\text{III. 14})$$

Remarque 1 : Pour un système contrôlable, on a toujours $\rho \leq n$. Si l'entrée n'apparaît pas après n dérivations de la sortie, le système est non contrôlable.

c) Pour $\rho = n$, le système admet une linéarisation exacte.

d) Pour $\rho < n$, le système admet une linéarisation partielle. L'ordre du sous système linéarisé est égal à ρ .

III.3) Commande prédictive généralisée (G.P.C.)

Selon le principe de la commande prédictive généralisée, la fonction coût traduisant l'objectif de la commande prédictive :

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau) - \mathbf{y}(t + \tau)]^T [\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau) - \mathbf{y}(t + \tau)] d\tau \quad (\text{III. 15})$$

Où :

T_p : est le temps de prédiction

$\mathbf{y}(t+\tau)$ est la prédiction à τ pas en avant de la sortie du système

$\mathbf{y}_r(t+\tau)$ est la trajectoire de référence au futur

Chapitre III: Commande Prédicative

La prédiction des sorties est calculée à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie.

$$\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{y}(t) + \tau \dot{\mathbf{y}}(t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \dots + \frac{\tau^\rho}{\rho!} \mathbf{y}^{(\rho)}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\rho} \frac{\tau^k}{k!} \mathbf{y}^{(k)} \quad (\text{III. 16})$$

ρ , est le degré relatif de la sortie $\mathbf{y}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}^{(\rho)}(t) = \mathbf{L}_f^\rho \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \end{array} \right. \quad (\text{III. 17})$$

La différentiation de la sortie par rapport au temps est répétée ρ fois, pour aboutir à l'expression suivante:

$$\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\rho} \left[\frac{\tau^k}{k!} \mathbf{L}_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right] + \frac{\tau^\rho}{\rho!} \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (\text{III. 18})$$

Ainsi, La prédiction des sorties peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\tau^\rho}{\rho!} \mathbf{L}_f^{(\rho)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^\rho}{\rho!} \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (\text{III. 19})$$

$$\text{On pose :} \quad \mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{Y}(t) \quad (\text{III. 20})$$

Avec :

$$\mathbf{T}(\tau) = \left(\mathbf{1} \quad \tau \quad \frac{\tau^2}{2} \quad \dots \quad \frac{\tau^\rho}{\rho!} \right) \text{ et } \mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{y}^{(\rho)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^\rho \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_u(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{(\rho-1)} \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Le même principe de prédiction est appliqué pour la référence $\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau)$

$$y_{\text{ref}}(\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}) = y_{\text{ref}}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\tau} \dot{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) + \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{2} \ddot{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) + \dots + \frac{\boldsymbol{\tau}^\rho}{\rho!} y_{\text{ref}}^{(\rho)}(\mathbf{t}) \quad (\text{III. 21})$$

On pose:
$$y_{\text{ref}}(\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \quad (\text{III. 22})$$

$$\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} y_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \dot{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \ddot{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \vdots \\ y_{\text{ref}}^{(\rho)}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) = \left(\mathbf{1} \quad \boldsymbol{\tau} \quad \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{2} \quad \dots \quad \frac{\boldsymbol{\tau}^\rho}{\rho!} \right)$$

On remplace dans la fonction du coût $\mathbf{y}(\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau})$ et $y_{\text{ref}}(\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau})$. on obtient une autre forme de la fonction du coût :

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{t})]^T [\mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{t})] d\boldsymbol{\tau} \quad (\text{III. 23})$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]^T \cdot \int_0^{T_p} [\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau})] d\boldsymbol{\tau} \cdot [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})] \quad (\text{III. 24})$$

On pose:
$$\bar{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\tau})] d\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{\boldsymbol{\tau}^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\tau} & \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{2} & \dots & \frac{\boldsymbol{\tau}^\rho}{\rho!} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\tau}$$

On obtient :

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]^T \bar{\boldsymbol{\Pi}} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})] \quad (\text{III. 25})$$

On pose :
$$\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\mathbf{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) \\ \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 26})$$

Chapitre III: Commande Prédicative

$$\text{On calcule } \mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(\rho)}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^\rho \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_u(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (\text{III. 27})$$

$$\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}_{\text{ref}}^{(\rho)}(\mathbf{t}) - \mathbf{L}_f^\rho \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_u(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (\text{III. 28})$$

La commande optimale assurant la minimisation de la fonction du coût (critère de performance) se résume à la résolution de l'équation suivant:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{III. 29})$$

Exemple : on considère le modèle d'état d'un MCC

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \end{cases}$$

On a une seule sortie $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ à contrôler qui est la vitesse de rotation du rotor.

La sortie : $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \Omega(\mathbf{t})$

Le vecteur d'état : $\mathbf{x} = (\Omega \quad \mathbf{i})^T$

Le vecteur commande $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ est composé de la tension d'induit

Avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-f}{J} & \frac{K}{J} \\ \frac{-K}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Déterminer le degré relatif de la sortie $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ (vitesse de rotation du rotor) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \Omega \quad \mathbf{x} = (\Omega \quad \mathbf{i})^T$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial h}{\partial x} [Ax(t) + Bu(t)] = \frac{\partial h}{\partial x} Ax(t) + \frac{\partial h}{\partial x} B \cdot u(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial x} Ax(t) + \frac{\partial h}{\partial x} B \cdot u(t)$$

$$\dot{y}(t) = L_f h(x) + L_B h(x) \cdot u(t)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} Ax(t) L_B h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} B$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial i} \right) = (1 \quad 0)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} Ax(t) = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} \frac{-f}{J} & \frac{K}{J} \\ -K & -R \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} = \frac{-f}{J} \Omega + \frac{K}{J} i$$

$$L_B h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} B = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} = 0$$

Le degré relatif de la sortie $\rho > 1$

$$\dot{y}(t) = L_f h(x)$$

On calcule la deuxième dérivée :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \dot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} L_f h(x) \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} [Ax + Bu] \\ &= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} Ax + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} Bu \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} = \left(\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial(L_f h)}{\partial \Omega} \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial i} \right) = \left(\frac{-f}{J} \quad \frac{K}{J} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} Ax &= \left(\frac{-f}{J} \quad \frac{K}{J} \right) \begin{bmatrix} \frac{-f}{J} & \frac{K}{J} \\ -K & -R \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} = \left(\frac{f^2}{J^2} + \frac{fK}{J^2} \frac{K}{JL} - \frac{KR}{JL} \right) \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{f^2}{J^2} + \frac{fK}{J^2} \right) \Omega + \left(\frac{-K^2}{JL} - \frac{KR}{JL} \right) i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} B = \left(\frac{-f}{J} \quad \frac{K}{J} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ L \end{bmatrix} = \frac{K}{JL}$$

Chapitre III: Commande Prédicative

La prédiction des sorties est calculée à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie. La différentiation de la sortie par rapport au temps est répétée $\rho = 2$ fois, pour aboutir à l'expression suivante:

$$\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 \frac{\tau^k}{k!} \mathbf{L}_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^k}{k!} \mathbf{L}_{g_u} \mathbf{L}_f^{(1)} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t)$$

Le degré relatif de la sortie $y = \Omega$ est $\rho = 2$:

La sortie au futur $\mathbf{y}(t + \tau)$ est exprimée par :

$$\mathbf{y}(t + \tau) = \mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}(t)$$

Avec :

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{JL}} \mathbf{T}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix}$$

Si la référence au futur $\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau)$ n'est pas prédéfinie, un calcul similaire est utilisé pour trouver la prédiction approximativement.

$$\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau) = \mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}_{\text{ref}}(t)$$

Avec :

$$\mathbf{T}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Y}_{\text{ref}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{ref}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(t) \end{bmatrix}$$

Par substitution des expressions $\mathbf{y}(t + \tau)$ et $\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau)$ Dans la fonction cout, on abouti à l'expression suivante :

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau) - \mathbf{y}(t + \tau)]^T [\mathbf{y}_{\text{ref}}(t + \tau) - \mathbf{y}(t + \tau)] d\tau$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}(t)]^T [\mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{T}(\tau) \mathbf{Y}(t)] d\tau$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^{T_p} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{Y}(t)]^T \mathbf{T}(\tau)^T \mathbf{T}(\tau) [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{Y}(t)] d\tau$$

Chapitre III: Commande Prédicative

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]^T \int_0^{T_p} \mathbf{T}(\tau)^T \mathbf{T}(\tau) d\tau [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]$$

On pose :

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \int_0^{T_p} \mathbf{T}(\tau)^T \mathbf{T}(\tau) d\tau$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]^T \bar{\mathbf{\Pi}} [\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t})]$$

$$\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) - \mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{M} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \end{bmatrix}$$

On remplace :

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{M} + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{t})]^T \bar{\mathbf{\Pi}} [\mathbf{M} + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{t})]$$

on calcule $\bar{\mathbf{\Pi}}(\tau)$:

$$\bar{\mathbf{\Pi}}(\tau) = \int_0^{T_p} \mathbf{T}(\tau)^T \mathbf{T}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire à satisfaire pour trouver la commande optimale est la suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Ainsi la commande optimale est comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = -\mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{k}_0(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_{\text{ref}}(\mathbf{t})) + \mathbf{k}_1(\mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t})) + \mathbf{k}_2(\mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(\mathbf{t}))]$$

$$\text{Avec : } \mathbf{k}_0 = \frac{10}{3T_p^2} \quad \mathbf{k}_1 = \frac{5}{2T_p} \mathbf{k}_2 = \mathbf{1}$$

Chapitre IV :
Commande adaptative

IV.1 Introduction :

La synthèse des régulateurs ou des lois de commande dépend essentiellement des cahiers de charge et des paramètres du système à commander pour les performances désirées. Cependant, dans le cas des variations paramétriques du système la synthèse initiale ne pourra pas assurer les mêmes performances.

Dans de nombreuses situations, les systèmes de commande classique sont basés sur les modèles à paramètres fixes, car ils ne peuvent prendre en charge les variations lentes ou rapides de la dynamique des systèmes, d'où la nécessité d'introduire la notion de systèmes de commande adaptative afin d'assurer les performances désirées. Pour cela, les paramètres du régulateur (contrôleur) sont ajustés automatiquement sur la base des informations recueillies du système.

La commande adaptative est une technique de commande qui consiste à corriger automatique en temps réel (au cours du fonctionnement) les coefficients des régulateurs afin de respecter un certain niveau de performances quand le système est sujet de variation paramétriques.

IV.2) Différentes stratégies de la commande adaptative:

Il distingue deux types de commande adaptative :

- Commande adaptative auto-ajustable (indirecte)
- La commande adaptative avec modèle de référence (directe).

IV.2.1) Commande adaptative auto-ajustable indirecte

Dans le cas de la commande adaptative auto-ajustable, la révision des paramètres se fait en deux étapes : identification des paramètres du système puis refaire la synthèse du régulateur.

Les deux étapes sont indépendantes par conséquent les erreurs d'identificationne seront pas corrigées dans la phase de synthèse de la loi de commande.

Le schéma synoptique de la commande indirecte MIAC est représenté par la figure 2.1.

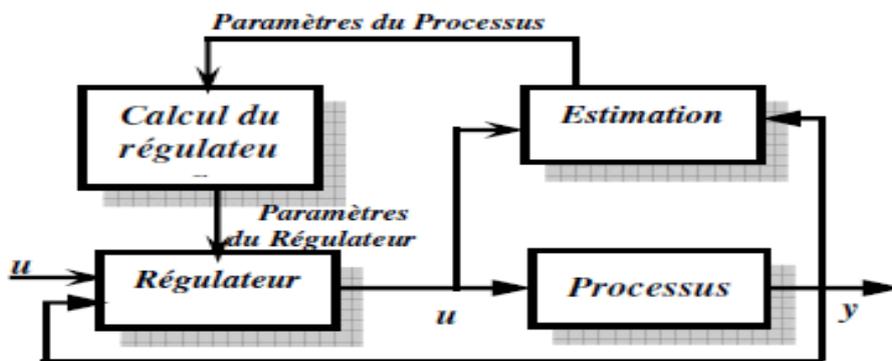


Figure IV-1 Commande adaptative auto-ajustable (indirecte)

IV.2.2) Commande adaptative avec modèle de référence

Cette commande est très demandée dans de larges domaines, pour éviter les problèmes d'identification et d'estimation des procédés.

Le principe de la commande adaptative avec modèle de référence appelée (MRAC) consiste à minimiser un indice de performances IP, la règle de MIT. Le comportement dynamique de la

Chapitre IV : Commande adaptative

sortie du système est exprimé à travers un modèle de référence. Le modèle de référence est une partie intégrante du système de commande.

Le Schéma d'une Commande adaptative avec modèle de référence est constitué de deux boucles (figure 19) :

- La boucle interne est un régulateur classique
- Le mécanisme d'adaptation

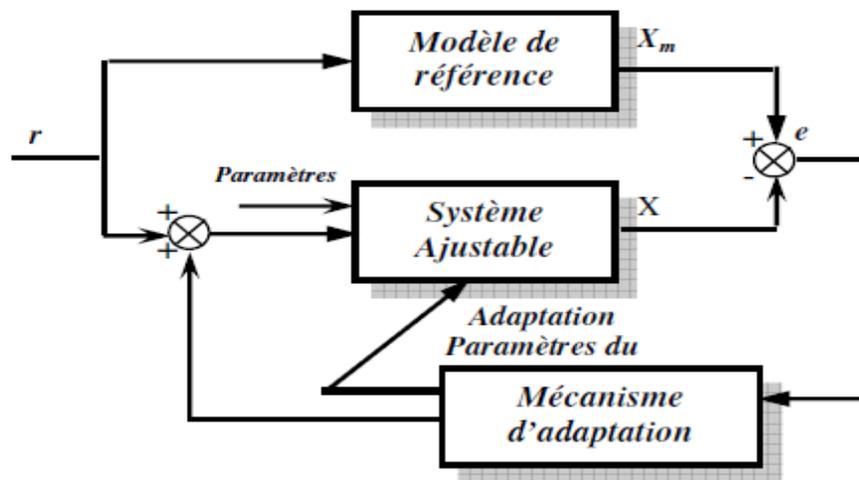


Figure IV-20 Schéma d'une Commande adaptative avec modèle de référence (directe)

La CAMR présente certains avantages tels que :

- Utiliser un modèle simplifié lors de la conception ;
- Assurer de bonnes robustesse vis-à-vis des variations paramétriques du procédé ;
- Adaptation rapide aux entrées définies.

Cependant, la CAMR présente certains inconvénients :

- Problème de stabilité;
- Temps de réponse lent suite à des valeurs initiales erronées des intégrateurs du mécanisme d'adaptation ;
- Difficulté de compenser les effets des perturbations importantes;
- Complexité de l'algorithme.

IV.3) Synthèse de commande adaptative à modèle de référence MRAS :

(Mécanisme d'adaptation).

Pour appliquer la commande adaptative à modèle de référence, il faut adopter certaines hypothèses :

- Le modèle de référence est linéaire invariante dans le temps
- Le modèle de référence et le système à commander ont le même ordre.
- En cas d'adaptation paramétrique, tous les paramètres de système à commander doivent être accessibles pour l'adaptation;
- Les paramètres du système ajustable dépendent uniquement du mécanisme d'adaptation ;

Chapitre IV : Commande adaptative

- Le vecteur d'entrée est l'unique qui excite le système ;
- La connaissance de la différence initiale entre les paramètres du modèle et ceux du système;

Trois méthodes sont utilisées pour effectuer l'analyse et la synthèse des commandes adaptatives à modèle de référence ou MRAS:

- 1- Méthode du gradient
- 2- Méthode basée sur la stabilité de Lyapunov
- 3- Méthode basée sur l'hyper stabilité

Dans ce cours on se limite à la théorie de **l'hyper stabilité**

IV.3.1) Méthode basée sur l'hyper stabilité:

La théorie de l'hyper stabilité permet d'étudier les systèmes linéaires à contre-réaction non linéaire. Cette théorie introduite initialement par Popov en 1963, s'appelle aussi théorie de la stabilité absolue. Considérons le régulateur représenté par le schéma fonctionnel de la figure IV-3

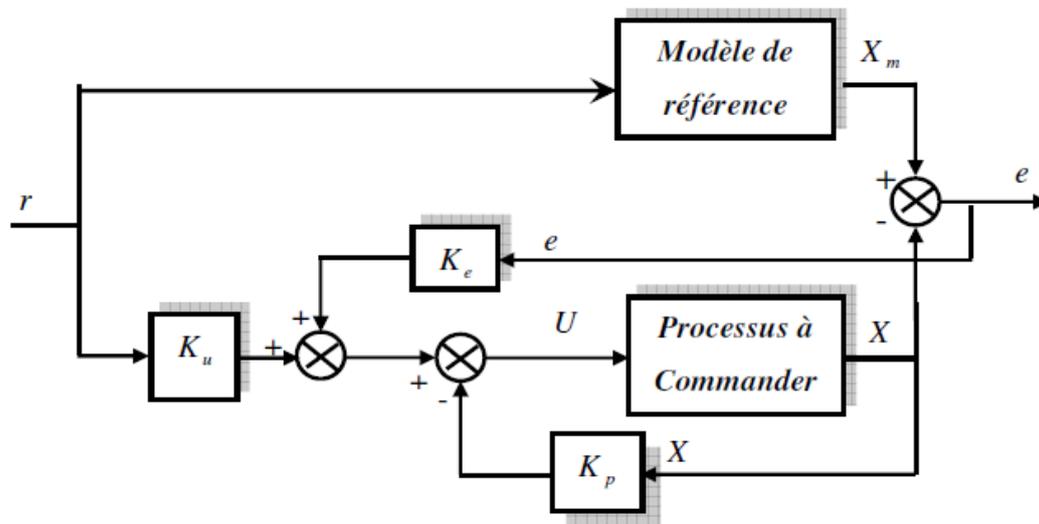


Figure IV-3 Schéma fonctionnel d'une commande à gain constant

On considère le modèle d'état:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Le modèle de référence est donné par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m\cdot\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m\cdot\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}_m(t) = \mathbf{C}_m\cdot\mathbf{x}_m(t) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Chapitre IV : Commande adaptative

Avec :

A, A_m : Matrice $n \times n$

$x(t), x_m(t)$: Vecteurs de dimension n .

B et B_m deux scalaires.

$Y(t)$ et $Y_m(t)$ vecteurs de dimension q .

$F_{nl}(x, t)$: Terme non linéaire variable dans le temps.

L'erreur de l'état entre le modèle de référence et le système à contrôler est donnée par :

$$e(t) = x_m(t) - x(t) \quad (IV.3)$$

La loi de commande peut s'écrire sous la forme :

$$u(t) = -K_p \cdot x(t) + K_u \cdot r(t) + K_e \cdot e(t) \quad (IV.4)$$

Les équations (IV -1), (IV -2) et (IV -4) permettent de trouver le dérivé de l'erreur:

$$\frac{de(t)}{dt} = \dot{e}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) \quad (IV.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de(t)}{dt} = \dot{e}(t) = A_m \cdot x(t) + B_m \cdot u(t) - Ax(t) - Bu(t) - F_{nl}(x, t) \\ \dot{e}(t) = A_m \cdot x_m(t) + B_m \cdot r(t) - Ax(t) - B(-K_p \cdot x(t) + K_u \cdot r(t) + K_e \cdot e(t)) - F_{nl}(x, t) \\ \dot{e}(t) = A_m \cdot x_m(t) + B_m \cdot r(t) - Ax(t) + BK_p \cdot x(t) - BK_u \cdot r(t) - BK_e \cdot e(t) - F_{nl}(x, t) \\ \dot{e}(t) = A_m e(t) + A_m x(t) - Ax(t) + BK_p \cdot x(t) + (B_m - BK_u)r(t) - BK_e \cdot e(t) - F_{nl}(x, t) \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\dot{e}(t) = (A_m - BK_e)e(t) + (A_m - A + BK_p)x(t) + (B_m - BK_u)r(t) - F_{nl}(x, t) \quad (IV.6)$$

1) Système linéaire invariable dans le temps :

En absence des variations de paramétriques $F_{nl}(x, t) = 0$

$$\dot{e}(t) = (A_m - BK_e)e(t) + (A_m - A + BK_p)x(t) + (B_m - BK_u)r(t) \quad (IV.7)$$

L'erreur $e(t)$ converge asymptotiquement vers 0 si :

$$\begin{cases} B_m - BK_u = 0 \\ A_m - A + BK_p = 0 \end{cases} \quad (IV.8)$$

Donc la dynamique de l'erreur sera :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{BK}_e)\mathbf{e}(t) \quad (\text{IV.9})$$

Et si $(\mathbf{A}_m - \mathbf{BK}_e)$ est une matrice de Hurwitz (ses valeurs propres sont à parties réelle négative)

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A}_m - \mathbf{A}) \\ \mathbf{K}_p = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m) \\ \mathbf{K}_u = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}_m \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

2) Système non linéaire variable dans le temps

La non linéaire et/ou variable dans le temps $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$ provoque un écart entre le modèle de référence et le système à corriger. Ainsi pour compenser le terme non linéaire et les variations paramétriques du système on additionne un signal de synthèse. la dynamique de l'erreur sera :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{BK}_e)\mathbf{e}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{IV.11})$$

On conçoit une loi d'adaptation non linéaire rendant le système asymptotiquement hyperstable.

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \\ \mathbf{u}_1(t) = -\mathbf{K}_p \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_u \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{u}_2(t) = \Delta \mathbf{K}_p(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{K}_u(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{K}_e(t) \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

$\mathbf{u}_1(t)$ est la composante non linéaire

$\mathbf{u}_2(t)$ compense l'influence des variations de paramètres.

A partir de (IV. 12) on trouve :

$$\mathbf{u}(t) = -[-\mathbf{K}_p - \Delta \mathbf{K}_p(t)] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{K}_u + \Delta \mathbf{K}_u(t)] \cdot \mathbf{r}(t) + [\mathbf{K}_e + \Delta \mathbf{K}_e(t)] \cdot \mathbf{e}(t) \quad (\text{IV.13})$$

Les gains d'ajustements non linéaires dépendants du temps sont $\Delta \mathbf{K}_p$, $\Delta \mathbf{K}_u$ et $\Delta \mathbf{K}_e$.

L'application de la commande adaptative permet d'avoir l'équation dynamique de l'erreur:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= (\mathbf{A}_m - \mathbf{BK}_e)\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A}_m - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_p)\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_m - \mathbf{BK}_u)\mathbf{r}(t) \\ &\quad - \mathbf{B}[\Delta \mathbf{K}_p(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{K}_u(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{K}_e(t) \cdot \mathbf{e}(t)] - \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Le calcul des gains \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_u et \mathbf{K}_p selon l'équation (4-10) permet de réduire à nouveau l'équation de l'erreur à :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}_m - \mathbf{BK}_e)\mathbf{e}(t) - \mathbf{B}\mathbf{W}_c - \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{IV.15})$$

Avec :

$$\mathbf{W}_c = \Delta \mathbf{K}_p(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{K}_u(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{K}_e(t) \cdot \mathbf{e}(t) \quad (\text{IV.16})$$

L'équation (IV -15) est représentée par le schéma fonctionnel donné par la figure suivante :

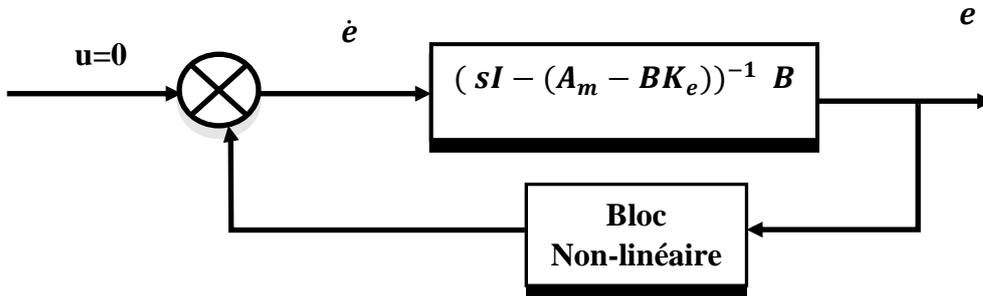


Figure IV-5 Schéma fonctionnel d'un système non linéaire variable dans le temps

Le système de la figure (4.15) est hyperstable si et seulement si la partie linéaire est strictement positive réelle.

$$\text{Re}[(sI - (A_m - BK_e))^{-1} B] > 0 \quad \forall \omega_c \quad (\text{IV.17})$$

Si la partie non linéaire vérifie l'inégalité de Popov

$$\int_0^t \mathbf{e}^T(\tau) \omega_c(\tau) d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{IV.18})$$

Si la condition d'hyper stabilité de la partie linéaire ne peut pas être toujours vérifiée, on introduit dans la chaîne directe un compensateur linéaire destiné à amplifier et filtrer l'erreur $e(t)$ de telle sorte que le bloc linéaire soit hyper stable voir la figure.IV.6

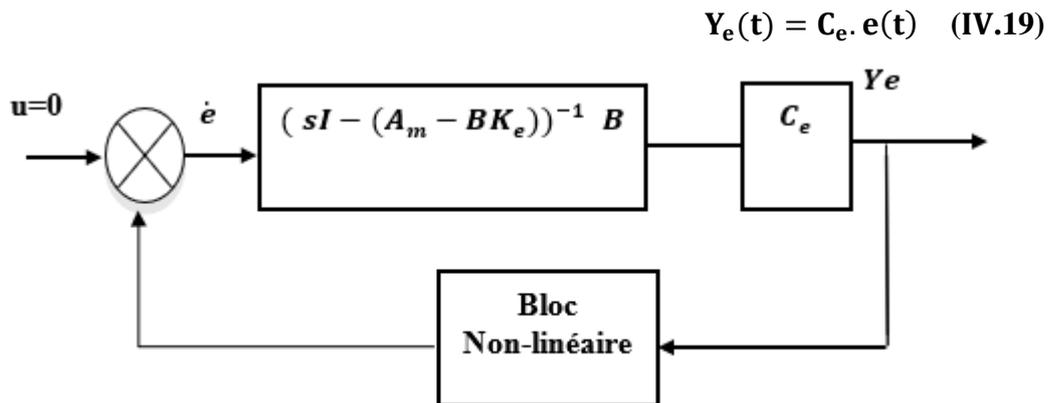


Figure IV-21 Schéma fonctionnel d'un système non linéaire variable dans le temps avec compensation

Le système de la figure (4.15) est hyper stable si et seulement si la partie linéaire est strictement positive réelle.

$$\text{Re}[C_e(sI - (A_m - BK_e))^{-1} B] > 0 \quad \forall \omega_c \quad (\text{IV.20})$$

Chapitre IV : Commande adaptative

Si la partie non linéaire vérifie l'inégalité de Popov

$$\int_0^t \mathbf{Y}_e^T(\tau) \boldsymbol{\omega}_c(\tau) d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{IV.21})$$

Le problème d'hyperstabilité de la partie linéaire est résolu pour un choix de la matrice \mathbf{C}_e selon la loi suivant (proposition de Landau):

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\text{IV.22})$$

Tel que la matrice P est une solution de l'équation de Lyapunov :

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (\text{IV.23})$$

Les coefficients de la matrice P et Q sont définis positifs. La satisfaction de l'inégalité de Popov est une opération très compliquée. De ce fait, Landau a présenté une solution pour le choix de $\Delta \mathbf{K}_p(t)$, $\Delta \mathbf{K}_u(t)$ et $\Delta \mathbf{K}_e(t)$

L'inégalité (4-21) est satisfaite en adoptant une loi d'adaptation proportionnelle intégrale du type :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{K}_p(t) = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{x}^T(\tau) \cdot \mathbf{G} d\tau + \mathbf{F} \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{x}^T(t) \\ \Delta \mathbf{K}_e(t) = \int_0^t \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{e}^T(\tau) \cdot \mathbf{T} d\tau + \mathbf{L} \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{e}^T(t) \\ \Delta \mathbf{K}_u(t) = \int_0^t \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{r}^T(\tau) \cdot \mathbf{N} d\tau + \mathbf{M} \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{r}^T(t) \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Les matrices F, G, L, T, M et N sont définies positives et \mathbf{F} , \mathbf{L} et \mathbf{M} sont définies semi-positives. Landau a proposé des simplifications de ces équations dans le but de résoudre l'équation de Lyapunov et simplifier la structure du mécanisme d'adaptation, qui devient :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{K}_p(t) = \int_0^t \lambda_1 \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{x}^T(\tau) d\tau + \lambda_2 \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{x}^T(t) \\ \Delta \mathbf{K}_e(t) = \int_0^t \lambda_1 \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{e}^T(\tau) \cdot \mathbf{T} d\tau + \lambda_2 \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{e}^T(t) \\ \Delta \mathbf{K}_u(t) = \int_0^t \lambda_1 \cdot \mathbf{Y}_e(\tau) \cdot \mathbf{r}^T(\tau) \cdot \mathbf{N} d\tau + \lambda_2 \mathbf{Y}_e(t) \mathbf{r}^T(t) \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Avec :

$$\lambda_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \geq 0$$

Les valeurs de λ_1 , λ_2 doivent vérifier cette condition :

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{T} = \mathbf{N} = \mathbf{1} & \mathbf{F} = \mathbf{L} = \mathbf{M} = \lambda_1 \mathbf{I}_n \\ \mathbf{F} = \mathbf{L} = \mathbf{M} = \lambda_2 \mathbf{I}_n \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

D'où le schéma bloc de la commande adaptative à modèle de référence est le suivant:

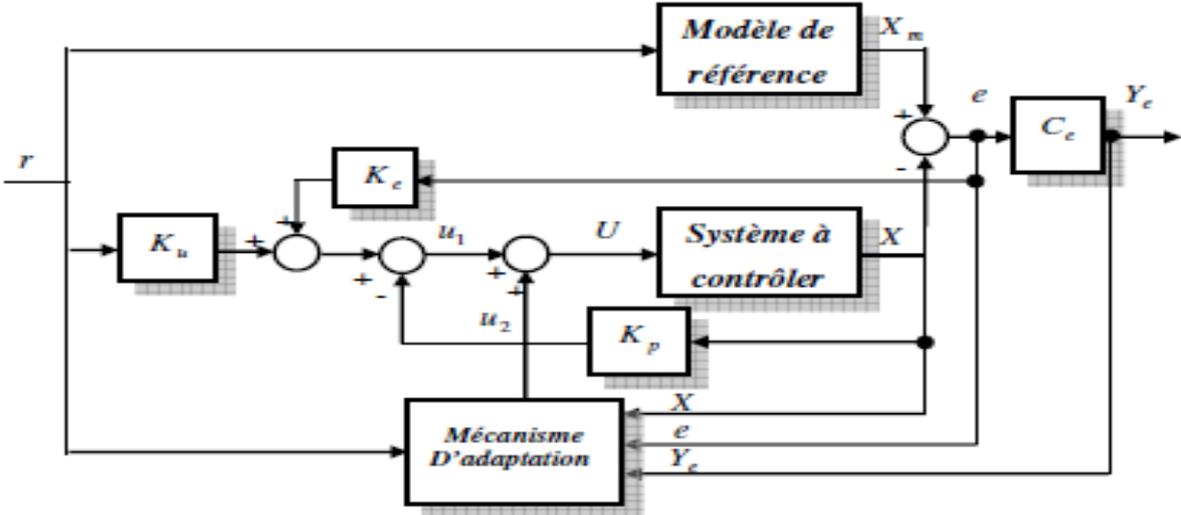


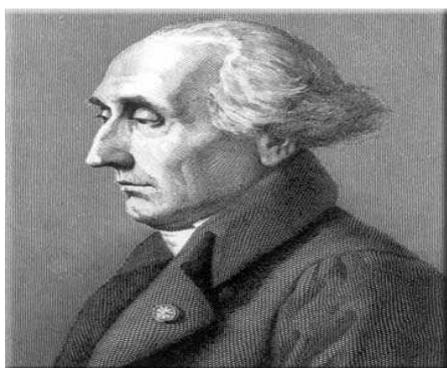
Figure IV-7 Schéma de commande adaptative à modèle de référence (MRAC).

Bibliographie

- [1] Ahmed Chemori, Cours d'Automatique des systèmes Actionnés Partie 2 : Analyse et commande en espace d'état, Ecole polytechnique universitaire de Montpellier 2013 / 2014
- [2] Yves Granjon Automatique systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état Cours et exercices corrigés
- [3] C. Vachier, Représentation d'état et commande dans l'espace d'état, notes de cours, UNIVERSITÉ PARIS XII-VAL DE MARNE, 2007.
- [2] J. Bordebeuve-Guibé, Représentation d'état des systèmes linéaires, Polycopié de cours, ENSICA, 1997.
- [3] O. H. Bosgra H. Kwakernaak, Design Methods for Control Systems, Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control Winter term 2000–2001.
- [4] E. Laroche, Commande Optimale, Polycopié de cours, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2009-2010.
- [4] D.Xue, Y.Q Chen, D. P. Atherton Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB, Springer-Verlag, July 3, 2002.
- [5] D.Alazard, Régulation LQ/LQG, Notes de cours.
- [6] R.E. Kalman, Contributions to the theory of optimal control, Bol. Sociedad Mat. Mex., 1960.
- [7] S. Tliba, M. Jungers et Y. Chitour, Commande des processus asservissements numériques, Notes de cours, Université Paris-Sud XI ENS de Cachan, 2005.
- [9] J.MRetif, AUTOMATIQUE REGULATION, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, EdiIon 2008.
- [10] D. Peaucelle, SYSTEMES A TEMPS DISCRET Commande numérique des procédés, Notes de cours, Ecole Nationale des Sciences Appliquées, 7 avril 2003.
- [11] J. L. Gonzales Commande Adaptative à Modèle de Référence de Systèmes Discrets, Notes de cours, EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH, 8 Novembre 1988.
- [12] I. D. Landau and G. Zito, Digital Control Systems Design, Identification and Implementation, Springer-Verlag London Limited 2006.
- [13] Nicolas Petit Commande predictive Notes de cours Option Procédé Environnement , <http://cas.ensmp.fr/~petit/>, Ecole Centrale Paris 2005-2006



Leonhard Euler (1707-1783) entra à l'université de Bale en 1720. Ses études terminées il se vit offrir un poste à St Petersburg en Juillet 1726, poste qu'il rejoignit en Mai 1727. Il remplaça Daniel Bernoulli dans sa chaire de mathématiques en 1733. Il entreprit de nombreux travaux dans les domaines de la théorie des nombres, le calcul de variations, les équations différentielles, la mécanique. Il remporta à deux reprises, en 1738 et 1740, le grand prix de l'académie de Paris. Revenu de St Peterbourg en 1741, il dirigea avec Maupertuis l'académie de mathématiques de Berlin. Durant ses 35 ans de présence à Berlin il publia quelque 380 articles. De retour à St Petersburg en 1766 il devint aveugle presque aussitôt. Ceci ne l'empêcha pas de rédiger la moitié de ses écrits malgré ce handicap.



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), né à Turin en 1736, commença à s'intéresser aux mathématiques grâce aux travaux de Halley dans le domaine de l'optique. Parmi ses travaux les plus importants sont ceux portant sur le calcul de variations entre 1754 et 1756. Lagrange succéda à Euler comme Directeur du département de mathématiques de l'académie de Berlin en novembre 1766. Un grand nombre de ses travaux dans le domaine de la mécanique céleste, de la mécanique des fluides, de la théorie des nombres. date de cette époque. Il vint ensuite à l'académie des sciences de Paris en 1787 et fut le premier professeur d'analyse de l'école polytechnique à partir de 1794.



Oskar Bolza (1857-1942) né à Bergzabern (palatinat rhénan) émigra en Allemagne aux environs de 1873. Il commença à étudier les mathématiques à Berlin en 1878. Il suivit en 1879 les cours de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass sur le calcul de variations. Il passa un doctorat en 1886 à l'université de Göttingen, puis émigra aux Etats-Unis en 1888 où il resta jusqu'en 1910 pour revenir à Fribourg.



Jésuite italien, Vincenzo Riccati vécut de 1707 à 1775. Après ses études théologiques, il va à Bologne enseigner les mathématiques au collège San Francesco Saverio de 1739 à 1769. Il y continue les études qu'avait commencées son père sur l'intégration et les équations différentielles. Ses études sur les fonctions hyperboliques le conduisirent à la résolution des équations du troisième degré bien avant Lambert. Son expertise dans le domaine de l'hydraulique le fit participer à des projets de contrôle des flots qui participèrent au sauvetage de la région de Venise et de Bologne.