Mr : MEZIANI Bachir

CHAPITRE I
Résolution Approchées des Equations Non-Linéaires
$$F(x)=0$$

I.0-Introduction :

Soit $F : R \to R$ une fonction donnée.

Nous désirons trouver une ou plusieurs solutions à l'équation $F(x)=0$.

Il existe des cas simples pour qui on peut exprimer une solution d'une équation à partir de la fonction, par exemple le cas d'une équation du second degré:

$ax^2 + bx + c = 0$ pour lequel la solution α est:

$$\text{soit, } \frac{-b-\sqrt{b2-4ac}}{2a} \quad \text{soit, } \frac{-b+\sqrt{b2-4ac}}{2a}$$

Dans tous les autres cas, nous ne pouvons pas résoudre, en utilisant une méthode analytique, un polynôme de degré supérieur à deux (02) ou une équation sous forme exponentielle, logarithmique ou trigonométrique etc. On rappelle que résoudre une équation de la forme $F(x)=0$ revient à trouver x^* (ou les « x^* ») tel que $F(x^*)=0$. x^* est alors appelé racine unique (ou multiple) de $F(x)=0$.

Dans ce chapitre, nous abordons quelques méthodes numériques qui permettent d'approcher une racine de $F(x)$ sur un domaine donné (car il n'est pas, tout le temps, possible de trouver exactement la racine de $F(x)$ recherchée). Néanmoins, nous pouvons, par des méthodes algébriques (graphiques) connaitre l'existence et le nombre de racines en les séparant.

Pour les différentes méthodes nous supposerons que F est une fonction continue et qu'il existe un intervalle $[a,b]$ où l'équation a une et une seule racine que l'on notera α.

Pour choisir l'intervalle $[a,b]$ on peut:

♦ Soit utiliser la méthode graphique (tracer la courbe) et situer la solution d'où le choix de $[a,b]$,

♦ Soit utiliser la méthode algébrique : la méthode de la séparation des racines en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition:

$F(x)$ admet une racine séparée dans $]a,b[$ si et seulement si α est unique.

Aussi séparer les racines de " $F(x)=0$ " revient à déterminer les intervalles $]a,b[$ dans lesquels chaque racine est unique.

Pour ceci on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires:

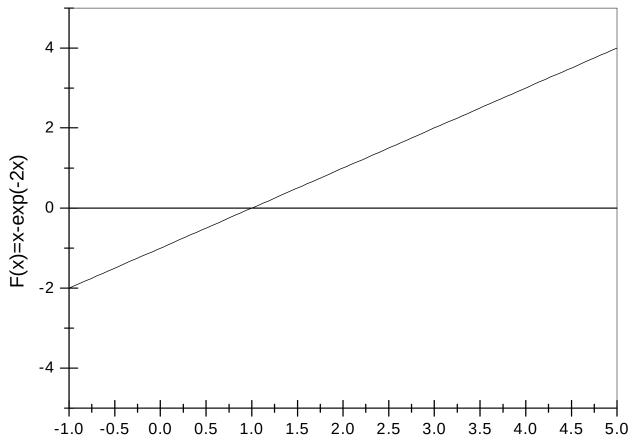
Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue dans $[a,b]$ et $F(a).F(b)<0$ alors $\exists$ $\alpha \in]a,b[$ tel que $F(\alpha)=0$.

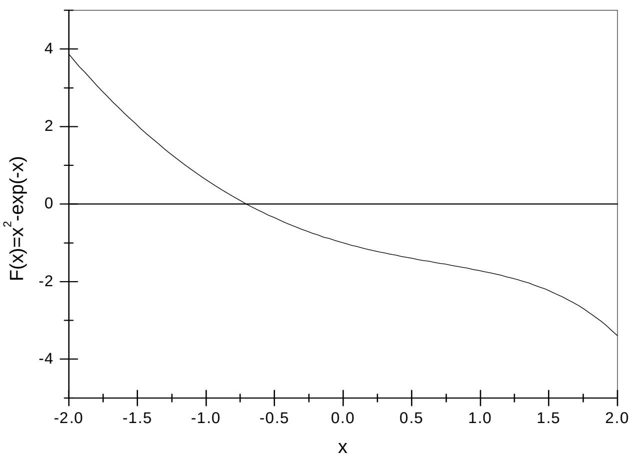
Si de plus $F(x)$ est monotone dans $[a,b]$ alors α est unique dans $[a,b]$.

Exemples :

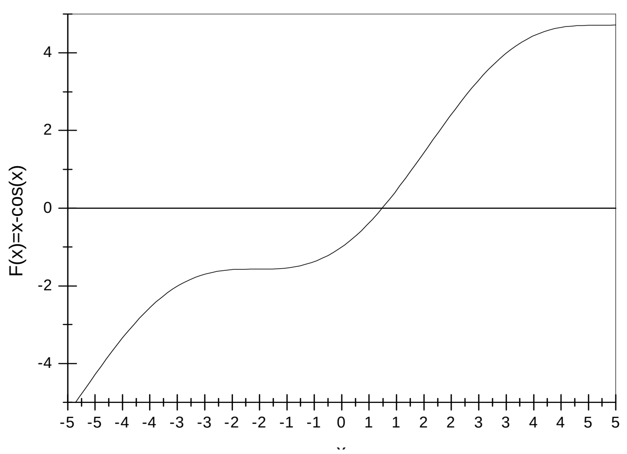
a- $F(x) = x - e^{-2x} = 0$



b- $F(x) = x^2 - e^{x} = 0$



c- $F(x) = x - \cos(x) = 0$



I.1.1 Méthode algébrique :

Séparons les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ dans l'intervalle $[-3,\ 3]$.

- ♦ $F(x) = x^3 - 3x + 1$ est une fonction polynomiale donc elle est continue dans $[-3,\ 3]$.

♦ $F(-3) = -17 < 0$, $F(3) = 19 > 0$ donc $F(-3).F(3) < 0$ aussi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine α de $F(x) = 0$ dans $[-3,\ 3]$.

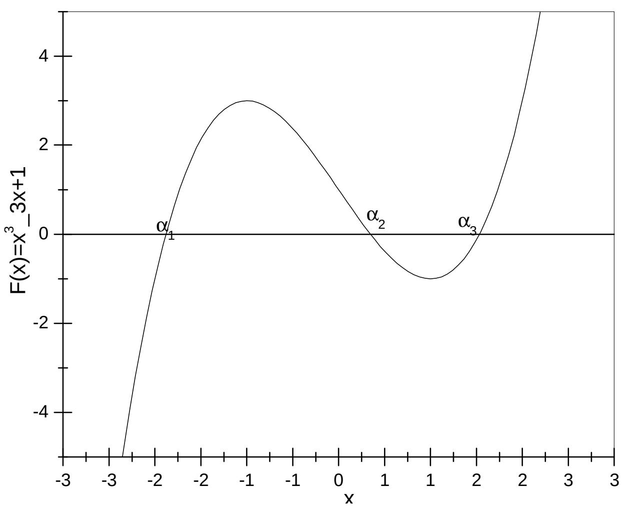
Pour étudier l'unicité de la racine α étudions la monotonie de celle-ci :

$F(x) = x^3 - 3x + 1$;
$F'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

x	-3		-1		+1		3
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$	-17	↗	3	↘	-1	↗	19

α_1 unique dans $[-3,\ -1]$ car $F(x)$ est monotone et $F(-3).F(-1) < 0$
α_2 unique dans $[-1,\ 1]$ car $F(x)$ est monotone et $F(-1).F(1) < 0$
α_3 unique dans $[1,\ 3]$ car $F(x)$ est monotone et $F(1).F(3) < 0$
d'où la séparation des racines.

I.1.2- Méthode graphique:

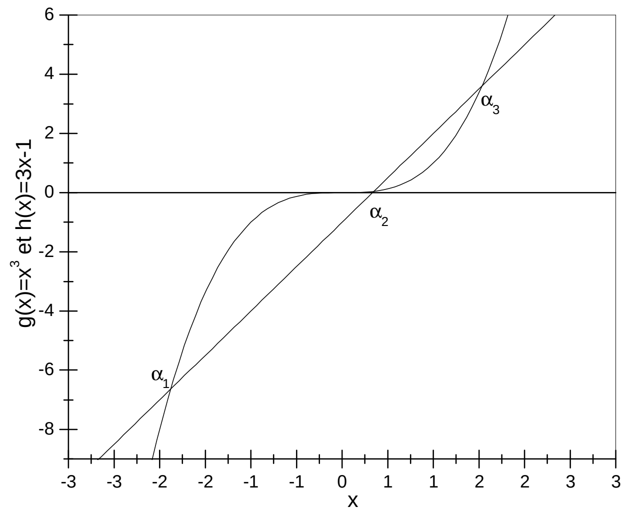


Dans ce cas les racines $F(x) = 0$ représentent les points d'intersections du graphe de $F(x)$ avec l'axe $x'ox$ donc, il suffit de tracer le graphe de $F(x)$ et de déterminer les points d'intersections. Ceci fait nous aurons les intervalles d'où la séparation des racines.

Dans le cas où ' $F(x)$ ' est compliquée, il faut transformer l'équation $F(x)=0$ par une équation équivalente $g(x)=h(x)$ avec ' $g(x)$ ' et ' $h(x)$' deux fonctions plus simples. Les points d'intersections des graphes de ' $g(x)$ ' et de ' $h(x)$' sont alors recherchés.

Pour notre exemple on aurait pu transformer $F(x)=0$ en deux fonctions plus simples.

En effet $x^3-3x+1=0 \Rightarrow x^3=3x-1 \Rightarrow g(x)=x^3$ et $h(x)=3x-1$ d'où le graphe et les solutions qui correspondent aux intersections des deux courbes



Nous avons 3 intersections $\Rightarrow$ 3 solutions et 3 intervalles

I.2-Méthode de la Dichotomie (Bissection) :

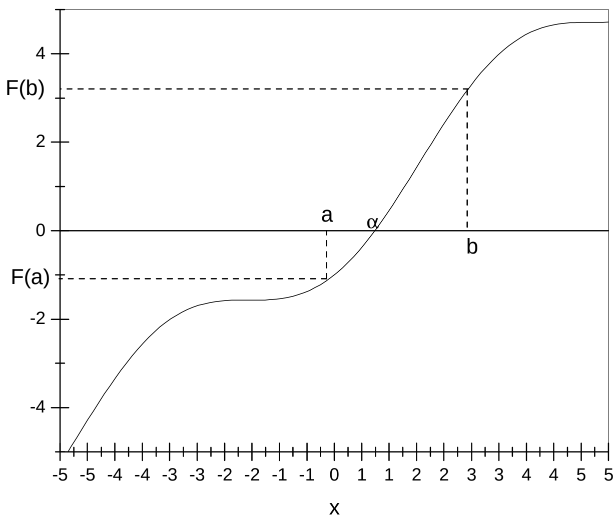
La méthode de la bissection est basée sur le résultat d'analyse mathématique suivant (Théorème des Valeurs Intermédiaires).

a- $F(x)$ est continue sur un intervalle $[a,b]$

b- $F(a).F(b)<0$

D'après a et b, il existe au moins une valeur $\alpha \in [a,b]$ tel que $F(\alpha)=0$

De plus, si $F(x)$ est monotone sur l'intervalle $[a,b]$ (strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$), alors la racine α est unique sur $[a,b]$.



Problème : Nous ne connaissons pas la valeur exacte de α .
Pour cela, nous faisons appel à la méthode de la Dichotomie.

Principe de la méthode :

- Nous construisons les suites $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ de la manière suivante sur l'intervalle $I=[a,b]$.
- Nous posons $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=\dfrac{a+b}{2}$
- étape1- Si $F(x_0)=0 \Rightarrow \alpha=x_{\mathbf{0}}$
- étape2- Si $F(x_0)\neq 0$, nous vérifions le théorème des valeurs intermédiaires sur le domaine $[a,x_{\mathbf{0}}]$
  - Si $F(a).F(x_0)<0 \Rightarrow \alpha\in\,]a,x_{\mathbf{0}}[$
  - Nous posons alors $a_1=a_0=a$, $b_1=x_0$, $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, on revient à l'étape 1.
  - Sinon $F(a).F(x_0)>0 \Rightarrow \alpha\in\,]x_{\mathbf{0}},b[$
  - Nous posons alors $a_1=x_0$, $b_1=b_0$, $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$

De proche en proche, nous construisons les suites ($(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ et $(x_n)_{n\in N}$) .
A n-1, nous faisons les testes :

- étape1- Si $F(x_{n-1})=0 \Rightarrow \alpha=x_{\mathbf{n-1}}$
- étape 2-Si $F(x_{n-1})\neq 0$, nous vérifions le théorème des valeurs intermédiaires sur le domaine $[a_{n-1},x_{\mathbf{n-1}}]$
  - Si $F(a_{n-1}).F(x_{n-1})<0 \Rightarrow \alpha\in\,]a_{n-1},x_{\mathbf{n-1}}[$
  - Nous posons alors $a_n=a_{n-1}$, $b_n=x_{n-1}$, $x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, on revient à l'étape 1.
  - Sinon $F(a_{n-1}).F(x_{n-1})>0 \Rightarrow \alpha\in\,]x_{\mathbf{n-1}},b_{n-1}[$
  - Nous posons alors $a_n=x_{n-1}$, $b_n=b_{n-1}$, $x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$. Nous disons alors que $(x_n)_{n\in N}$ est la suite des solutions approchées et α la racine exacte de $F(x)=0$

Proposition :
Les suites $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ et $(x_n)_{n\in N}$ convergent toutes vers α. De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$|x_n-\alpha|\leq\frac{|b_n-a_n|}{2}=\frac{|b_{n-1}-a_{n-1}|}{2^2}=\ldots=\frac{|b_0-a_0|}{2^{n+1}}$$

D'où $|x_n-\alpha|\leq\dfrac{1}{2^{n+1}}|b_0-a_0|$

Précision de l'approximation :

Pour approcher la racine α avec une précision inférieure à ε en utilisant la méthode de la bissection, il faut que :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon} < 2^{n+1}$$

D'où $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$ si nous commençons les itérations à partir de $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$

Exemple :

On considère la fonction $F(x) = x^2 e^x - 1 = 0$

1- Trouver un intervalle $I = [a,b]$ de longueur 1 contenant la racine α de $F(x)$
2- Après avoir vérifié l'applicabilité de la méthode de Dichotomie sur cet intervalle, calculer les cinq premiers itérés.
3- Calculer le nombre d'itération qu'il faut pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$

Solution :

1- Domaine de définition de $F(x) = x^2 e^x - 1$ est $R =]-\infty, +\infty[$

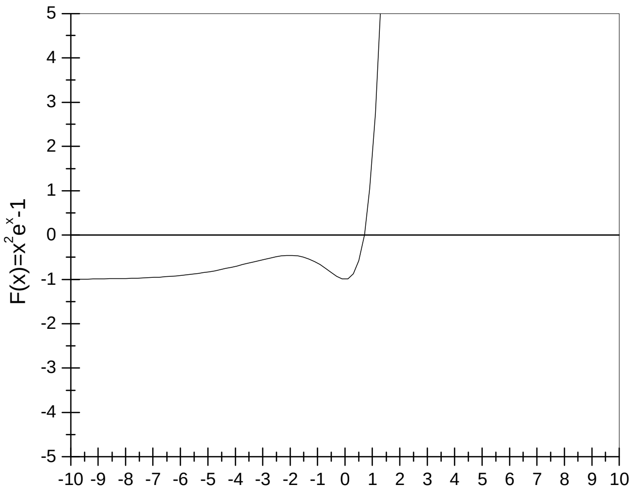
La première dérivée de $F(x) = x^2 e^x - 1$ est $F'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(x+2)$

$F'(x) = 0 \Rightarrow x \to -\infty$ ou $x = -2$ ou $x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -1$, $F(-2) = 4e^{-2} - 1 = -0.4587$, $F(0) = -1$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$F'(x)$	0		0		0		
$F(x)$	-1	↗	-0.4587	↘	-1	↗	$+\infty$

Tracé de la fonction $F(x) = x^2 e^x - 1$



D'après le graphe de $F(x) = x^2 e^x - 1$, nous remarquons que cette fonction passe par l'axe des x à un point appartenant à l'intervalle $I = [0,1]$.

2- Sur l'intervalle $I = [0,1]$, la fonction $F(x) = x^2 e^x - 1$ est définie, continue et monotone. De plus $F(0) = -1$ et $F(1) = 1.7183$. Nous pouvons appliquer la méthode de la dichotomie sur cette intervalle.

Application de la méthode de Dichotomie :
Nous allons construire les suites $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ et $(x_n)_{n\in N}$.

Etape 0 : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$, $F(0.5) = -0.5878$

Test : $F(a_0).F(x_0) = F(0).F(0.5) > 0 \Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté gauche (coté de a)

Etape 1 : $a_1 = x_0 = 0.5$, $b_1 = b_0 = 1$, $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$, $F(0.75) = 0.1908$

Test : $F(a_1).F(x_1) = F(0.5).F(0.75) < 0 \Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté droit (coté de b)

Etape 2 : $a_2 = a_1 = 0.5$, $b_2 = x_1 = 0.75$,

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625,\ F(0.625) = -0.2702$$

Test : $F(a_2).F(x_2) = F(0.5).F(0.625) > 0$

$\Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté gauche (coté de a)

Etape 3 : $a_3 = x_2 = 0.625$, $b_3 = b_2 = 0.75$,

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875,\ F(0.6875) = -0.0600$$

Test : $F(a_3).F(x_3) = F(0.625).F(0.6875) > 0$

$\Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté gauche (coté de a)

Etape 4 : $a_4 = x_3 = 0.6875$, $b_4 = b_3 = 0.75$,

$$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0.6875+0.75}{2} = 0.71875,\ F(0.71875) = 0.0600$$

Test : $F(a_4).F(x_4) = F(0.6875).F(0.71875) < 0$

$\Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté droit (coté de b)

Etape 5 : $a_5 = a_4 = 0.6875$, $b_5 = x_4 = 0.71875$,

$$x_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{0.6875+0.71875}{2} = 0.703125,\ F(0.703125) = -0.0013$$

Test : $F(a_5).F(x_5) = F(0.6875).F(0.703125) > 0$

$\Rightarrow$ On resserre l'intervalle du coté gauche (coté de a)

Et ainsi de suite jusqu'à ce que nous atteignons la racine avec une précision donnée.

3-Pour calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision ε Donnée, nous utilisons la formule :

$$n > \frac{\ln\left(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Dans le cas de cet exemple. Si nous fixons $\varepsilon = 10^{-4}$, nous obtenons

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{10^{-4}}\right)}{\ln(2)} - 1, \quad n > \frac{4\ln(10)}{\ln(2)} - 1, \quad n > 12.2877, \quad n = 13$$

Il faut effectuer 13 itérations en utilisant la méthode de Dichotomie pour avoir la racine avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$

I.3-Méthode de Point Fixe (ou Approximations Successives) :

Il s'agit toujours de chercher les racines de $F(x) = 0$**.** Cette équation est supposée mise sous la forme $x = g(x)$ et ceci est toujours possible en posant $g(x) = x - F(x)$.

Soit $F(x)$ une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ et possède une racine $\alpha \in [a,b]$. La méthode de point fixe permet de passer de la recherche de la racine de $F(x) = 0$ sur $[a,b]$ à la recherche du point fixe de la fonction $g(x)$ tel que $x = g(x)$**.**

En effet, les deux problèmes sont équivalents ($F(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$).

- Si α est solution de $x = g(x) \Rightarrow \alpha = g(\alpha) \Rightarrow \alpha = \alpha - F(\alpha) \Rightarrow -F(\alpha) = 0$
  $\Rightarrow F(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ est solution de $F(x) = 0$
- Inversement si α est solution de $F(x) = 0 \Rightarrow F(\alpha) = 0 \Rightarrow -F(\alpha) = 0$
  et $\alpha = \alpha - F(\alpha)$ d'où $\alpha = g(\alpha)$

Question : Quelles conditions doit vérifier $g(x)$ pour que ce point fixe existe et qu'il soit unique ?

Théorème du Point Fixe :

Soit $g(x)$ une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ telle que :

I. $g(x) \in [a,b] \ \forall x \in [a,b]$ (on dit que l'intervalle $[a,b]$ est stable par $g(x)$). Si on écrit $I = [a,b]$ alors $g(I) \subset I$

II. $\exists k \in R, \quad 0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leq k < 1, k = \max_{[a,b]} |g'(x)|$. On dit que $g(x)$ est strictement contracte.

Alors $g(x)$ admet un point fixe unique dans $I = [a,b]$ et la suite récurrente :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \quad \text{converge vers le point fixe } \alpha$$

De plus, nous avons :
$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Démonstration :

x_0 étant donné tel que $x_0 \in [a,b]$. On construit la suite $(u_n)_{n\in N}$ tel que :

- $u_0 = x_0$
- $u_1 = x_1 - x_0$
- $u_2 = x_2 - x_1$
- $\ldots$
- $\ldots$
- $u_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$
- $u_n = x_n - x_{n-1}$

Nous faisons la somme des termes de la suite jusqu'à l'ordre n

$$\sum_{i=0}^{n} u_n = x_n \quad \text{d'où} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} u_n$$

Soit $|g'(x)| \le k < 1$

Nous avons

$u_n = x_n - x_{n-1} = g(x_{n-1}) - g(x_{n-2}) = (x_{n-1} - x_{n-2})g'(\xi)$ où $\xi \in [a,b]$

D'où $|u_n| = |u_{n-1}||g'(\xi)| \le k|u_{n-1}|$

Nous avons aussi :

$$|x_n - \alpha| = \sum_{i=0}^{n}|u_i| - \sum_{i=0}^{\infty}|u_i| = \sum_{i=n+1}^{\infty}|u_i| \le \sum_{i=n+1}^{\infty}|u_0|k^i$$

$$\text{Et } \sum_{i=n+1}^{\infty}|u_0|k^i = |u_0|k^{n+1}\sum_{i=0}^{\infty}k^i = |u_1|\frac{k^n}{1-k} = |x_1 - x_0|\frac{k^n}{1-k}$$

D'où

$$|x_n - \alpha| \le |x_1 - x_0|\frac{k^n}{1-k}.$$

Estimation de l'erreur :

Le nombre minimum d'itérations pour que la solution soit approchée avec une précision ε est : $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

Sachant que $|x_n - \alpha| \le |x_1 - x_0|\dfrac{k^n}{1-k}$

Donc

$$n > \frac{\ln\left[\dfrac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right]}{\ln(k)} \,,\; k = \max_I |g'(x)|$$

Théorème du point fixe local :

Soit $g(x)$ une fonction réelle, définie, continue et dérivable une fois sur l'intervalle $[a,b]$ (on dit que $g(x)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$). Nous supposons que $g(x)$ admet un point fixe $\alpha \in \,]a,b[$, tel que $|g'(\alpha)| < 1$ alors :

$\exists \delta \in R$, tel que la suite récurrente :

$$\begin{cases} x_0 \in I_\delta = [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \\ x_{n+1} = g(x_n), n \in N \end{cases}$$ converge vers le point fixe α sur I_δ

De plus, nous avons :

$$|x_n - \alpha| \le \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \; k = \max_{I_\delta}|g'(x)|$$

Exemple : Ecrire un processus itératif $(x_n)_{n\in N}$ du point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$g(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right)$$

a- Montrer que la méthode du point fixe converge vers la solution α dans l'intervalle $I = [0,1]$.
b- Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer une solution approché avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$
c- Calculer les cinq premières itérations.

Solution :
Soit x_n la nième itération de la méthode du point fixe définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \frac{1}{4}\left(e^{-x_n} - x_n^2\right) \end{cases}$$

a- La convergence de la méthode du point fixe :
Il faut prouver les deux points suivants :
I-Stabilité : $g(I) \subset I$,

On a $g'(x) > 0 \;\; \forall x \in I$ et $0 < g(0) = \frac{1}{4} < g(x) < g(1) = 1$

II- on a $|g'(x)| < 1 \;\; \forall x \in I$

Comme $g''(x) = \frac{e^{-x} - 2}{4} < 0 \;\; \forall x \in I \;\Rightarrow\; \max_{x\in I}|g'(x)| = |g'(0)| = \frac{3}{4}$

D'où $k = \max_{x\in I}|g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$

D'après I. et II. La méthode du point fixe converge vers la solution sur l'intervalle $I = [0,1]$

b- Nombre d'itération du point fixe pour calculer la solution approchée avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$

En utilisant l'estimation suivante : $|x_n - \alpha| \le |x_1 - x_0|\frac{k^n}{1-k}$, $k = \max_{x\in I}|g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$

Si on prend $x_0 = 0$ $\;\; x_1 = g(x_0) = x_0 + \frac{1}{4}\left(e^{-x_0} - x_0^2\right) = 0 + \frac{1}{4}\left(e^{-0} - 0\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow |x_1 - x_0| = \frac{1}{4}$

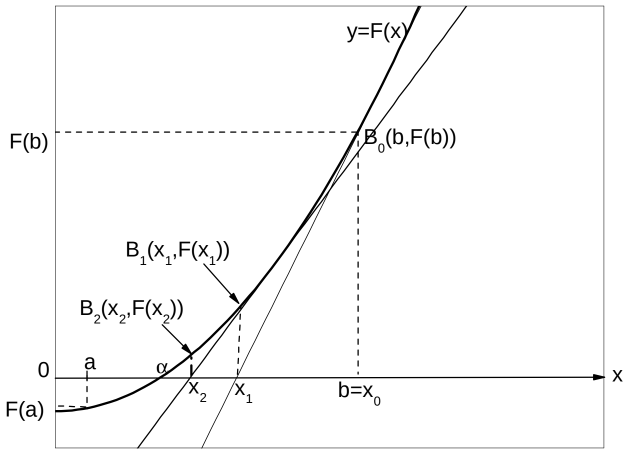
Sachant que $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ d'où $|x_1 - x_0|\dfrac{k^n}{1-k} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(k)}$

A.N : $n \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{10^{-10}(1-3/4)}{1/4}\right)}{\ln(3/4)} = 80.22 \quad n = 81$ itérations

I.4-Méthode de Newton :

I.4.1-Interprétation géométrique :

L'idée est de remplacer l'arc de la courbe représentatif de la fonction $F(x)$ par sa tangente au point x_0.



L'équation de la tangente au point x_0 est donnée par : $y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$.

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe ox est donnée par :

$F'(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{F(x_0)}{F'(x_0)}$

x_1 est une meilleure approximation de α que x_0.

-De proche en proche, nous construisons une suite $(x_n)_{n\in N}$ de solution approchées en utilisant la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Nous somme alors ramené à un problème de type point fixe qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases}$$

Nous pouvons dire alors que la méthode de Newton n'est autre qu'une méthode de point fixe de la forme :

$$x = g(x)$$

avec

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

Nous voyons bien que chercher α solution séparée de $F(x)=0$ est équivalent à la recherche du point fixe α tel que $\alpha = g(\alpha)$:

Nous avons

$$g(\alpha)=\alpha-\frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)}=\alpha \text{ car } (F(\alpha)=0 \;\; et \;\; F'(\alpha)\neq 0)$$

Convergence de la méthode :

Nous utilisons le théorème du point fixe local. Nous calculons $g'(x)$ et particulièrement $g'(\alpha)$, ce calcul est possible pour une fonction $F(x)$ deux fois dérivable (de classe $C^2[I]$).

$$g'(x)=1-\frac{F'(x)F'(x)-F''(x)F(x)}{[F'(x)]^2}=1-\frac{F'(x)F'(x)}{[F'(x)]^2}+\frac{F''(x)F(x)}{[F'(x)]^2}=\frac{F''(x)F(x)}{[F'(x)]^2}$$

D'où $g'(\alpha)=0$ car $F(\alpha)=0$

Conclusion : au voisinage de α, nous avons $|g'(x)|<1$

D'après le théorème du point fixe local, nous avons

$$\begin{cases} x_0 \in [\alpha - \delta x, \alpha + \delta x] \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases}$$

Converge vers l'unique solution de $F(x)$ sur l'intervalle I

Nous pouvons énoncer alors le théorème suivant :

Théorème de Newton :

Soit $F(x)$ une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$, telle que :

$$\left.\begin{array}{l} 1- \quad F(a).F(b)<0 \\ 2-F'(x)\neq 0 \text{ (monotone sur } [a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Il éxiste } \alpha \in \,]a,b[\, \text{ tel que } F(\alpha)=0$$

3- $F''(x)$ garde un signe constant sur l'intervalle $[a,b]$ ($F''(x)<0$ où $F''(x)>0$)

4-Partant d'un point x_0 qui satisfait l'inégalité

$$F(x_0).F''(x_0)>0 \text{ (vérifié par un certain choix de } x_0 \in [a,b])$$

Si les conditions annoncées, ci-dessus, sont satisfaites, alors le processus de Newton:

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisi} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases}$$

Converge pour ce choix de x_0 vers l'unique solution α de $F(x)$

De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$|x_n-\alpha| \le \frac{M}{2m}|x_{n-1}-\alpha|^2, \forall n>0$$

Avec $M = \underset{x\in[a,b]}{Max}|F''(x)|$, $m = \underset{x\in[a,b]}{Min}|F''(x)|$

Cette inégalité peut s'écrire en fonction de x_0

$$|x_n-\alpha| \le \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n-1}|x_0-\alpha|^{2n}, \forall n\in N$$

Exemple :

Soit la fonction : $F(x) = e^x - 4\cos(x) = 0$

1- Séparer graphiquement les racines de $F(x)$ et déduire le nombre de racines.

2- Chercher à une précision $\varepsilon = 10^{-5}$ près, une racine de $F(x)$ par la méthode de newton dans l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, en prenant $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et tester $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$

Solution :

1- La fonction $F(x) = e^x - 4\cos(x)$ est donnée dans le graphe suivant :

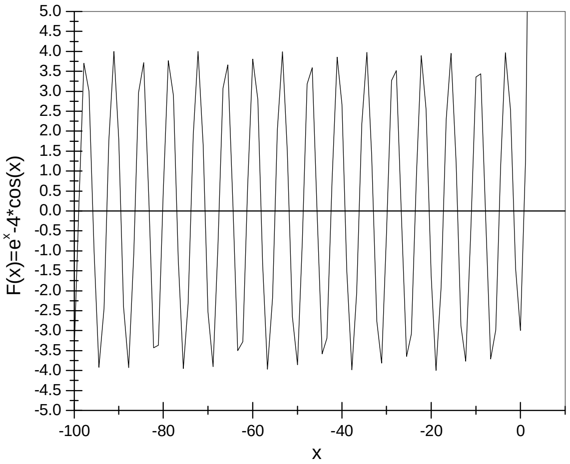


Figure 1 : $F(x) = e^x - 4\cos(x)$ en fonction de x pour x variant entre $[-100, 10]$

Sur la Figure 1, nous remarquerons que $F(x) = e^x - 4\cos(x)$ admet une infinité de racines et parmi toutes ces racines, il existe une seule racine positive. Figure 2

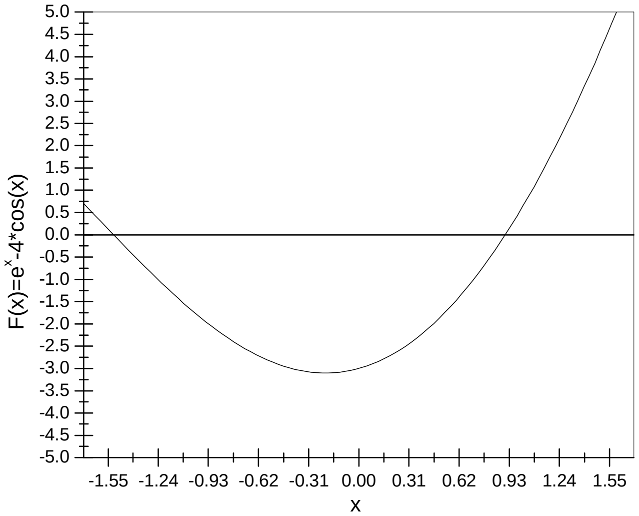


Figure 2 : $F(x) = e^x - 4\cos(x)$ en fonction de x pour x variant entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2- Résolution par la méthode de Newton :

Nous avons $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Vérification du théorème de Newton sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

a- $F(x)=e^{x}-4\cos(x)$ est de classe C^{∞} sur $I=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

b- $\left.\begin{array}{l} F\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-0.63514<0 \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.8104>0 \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right).F\left(\frac{\pi}{2}\right)<0 \Rightarrow \alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

c- $\forall x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[,\ F'(x)=e^{x}+4\sin(x)>0$

d- $\forall x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[,\ F''(x)=e^{x}+4\cos(x)>0$

Le théorème de Newton est vérifié. En partant de $x_0=\frac{\pi}{2}$, le processus de Newton donnée par

$$\begin{cases} x_0=\frac{\pi}{2} \\ x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases}$$

Converge vers l'unique solution positive α de $F(x)=e^{x}-4\cos(x)$ sur $I=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

Partant de $x_0=\frac{\pi}{2}$

$\left.\begin{array}{l} F\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.8104>0 \\ F''\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.8104>0 \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right).F''\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$

Alors le processus de Newton :

$$\begin{cases} x_0=\frac{\pi}{2} \\ x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{e^{x_n}-4\cos(x_n)}{e^{x_n}+4\sin(x_n)} \end{cases}$$

Converge vers la solution α

Calculons les itérés et testons l'inégalité $|x_{n+1}-x_n|<10^{-5}$

$x_0=\frac{\pi}{2}$

1ère Itération : $x_1=x_0-\frac{e^{x_0}-4\cos(x_0)}{e^{x_0}+4\sin(x_0)}=1.02480$, $|x_1-x_0|=0.54599>10^{-5}$;

2ème itération : $x_2=x_1-\frac{e^{x_1}-4\cos(x_1)}{e^{x_1}+4\sin(x_1)}=0.91046$, $|x_2-x_1|=0.11434>10^{-5}$

3ème itération : $x_3=x_2-\frac{e^{x_2}-4\cos(x_2)}{e^{x_2}+4\sin(x_2)}=0.90480$, $|x_3-x_2|=0.00566>10^{-5}$

4ème itération : $x_4 = x_3 - \dfrac{e^{x_3} - 4\cos(x_3)}{e^{x_3} + 4\sin(x_3)} = 0.90479$, $|x_4 - x_3| = 0.00001 = 10^{-5}$

5ème itération : $x_5 = x_4 - \dfrac{e^{x_4} - 4\cos(x_4)}{e^{x_4} + 4\sin(x_4)} = 0.90479$, $|x_5 - x_4| \approx 0.0000 < 10^{-5}$

Nous déduisons que la solution approchée, obtenue par la méthode de Newton, est $\alpha = 0.90479$