CHAPITRE II

Résolution des Systèmes d'Equations Linéaires

II.1.1-Définitions et Notations :

On appelle matrice de type (de dimension) (n,m) un tableau de nombres à n lignes, m colonnes. L'ensemble de matrices de types (n,m) est notée $M_{n,m}(IK)$, $(K = R\ ou\ C)$, $(K : Ensemble\ des\ scalaires)$. On adopte la notation suivante :

Une matrice A de dimension (n,m) sera notée $A_{n,m} = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La transposée de A, notée A^t sera alors

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & a_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{1m} & a_{2m} & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A est symétrique si $A = A^t$; on a aussi la propriété : $(AB)^t = B^t.A^t$

Une matrice carrée $A_{n,m}$ est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.

II.1.2-Résolution des Systèmes Linéaires :

Tout système d'équations linéaires peut s'écrire sous forme matricielle

$$AX = b\ ,\quad A \text{ : une matrice carrée}$$

Si $\det(A) \neq 0$ (A est inversible ou régulière), l'unique solution du système est donnée par :

$$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

Avec

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^t$$

A^* : est la comatrice donnée par :

$$A^* = (C_{i,j}), 1 \le i, j \le n$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(Aij)$$

Aij : C'est la matrice A sans la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Formule générale pour le calcul de $\det(A)$ selon les lignes :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(Aij)$$

II.1.3- Méthode de Cramer :

L'unique solution du système $AX = b$ ($\det(A) \neq 0$) est donnée selon Cramer par :

$$X_i = \frac{\det(Ai)}{\det(A)}$$

Ai est la matrice A où l'on a remplacé le i^{ème} colonne par le vecteur second membre « b ».

Cette méthode de Cramer est inadaptée pour résoudre les systèmes de grandes tailles car il y a trop de déterminants à calculer. Pour cela, on a recours à d'autres méthodes de résolution des systèmes d'équations $AX = b$. Ces méthodes sont classées dans deux groupes.

Les premières méthodes, intitulées Méthodes directes, sont basées sur la transformation du système initial $AX = b$, en passant par un nombre d'étapes finies, pour avoir la solution X. Parmi ces méthodes, on a la méthode de Gauss, La décomposition LU et la méthode de Cholesky.

Les méthodes du deuxième groupe, intitulées méthodes itératives, sont basées sur des procédures itératives qui permettent d'approcher la solution du système, en amorçant le calcul à partir d'une solution initiale $X^{(0)}$. Parmi ces méthodes, on a la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.

II.2-Méthodes Directes :

II.2.1-Méthode d'élimination de Gauss :

Soit à résoudre le système linéaire : $AX = b$

La méthode d'élimination de Gauss consiste à réaliser un nombre fini de transformations sur la matrice A de telle sorte à obtenir un système équivalent pour la recherche du même vecteur solution, mais avec une matrice triangulaire supérieure.

$$AX = b \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b}$$

Donnons la méthode à travers un exemple.

Soit à résoudre le système :

$$(\text{I}) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -8 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow AX = b$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

On adopte l'écriture suivante

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 12 \\ -1 & 3 & -1 & -8 \\ 3 & -4 & 2 & 16 \end{array}\right]$$

Le but est d'obtenir une matrice $\tilde{A}$ triangulaire supérieure avec « 1 » sur la diagonale.

Etape N°1 :

Puisque le pivot $a_{11}^{(0)} = 2 \neq 0$, on divise la première linge de A par $a_{11}^{(0)}$ et essayer d'avoir des zéros sous le nouveau pivot $a_{11}^{(1)}$

On obtient :

$$\begin{array}{l} L_1^{(1)} = \dfrac{L_1^{(0)}}{2} \\ L_2^{(1)} = L_2^{(0)} + L_1^{(1)} \\ L_3^{(1)} = L_3^{(0)} - 3L_1^{(1)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & \vdots & 6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & \vdots & -2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{(1)}X = b^{(1)}$$

Etape N°2 :

Comme $a_{22}^{(1)} = 1/2 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°1 mais appliquée à la deuxième colonne. On obtient :

$$\begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = 2L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \dfrac{7}{2}L_2^{(2)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{(2)}X = b^{(2)}$$

Etape N°3 et dernière :

Comme $a_{33}^{(2)} = 4 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°2 mais appliquée à la troisième colonne. On obtient :

$$\begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)}/4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{(3)}X = b^{(3)} \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b}$$

$$AX = b \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \tilde{b}_3 \\ x_2 = \tilde{b}_2 - a_{23}^{(3)}x_3 \\ x_1 = \tilde{b}_1 - a_{12}^{(3)}x_2 - a_{13}^{(3)}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

Et le déterminant de A est donné par :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = 2.\frac{1}{2}.4 = 4$$

On note le nouveau système $\tilde{A}X = \tilde{b}$

$$x_i = \tilde{b}_i - \sum_{k=i+1}^{n} \tilde{a}_{ik} x_k$$

Où $\tilde{a}_{ij}$ sont les éléments de la matrice $\tilde{A}$

II.2.1.1-Calcul de A^{-1} par la méthode d'élimination de Gauss :

Soit une matrice A_{nn} tel que $\det(A) \neq 0$. On a $A.A^{-1} = I_n$

On écrit : $A_{nn}^{-1} = [V_1, V_2, ..., V_n]$ et $I_n = [e_1, e_2, ..., e_n]$

D'où $A.A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A.[V_1, V_2, ..., V_n] = [e_1, e_2, ..., e_n] \Leftrightarrow [AV_1, AV_2, ..., AV_n] = [e_1, e_2, ..., e_n]$

$$\Rightarrow \begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ AV_n = e_n \end{cases} \qquad (1)$$

V_i est le vecteur colonne i de la matrice A^{-1}

e_i est le vecteur i de la base canonique. (exemple : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$)

En appliquant la méthode d'élimination de Gauss au système (1), on obtient

$$\begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ AV_n = e_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{A}V_1 = \tilde{e}_1 \\ \tilde{A}V_2 = \tilde{e}_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \tilde{A}V_n = \tilde{e}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{cases}$$

Exemple : Soit le système linéaire $AX = b$
Où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Méthode d'élimination de Gauss : $AX = b \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b}$

On adopte l'écriture suivante

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ L_2^{(0)} \\ L_3^{(0)} \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 10 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Etape N°1 :

Puisque le pivot $a_{11}^{(0)} = 1 \neq 0$, on divise la première ligne de A par $a_{11}^{(0)}$ et essayer d'avoir des zéros sous le nouveau pivot $a_{11}^{(1)}$

On obtient :

$$\begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1^{(0)} \\ L_2^{(1)} = 2L_1^{(1)} - L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} = L_1^{(1)} - L_3^{(0)} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right] \Leftrightarrow A^{(1)}X = b^{(1)}$$

Etape N°2 :

Comme $a_{22}^{(1)} = 8 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°1 mais appliquée à la deuxième colonne. On obtient :

$$\begin{matrix} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)}/8 \\ L_3^{(2)} = 4L_2^{(2)} + L_3^{(1)} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow A^{(2)}X = b^{(2)}$$

Etape N°3 et dernière :

Comme $a_{33}^{(2)} = 1 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°2 mais appliquée à la troisième colonne. On obtient :

$$\begin{matrix} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow A^{(3)}X = b^{(3)} \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b}$$

$$AX = b \Leftrightarrow \tilde{A}X = \tilde{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \tilde{b}_3 \\ x_2 = \tilde{b}_2 - a_{23}^{(3)}x_3 \\ x_1 = \tilde{b}_1 - a_{12}^{(3)}x_2 - a_{13}^{(3)}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = -1/2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Et le déterminant de A est donné par :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}^{(i-1)} = 1.8.1 = 8$$

Calcul de l'inverse de A.

On a : $A.A^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(I)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

On applique la méthode d'élimination de gausse aux système (I), (II) et (III).

a- Système (I), (II) et (II) :

On adopte l'écriture suivante:

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} \\ \\ L_2^{(0)} \\ \\ L_3^{(0)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & . & 1 & 0 & 0 \\ & & & . & & & \\ 2 & -4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ & & & . & & & \\ 1 & 6 & 0 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape N°1 :

Puisque le pivot $a_{11}^{(0)} = 1 \neq 0$, on divise la première ligne de A par $a_{11}^{(0)}$ et essayer d'avoir des zéros sous le nouveau pivot $a_{11}^{(1)}$

$$\begin{array}{r} L_1^{(1)} = L_1^{(0)} \\ \\ L_2^{(1)} = 2L_1^{(1)} - L_2^{(0)} \\ \\ L_3^{(1)} = L_1^{(1)} - L_3^{(0)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & . & 1 & 0 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & 8 & 0 & . & 2 & -1 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & -4 & 1 & . & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Etape N°2 :

Comme $a_{22}^{(1)} = 8 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°1 mais appliquée à la deuxième colonne. On obtient :

$$\begin{array}{r} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)}/8 \\ \\ L_3^{(2)} = 4L_2^{(2)} + L_3^{(1)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & . & 1 & 0 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & 1 & 0 & . & 1/4 & -1/8 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & 0 & 1 & . & 2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Etape N°3 et dernière :

Comme $a_{33}^{(2)} = 1 \neq 0$, on refait la même opération qu'à l'étape n°2 mais appliquée à la troisième colonne. On obtient :

$$\begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & . & 1 & 0 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & 1 & 0 & . & 1/4 & -1/8 & 0 \\ & & & . & & & \\ 0 & 0 & 1 & . & 2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalement, on obtient :

$$AV_1 = e_1 \Leftrightarrow \tilde{A}V_1 = \tilde{e}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} V_{31} = \tilde{e}_{13} \\ V_{21} = \tilde{e}_{12} - a_{23}^{(3)}V_{31} \\ V_{11} = \tilde{e}_{11} - a_{12}^{(3)}V_{21} - a_{13}^{(3)}V_{31} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{31} = 2 \\ V_{21} = 1/4 \\ V_{11} = -3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{11} = -3/2 \\ V_{21} = 1/4 \\ V_{31} = 2 \end{cases}$$

$$AV_2 = e_2 \Leftrightarrow \tilde{A}V_2 = \tilde{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V_{32} = \tilde{e}_{23} \\ V_{22} = \tilde{e}_{22} - a_{23}^{(3)}V_{32} \\ V_{12} = \tilde{e}_{21} - a_{12}^{(3)}V_{22} - a_{13}^{(3)}V_{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{32} = -1/2 \\ V_{22} = -1/8 \\ V_{12} = 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{12} = 3/4 \\ V_{22} = -1/8 \\ V_{32} = -1/2 \end{cases}$$

$$AV_3 = e_3 \Leftrightarrow \tilde{A}V_3 = \tilde{e}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} V_{33} = \tilde{e}_{33} \\ V_{23} = \tilde{e}_{32} - a_{23}^{(3)}V_{33} \\ V_{13} = \tilde{e}_{31} - a_{12}^{(3)}V_{23} - a_{13}^{(3)}V_{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{33} = -1 \\ V_{23} = 0 \\ V_{13} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{13} = 1 \\ V_{23} = 0 \\ V_{33} = -1 \end{cases}$$

Finalement :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/8 & 0 \\ 2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

II.2.2-Méthode de décomposition LU :

Définition :

On dit que $A_{[k]}$ est la sous matrice principale d'ordre k de A si $A_{[k]}$ est la matrice d'ordre (k,k) de coefficients $a_{ij}, 1 \le i, j \le k, 1 \le \text{k} \le \text{n}$

Théorème :

Si A est une matrice carrée d'ordre n dont toutes les sous matrices principales sont régulières, alors il existe une décomposition unique de A sous la forme $A = LU$.
Où L est une matrice triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire. U est une matrice triangulaire supérieure.

La résolution du système $AX = b$ devient

$$AX = b \Leftrightarrow LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

La résolution du système $AX = b$ revient à la résolution des deux systèmes $LY = b$ par un algorithme descendant $(\downarrow)$ et $UX = Y$ par un algorithme ascendant $(\uparrow)$. La résolution de ces deux systèmes est immédiate puisque les matrices L et U sont triangulaires.

Remarque : U est la matrice obtenue par la méthode d'élimination de Gauss.

La méthode :

Soit A une matrice dont toutes les sous matrices sont régulières.

Exemple : $A(3,3)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$A_{[1]} = [1]$, $\det(A_{[1]}) = 1$

$A_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\det(A_{[2]}) = -8$

$A_{[3]} = A$, $\det(A_{[3]}) = 8$

Toutes les sous matrice de A sont régulières, A admet une décomposition unique $A = LU$ **.**

On pose :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = LU \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U .

$$\begin{cases} U_{11} = 1 \\ U_{12} = 2, \\ U_{13} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{21}U_{11} = 2 \\ L_{21}U_{12} + U_{22} = -4 \\ L_{21}U_{13} + U_{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{21} = 2 \\ U_{22} = -8, \\ U_{23} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{31}U_{11} = 1 \\ L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \\ L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{31} = 1 \\ L_{32} = -1/2 \\ U_{33} = -1 \end{cases}$$

D'où

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalement, l'algorithme de la décomposition LU est donné par :

$$U_{nj} = a_{nj} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}U_{kj} \;, \; j = n,$$

$$L_{nn} = 1, \forall n$$

$$L_{im} = \frac{\left(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} L_{ik}U_{km}\right)}{U_{mm}}$$

Remarque :

L est une matrice triangulaire inférieure $\Rightarrow L_{ik} = 0$ pour $k > i$

U est une matrice triangulaire supérieure $\Rightarrow U_{kj} = 0$ pour $k > j$

Donc $L_{ik}U_{kj} = 0$ pour $k > \min(i, j)$ d'où $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik}U_{kj}$

La résolution :

$$AX = b \Leftrightarrow LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b & (1) \\ UX = Y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} (\downarrow) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (\uparrow) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ d'où } X = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1.\det(U) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii} \,,$$

$$\det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} U_{ii} = 1.-8.-1 = 8$$

II.2.3- Calcul de A^{-1} par la méthode de décomposition LU :

Soit une matrice A_{nn} tel que toutes les sous matrices $A_{[k]}$ soient régulières.

On a $A.A^{-1} = I_n$

On écrit : $A_{nn}^{-1} = [V_1, V_2, ..., V_n]$ et $I_n = [e_1, e_2, ..., e_n]$

D'où $A.A^{-1} = I_n \Leftrightarrow A.[V_1, V_2, ..., V_n] = [e_1, e_2, ..., e_n] \Leftrightarrow [AV_1, AV_2, ..., AV_n] = [e_1, e_2, ..., e_n]$

$$\Rightarrow \begin{cases} AV_1 = e_1 \Leftrightarrow LUV_1 = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} LY_1 = e_1 \\ UV_1 = Y_1 \end{cases} \\ AV_2 = e_2 \Leftrightarrow LUV_2 = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} LY_2 = e_2 \\ UV_2 = Y_2 \end{cases} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ AV_n = e_n \Leftrightarrow LUV_n = e_n \Leftrightarrow \begin{cases} LY_n = e_n \\ UV_n = Y_n \end{cases} \end{cases} \qquad (1)$$

Exemple :

Soit la matrice $A(3,3)$ tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

1-Trouver les matrices L et U tel que $A = LU$?

Il faut d'abord s'assurer que la matrice A admet une décomposition LU. On calcule les déterminant des sous matrices de A.

$A_{[1]} = [2]$, $\det(A_{[1]}) = 2 \neq 0$

$A_{[2]} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A_{[2]}) = 1 \neq 0$

$$A_{[3]}=\begin{bmatrix}2&-5&1\\-1&3&-1\\3&-4&2\end{bmatrix},\ \det(A_{[3]})=4\neq 0$$

Les sous matrices de A sont régulière, la matrice A admet une décomposition LU unique.
On pose

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\L_{21}&1&0\\L_{31}&L_{32}&1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\0&U_{22}&U_{23}\\0&0&U_{33}\end{bmatrix}$$

$$A=LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2&-5&1\\-1&3&-1\\3&-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\L_{21}&1&0\\L_{31}&L_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\0&U_{22}&U_{23}\\0&0&U_{33}\end{bmatrix}$$

Par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U.

$$\begin{cases}U_{11}=2\\U_{12}=-5\\U_{13}=1\end{cases},\ \begin{cases}L_{21}U_{11}=-1\\L_{21}U_{12}+U_{22}=3\\L_{21}U_{13}+U_{23}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_{21}=-1/2\\U_{22}=1/2\\U_{23}=-1/2\end{cases},\ \begin{cases}L_{31}U_{11}=3\\L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22}=-4\\L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_{31}=3/2\\L_{32}=7\\U_{33}=4\end{cases}$$

Finalement :

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\3/2&7&1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}2&-5&1\\0&1/2&-1/2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

2-Résoudre le système : $AX=b$ où

$$A=\begin{bmatrix}2&-5&1\\-1&3&-1\\3&-4&2\end{bmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\text{ et } b=\begin{pmatrix}12\\-8\\16\end{pmatrix}$$

On a $AX=b \Leftrightarrow LUX=b \Leftrightarrow \begin{cases}LY=b\\UX=Y\end{cases}$

On a $LY=b$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\3/2&7&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}12\\-8\\16\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}Y_1=12\\Y_2=-2\\Y_3=12\end{cases}$$

Et $UX=Y$

$$\begin{bmatrix}2&-5&1\\0&1/2&-1/2\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}12\\-2\\12\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_3=3\\X_2=-1\\X_1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=2\\X_2=-1\\X_3=3\end{cases}$$

3-Calculer l'inverse de la matrice A.

On pose $A.A^{-1}=I_3 \Rightarrow LUA^{-1}=I_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} et \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} et \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{et} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{Bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad et \quad \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -5/4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad et \quad \begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3/2 \\ 1/4 \\ -7/4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Finalement : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & -7/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

II.2.3-Méthode de Cholesky :

Soit A une matrice carrée d'ordre n tel que $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$

Définition :

1- La matrice A est dite symétrique si elle coïncide avec sa transposée.

$$A=A^t \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\ ,\mathrm{i,j}=1,\mathrm{n}$$

2- La matrice A est dite définie positive si

i- $V^tAV\ge 0\,,\forall \mathrm{V}\in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$

ii-$V^tAV=0\Leftrightarrow \mathrm{V}=0_{\mathrm{R}^{\mathrm{n}}}$

Si les deux conditions (1) et (2) sont vérifiées, alors A est appelée **Matrice Symétrique Définie Positive. (S.D.P)**

Théorème :

La matrice A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs :

$\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ ***; … ;,*** $\Delta_{n-1}=\det\left(A_{[n-1]}\right)$ ***;*** $\Delta_n=\det(A)$ ***sont strictement positifs.***

Théorème de Cholesky :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, non singulière et symétrique. Pour qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L, de même dimension que A, telle que $A=L.L^t$, il faut et il suffit que A soit une matrice définie positive.

Remarque : La matrice L n'est pas unique. La décomposition devient unique si l'on fixe à l'avance les éléments diagonaux L_{ii} avec $L_{ii}>0$

Algorithme de décomposition :

Afin d'obtenir les éléments L_{ij} de la matrice L, on multiplie les matrices L et L^t, puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité $A=L.L^t$ pour obtenir les équations :

$$\begin{cases} L_{11}=\sqrt{a_{11}} \\ L_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}L_{ik}^2}\ ,\ i=2,n \\ L_{ij}=\dfrac{1}{L_{jj}}\left[a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}L_{ik}L_{jk}\right],\ i>j \\ L_{ij}=0\ ,\ i<j \end{cases}$$

Résolution du système $AX=b$

La résolution du système $AX=b$ revient à résoudre :

$$AX=b \Leftrightarrow LL^tX=b \Leftrightarrow \begin{cases} LY=b \\ L^tX=Y \end{cases}$$

D'où on obtient

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{b_1}{L_{11}} \\ Y_i = \dfrac{1}{L_{ii}}\left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} Y_k\right]; i = 2, n \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} X_n = \dfrac{Y_n}{L_{nn}} \\ X_i = \dfrac{1}{L_{ii}}\left[Y_i - \sum_{k=i+1}^{n} L_{ki} X_k\right]; i = 1, n-1 \end{cases}$$

Calcul du déterminant de A

$$A = L.L^t \Rightarrow \det(A) = \det(L.L^t) = \det(L).\det(L^t) = [\det(L)]^2 = \left[\prod_{i=1}^{n} L_{ii}\right]^2$$

Exemple :
On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 13 & -19 & -3 \\ 5 & -19 & 38 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

La matrice A est symétrique : $A = A^t$
La matrice A est définie positive :
On a les déterminants des mineurs de A qui sont tous positifs :

$A_{[1]} = [1]$, $\det(A_{[1]}) = 1 > 0$

$A_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$, $\det(A_{[2]}) = 4 > 0$

$A_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 13 & -19 \\ 5 & -19 & 38 \end{bmatrix}$, $\det(A_{[3]}) = 36 > 0$

$A_{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 13 & -19 & -3 \\ 5 & -19 & 38 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 18 \end{bmatrix}$, $\det(A_4) = 30 > 0$

La matrice A est une matrice symétrique définie positive, elle admet une décomposition $A = L.L^t$

On pose : $L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$ tel que : $L_{ii} > 0, i = \overline{1, 4}$

Calcul des L_{ij}

On a

$$L.L^t = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{41} \\ 0 & L_{22} & L_{32} & L_{42} \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{43} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 13 & -19 & -3 \\ 5 & -19 & 38 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

D'où

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$L_{11}.L_{21} = a_{12} = -3 \Leftrightarrow L_{21} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = -3$$

$$L_{11}.L_{31} = a_{13} = 5 \Leftrightarrow L_{31} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = 5$$

$$L_{11}.L_{41} = a_{14} = 1 \Leftrightarrow L_{41} = \frac{a_{14}}{L_{11}} = 1$$

$$L_{21}^2 + L_{22}^2 = a_{22} = 13 \Leftrightarrow L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} = \sqrt{13-9} = 2$$

$$L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} = a_{23} = -19 \Leftrightarrow L_{32} = \frac{(a_{23} - L_{21}L_{31})}{L_{22}} = \frac{-19+15}{2} = -2$$

$$L_{21}L_{41} + L_{22}L_{42} = a_{24} = -3 \Leftrightarrow L_{42} = \frac{(a_{24} - L_{21}L_{41})}{L_{22}} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = a_{33} = 38 \Leftrightarrow L_{33} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = \sqrt{38-25-4} = 3$$

$$L_{41}L_{31} + L_{42}L_{32} + L_{43}L_{33} = a_{34} = 2 \Leftrightarrow L_{43} = \frac{a_{34} - L_{41}L_{31} - L_{42}L_{32}}{L_{33}} = \frac{2-5}{3} = -1$$

$$L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2 + L_{44}^2 = a_{44} = 18 \Leftrightarrow L_{44} = \sqrt{a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2} = \sqrt{18-1-0-1} = 4$$

Finalement :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{et} \quad L^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

II.3-Méthodes Itératives :

Définitions :

- Soit A une matrice carrée d'ordre n. $A_{n,n}$.
    - On appelle trace de A le scalaire noté : $tra(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
    - On dit que $\lambda \in C$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe une vecteur $\vec{V} \in C^n$ tel que : $\vec{V} \neq \vec{0}_{C^n}$ et $A\vec{V} = \lambda\vec{V}$
    - Les valeurs propres de la matrice A sont les racines réelles ou complexes du polynôme caractéristique de A noté : $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$
    - $tra(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$, $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$
    - Le spectre de la matrice A, noté $S_p(A)=\{\lambda_i(A)\}$
    - Le rayon spectral de la matrice A, noté $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}(|\lambda_i(A)|)$
    - La matrice A est à diagonale dominante stricte (D.D.S) si et seulement si $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, $\forall$i fixé ou $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|$, $\forall j$ fixé

Propositions :

1- Si A est symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles, de plus si A est définie positive, alors les valeurs propres de A sont toutes positives.

2- On suppose que A est une matrice à diagonale strictement dominante (D.D.S), alors les valeurs propres de A sont non nulles.

Conséquences : A est une matrices à diagonale strictement dominante $\Rightarrow$ $\det(A)\neq 0$, l'inverse de A existe.

Normes Matricielles :

On appelle norme matricielle toute application de $M_m(R)$ dans R^+ qui satisfait les axiomes suivants :

$$\begin{aligned} \|\bullet\| \quad M_m(R) &\to R^+ \\ A &\to \|A\| \\ &\text{norme de } A \end{aligned}$$

I. $\|A\|\ge 0$ de plus $\|A\|=0$ si et seulement si $A=0$.

II. $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$ $\forall\lambda\in R$, $\forall A$

III. $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$, $\forall A$ et $\forall B$

IV. $\|A.B\|\le\|A\|.\|B\|$, $\forall A$ et $\forall B$

Exemple de normes Matricielles

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right),\qquad \|A\|_2=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\right]^{1/2},\qquad \|A\|_3=\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Application :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_3 = \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\left(|a_{i1}| + |a_{i2}| + |a_{i3}|\right)$$
$$\|A\|_3 = \|A\|_\infty = \max\left(|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|;\ |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|;\ |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|\right)$$
$$\|A\|_3 = \|A\|_\infty = \max(1+1;\ 3+2;\ 2+1+2) = \max(2;\ 5;\ 5) = 5$$

Proposition :
Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors $\rho(A) \le \|A\|$

Lorsque l'ordre n d'un système algébrique linéaire est très grand, la résolution du système par les méthodes directes (Gauss, LU, Cholesky, ….) devient assez compliqué. On fait appel aux méthodes dites itératives ou indirectes, sous réserve de convergence. Le principe de ces méthodes consiste à définir une suite de valeurs $\left(X^{(k)}\right)$ convergentes vers la solution exacte (X) du système $AX = b$.

Définition :
Une méthode itérative de résolution du système $AX = b$ consiste d'abord à passer au système $X = \alpha X + \beta$ (que l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par : $X_{k+1} = \alpha X_k + \beta$, X_0 étant une approximation initiale.

Remarque : Les méthodes itératives sont généralement utilisées lorsque l'ordre du système est supérieur à 100 $(n \ge 100)$ et si la matrice A contient beaucoup d'éléments nuls.

Les méthodes itératives sont :
1- La méthode de Jacobi ;
2- La méthode de Gauss-Seidel.

II.3.1-Méthode de Jacobi :

On suppose que les $a_{ii} \ne 0$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ où $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i, j\le n}$

Le système $AX = b$ s'écrit encore :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \bullet\bullet\bullet + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \bullet\bullet\bullet + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \bullet\bullet\bullet + a_{3n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \bullet\bullet\bullet + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Le principe de la méthode de Jacobi consiste à résoudre la $I^{ème}$ équation par rapport à l'inconnue x_i. On obtient alors le système équivalent, appelé système réduit.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + 0x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_{1n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + 0x_2 + \alpha_{23}x_3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_{2n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + 0x_3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_{3n-1}x_{n-1} + \alpha_{3n}x_n \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + 0x_n \end{cases}$$

Où

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j, & i, j = \overline{1,n} \\ \alpha_{ii} = 0, & i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Le système réduit ainsi obtenu s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$X = \alpha X + \beta$$

Où

$$\alpha = (\alpha_{ij}), \quad \beta = (\beta_i)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \bullet\bullet\bullet & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \bullet\bullet\bullet & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \bullet\bullet\bullet & \alpha_{3n-1} & \alpha_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \bullet\bullet\bullet & \alpha_{n-1n} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \beta_n \end{Bmatrix}$$

$\alpha = (\alpha_{ij})$ est la matrice de Jacobi.

Conclusion : Le système $AX = b$ devient équivalent au système réduit $X = \alpha X + \beta$

$$AX = b \iff X = \alpha X + \beta \text{ (Forme récursive)}$$

A partir du système $X = \alpha X + \beta$, en partant d'une approximation initiale arbitraire $X^{(0)}$, on résout le système :

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta ; k \in N$$

Si la suite des approximations $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$ possède une limite $X = \lim_{k \to \infty} X^{(k)}$, cette limite est solution du système $X = \alpha X + \beta$ et donc du système $AX = b$.

En effet, il suffit de passer à la limite dans le système $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ pour obtenir :

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim_{k \to \infty} X^{(k)} + \beta \iff X = \alpha X + \beta \iff AX = b$$

Algorithme de la méthode :

Ecrivons le système $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$ sous forme développée :

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \,,\; i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], i = \overline{1,n}$$

D'où l'algorithme de Jacobi :

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Critère d'arrêt :

En pratique, les itérations vont jusqu'à atteindre la précision ε donnée au préalable, qui se traduit par :

$$\left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\| \leq \varepsilon \,,\; i = \overline{1,n}$$

Convergence de la méthode de Jacobi :

Théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Jacobi converge, indépendamment de la condition initiale $X^{(0)}$, est que $\rho(\alpha) < 1$ où $\rho(\alpha) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$,

λ_i : valeur propre de α

Remarque :

1- Le calcul de $\rho(\alpha)$ est très compliqué, il suffit alors de vérifier si $\|\alpha\| < 1$, puisque $\rho(\alpha) \leq \|\alpha\|$
2- La méthode de Jacobi converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
   - ❖ $\|\alpha\|_1 < 1$
   - ❖ $\|\alpha\|_2 < 1$
   - ❖ $\|\alpha\|_3 = \|\alpha\|_\infty < 1$
3- Si A est une matrice à diagonale dominante stricte (DDS) alors la méthode de Jacobi converge.

II.3.2-Méthode de Gauss-Seidel :

Soit le système $AX = b$ où

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \bullet\bullet\bullet & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \bullet\bullet\bullet & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \bullet\bullet\bullet & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \bullet\bullet\bullet & a_{n-1n} & a_{nn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Soient D, E et F les matrices définies par :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \bullet\bullet\bullet & -a_{n-1n} & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \bullet\bullet\bullet & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \bullet\bullet\bullet & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & -a_{3n-1} & -a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1- Algorithme de Jacobi :

On a $A = D - E - F$ d'où

$$AX = b \Leftrightarrow (D - E - F)X = b \Leftrightarrow DX = (E + F)X + b$$

Et de là on obtient :

$$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$$

ou encore

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b \qquad \textbf{Formule de Jacobi}$$

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta \text{ où } \alpha = D^{-1}(E + F) \text{ et } \beta = D^{-1}b$$

Qui n'est autre que la formule de Jacobi.

En effet :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \bullet\bullet\bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\bullet & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix}, \; D^{-1}b = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n/a_{nn} \end{Bmatrix} = \beta$$

$$D^{-1}(E+F)=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \bullet\bullet\bullet & -a_{1n-1}/a_{11} & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \bullet\bullet\bullet & -a_{2n-1}/a_{22} & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \bullet\bullet\bullet & -a_{3n-1}/a_{33} & -a_{3n}/a_{33} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \bullet\bullet\bullet & -a_{n\_1n}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix}=\alpha$$

Ainsi, on aboutit à l'algorithme de Jacobi.
Remarque : On peut noter α par J d'où

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + \beta$$

2- Algorithme de Gauss-Seidel :

Une autre décomposition de A, autre que celle développée ci-dessus, permet d'aboutir à la méthode de Gauss-Seidel :
On a :

$$AX = b \Leftrightarrow (D-E-F)X = b \Leftrightarrow (D-E)X = FX + b$$

D'où

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

ou encore

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b \quad \textbf{Formule de Gauss-Seidel}$$

Et en développant la formule récursive ci-dessus, on aboutit à l'algorithme de Gauss-Seidel.

Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Remarque :

1- La matrice de Gauss-Seidel, notée G_s est donnée par : $G_s = (D-E)^{-1}F$
2- La matrice de Jacobi, notée J, est donnée par : $J = D^{-1}(E+F)$
3- Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que les $a_{ii} \neq 0, \forall\, i = \overline{1,n}$.
4- Tous les résultats de convergence pour la méthode de Jacobi (J) restent valables pour la méthode de Gauss-Seidel (G_s) (remplacer α par J ou par G_s).

Exemple 1 :

On considère le système $AX = b$

Où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$; $b = \begin{Bmatrix} 5 \\ -6 \end{Bmatrix}$

1-Calculer la matrice G de Gauss-Seidel associée au système.

2- En partant de la relation $AX = b$, montrer que $(D-E)^{-1}b = X - GX$.

Solution 1:

1-Calcul de la matrice de Gauss-Seidel G associée au système :

On pose $A = D - E - F$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a $G = (D-E)^{-1}F$

$$D - E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\ (D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

2-On pose $A = D - E - F$

Où

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ ;\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2-Le système $AX = b$ s'écrit alors $(D-E-F)X = b$

D'où $(D-E)X = FX + b \Rightarrow X = (D-E)^{-1}FX + (D-E)^{-1}b = GX + (D-E)^{-1}b$

=> $(D-E)^{-1}b = X - GX$

On écrit le processus itératif :

$X^{(K+1)} - GX^{(K)} = (D-E)^{-1}b \Rightarrow X^{(K+1)} - X^{(K)} - GX^{(K)} = (D-E)^{-1}b - X^{(K)}$ (a)

$X - GX = (D-E)^{-1}b \Rightarrow X - X^{(K)} - GX = (D-E)^{-1}b - X^{(K)}$ (b)

'a)=(b) => $X^{(K+1)} - X^{(K)} = X^{(K)} - X - GX + GX^{(K)}$

$$X^{(K+1)} - X^{(K)} = -(I-G)\left(X^{(K)} - X\right)$$

Exemple 2:

On considère le système $AX = b$, où la matrice A est définie de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et β est un paramètre réel.

1-Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre β pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.

2-Calculer les matrices d'itération J pour la méthode de Jacobi et G pour la méthode de Gauss-Seidel.

3- Etablir pour quelles valeurs de β les méthodes sont convergentes. Quelle est la méthode qui converge le plus rapidement.

Solution 2:

1- On sait que si la matrice A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, alors les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont convergentes. Pour satisfaire cette condition, il faut imposer :

$$1 > |2(1-\beta)| \Longrightarrow \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$$

2-Calcul des matrices d'itération J pour la méthode de Jacobi et G pour la méthode de Gauss-Seidel.

On pose $A = D - E - F$

Où $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 0 & -2(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- Les valeurs de β pour lesquelles les méthodes sont convergentes.

Les méthodes convergent si leurs rayons spectraux sont strictement inférieurs à 1.

On a $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|$ où $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de la matrice A.

Pour la matrice de Jacobi J, les valeurs propres sont $\lambda_1(J) = 0$, $\lambda_{2,3}(J) = \pm\sqrt{1-\beta}$

Donc $\rho(J) = \left|\sqrt{1-\beta}\right|$ et $\rho(J) < 1$ si et seulement si $1 < \beta < 2$.

Pour la matrice de Jacobi G, les valeurs propres sont $\lambda_{1,2}(G) = 0$, $\lambda_3(G) = 1-\beta$

Donc $\rho(G) = |1-\beta|$ et $\rho(G) < 1$ si et seulement si $0 < \beta < 2$.

La méthode qui converge le plus rapidement.

On voit que $\rho(G) = \rho^2(J)$==> La méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que celle de Jacobi.

Exemple 3 : On considère le système linéaire $AX = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \; b = \begin{Bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ -11 \end{Bmatrix}$$

La matrice A peut s'écrire comme $A = D - E - F$ où les matrices D, E et F sont données par :

$$D = (D)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i = j \\ 0, \quad i \neq j \end{cases}, \quad E = (E)_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, \; i > j \\ \;0, \quad i \leq j \end{cases}, \quad F = (F)_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, \; i < j \\ \;0, \quad i \geq j \end{cases}$$

1- On considère les deux méthodes itératives suivantes :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b = B_1 x^{(k)} + \beta_1$$
$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b = B_2 x^{(k)} + \beta_2$$

Calculer les matrices B_1, B_2 et les vecteurs β_1 et β_2.

2-Calculer le rayon spectral des deux matrices d'itération et établir si les deux méthodes sont convergentes. De quelles méthodes s'agit-il ? Au vu des rayons spectraux calculés, quelle est la méthode la plus rapide ?

3-Résoudre le système linéaire $AX = b$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$, en utilisant les deux méthodes et le vecteur initial $X^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Exemple 4 :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

1- Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle définie positive ?
2- Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi
3- Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4- Ecrire la matrice G de l'itération de Gauss-Seidel.
5- Calculer $\rho(G)$. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

Exemple : Soit le système $AX = b$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

1- Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi
2- Ecrire la matrice G_s de l'itération de Gauss-Seidel

Solution :

On écrit la matrice A sous la forme $A = D - E - F$ où

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -10 & 0 & 0 \\ -13 & -14 & -15 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1- La matrice de Jacobi est donnée par :

$$AX = b \Leftrightarrow (D - E - F)X = b \Leftrightarrow DX = (E + F)X + b \Leftrightarrow X = D^{-1}(E + F)X + D^{-1}b = JX + \beta$$

Où

$$J = D^{-1}(E + F) \text{ et } \beta = D^{-1}b$$

On écrit : $J = D^{-1}(E + F) = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -5/6 & 0 & -7/6 & -4/3 \\ -9/11 & -10/11 & 0 & -12/11 \\ -13/11 & -14/11 & -15/11 & 0 \end{bmatrix}$$

2- La matrice de Gauss-Seidel est donnée par :

$$AX = b \Leftrightarrow (D - E - F)X = b \Leftrightarrow (D - E)X = FX + b \Leftrightarrow X = (D - E)^{-1}FX + (D - E)^{-1}b = G_sX + \beta_1$$

Où

$$G_s = (D - E)^{-1}F \text{ et } \beta_1 = (D - E)^{-1}b$$

On écrit : $G_s = (D - E)^{-1}F = (D - E)^{-1}(D - E - A) = (D - E)^{-1}(D - E) - (D - E)^{-1}A$

$$G_s = I - (D - E)^{-1}A$$

$$G_s = \begin{bmatrix} 0 & -2.0000 & -3.0000 & -4.0000 \\ 0 & -0.6667 & -1.3333 & -2.0000 \\ 0 & -0.1212 & -0.2424 & -0.3636 \\ 0 & -0.0530 & -0.1061 & -0.1591 \end{bmatrix}$$