Faculté de la Technologie | *Année Universitaire 2008/2009*
Département $2^{ème}$ Année ST | *$2^{ème}$ Année Sciences Technique*
Module : Math VI

Epreuve de Moyenne Durée

Exercice N°1 : (08 points)

On veut calculer les zéros de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$. Cette fonction admet deux racines α_1 et α_2 dans cet intervalle.

1-Donner un intervalle de longueur $\pi/2$, contenant la première racine, négative, α_1 et un intervalle de longueur $\pi/3$ contenant la deuxième racine, positive, α_2.

2-Peut-on appliquer la méthode de la dichotomie pour calculer les deux racines α_1 et α_2 ? Pourquoi ?

3- Ecrire la méthode de Newton pour la fonction $f(x)$. Sur quelle fonction $\varphi(x)$ définit-on les itérations de point fixe ?

4-On considère maintenant la méthode de point fixe $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, avec

$$g(x) = \sin(x) + \frac{x}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pour calculer la racine positive de $f(x)$, Etablir si cette méthode de point fixe est convergente sur l'intervalle correspondant calculé dans la question 1.

Barème de l'exercice N°1 : (02.00+02.00+02.00+02.00) pts

Exercice N°2 : (05 points)

On considère le système linéaire $AX = b$ où

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

On veut calculer la décomposition de Cholesky de la matrice $B = A^2$

1-Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel $\varepsilon \in \Re$, la matrice B est symétrique définie positive.

2-Calculer les valeurs propres de B et déduire son rayon spectral pour $\varepsilon = 3$.

Barème de l'exercice N°1 : (02.00+03.00) pts

Exercice N°3 : (07 points)

On considère le système $AX = b$, où la matrice A est définie de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et β est un paramètre réel.

1-Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre β pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.

2-Calculer les matrices d'itération J pour la méthode de Jacobi et G pour la méthode de Gauss-Seidel.

3- Etablir pour quelles valeurs de β les méthodes sont convergentes. Quelle est la méthode qui converge le plus rapidement.

Barème de l'exercice N°3 : (02.00+03.00+02.00) pts

Mr MEZIANI

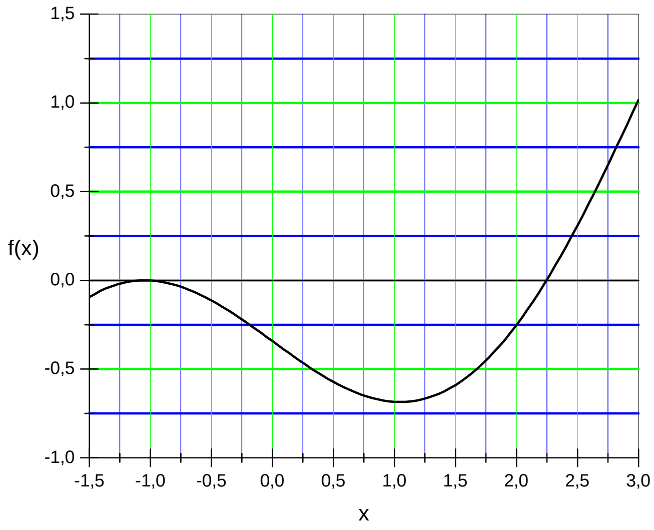
Faculté de la Technologie *Année Universitaire 2008/2009*
Département 2ème Année ST *2ème Année Sciences Technique*
Module : Math VI

Corrigé Epreuve de Moyenne Durée

EXERCICE 1- : (08 Pts)

1-Le graphe de la fonction $f(x)=\frac{x}{2}-\sin(x)+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est donné sur le graphe ci-contre :

En regardant le graphe de la fonction $f(x)$, on voit qu'elle possède une racine α_1 dans l'intervalle $[-\pi/2,0]$ de longueur $\pi/2$ et une racine α_2 dans l'intervalle $[2\pi/3,\pi]$ de longueur $\pi/3$.



2-Pour calculer la racine α_2, on peut utiliser la méthode de la Dichotomie pour la calculer :
Justification :
a- $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $[2\pi/3,\pi]$
b- $f(2\pi/3).f(\pi)<0$
Pour calculer la racine α_1, on ne peut pas utiliser la méthode de la Dichotomie pour la calculer.
Justification :
a- $f(x)$ n'est pas croissante sur l'intervalle $[-\pi/2,0]$
b- $f(-\pi/2).f(0)>0$

3- Méthode de Newton pour la fonction $f(x)$ s'écrit.

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}-\left(x^{(n)}/2-\sin(x^{(n)})+\pi/6-\sqrt{3}/2\right)/\left(1/2-\cos(x^{(n)})\right)$$

La fonction $\varphi(x)$ sur la quelle on définit les itérations de point fixe.
En considérant la méthode du Newton comme une méthode de point fixe $x^{(n+1)}=\varphi\left(x^{(n)}\right)$ où :

$$\varphi(x)=x-\left(x/2-\sin(x)+\pi/6-\sqrt{3}/2\right)/\left(1/2-\cos(x)\right)$$

4-On considère maintenant la méthode de point fixe $x^{(k+1)}=g\left(x^{(k)}\right)$, avec

$$g(x)=\sin(x)+x/2-\left(\pi/6-\sqrt{3}/2\right)$$

Pour calculer la racine positive de $f(x)$.
Convergence de la méthode du point fixe sur l'intervalle $[2\pi/3,\pi]$
a- $g(x)=\sin(x)+x/2-\left(\pi/6-\sqrt{3}/2\right)$ est continue, monotone (strictement croissante) et dérivable sur l'intervalle $[2\pi/3,\pi]$
b- $g'(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}$, $0\le|g'(x)|\le\frac{1}{2}$ $\forall x\in[2\pi/3,\pi]$
Donc la méthode converge vers la solution α_2

Mr MEZIANI

Exercice N°2 : (05 points)

On considère le système linéaire $AX = b$ où

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculer de la matrice $B = A^2$

$$B = A.A = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 + 5 & \varepsilon + 5 & 2\varepsilon + 7 \\ \varepsilon + 5 & 11 & 8 \\ 2\varepsilon + 7 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

1-Les valeurs du paramètre réel $\varepsilon \in \Re$ pour les quelles la matrice B est symétrique définie positive.

a- On a $B_{ij} = B_{ji}$, pour $1 \le i,j \le 3$ *et* $i \ne j$ ==>La matrice B est symétrique

b- Pour que la matrice B soit définie positive, il faut que les mineurs principaux de la matrice B soient strictement positifs :

1- $\det\left[\varepsilon^2 + 5\right] = \varepsilon^2 + 5 > 0 \ \forall \varepsilon \in \Re$

2- $\det\begin{bmatrix} \varepsilon^2 + 5 & \varepsilon + 5 \\ \varepsilon + 5 & 11 \end{bmatrix} = 10\varepsilon^2 - 10\varepsilon + 30 > 0 \ \forall \varepsilon \in \Re$

3- $\det\begin{bmatrix} \varepsilon^2 + 5 & \varepsilon + 5 & 2\varepsilon + 7 \\ \varepsilon + 5 & 11 & 8 \\ 2\varepsilon + 7 & 8 & 14 \end{bmatrix} = (8\varepsilon - 11)^2 > 0 \ \forall \varepsilon \in \left]-\infty, \frac{11}{8}\right[\cup \left]\frac{11}{8}, +\infty\right[$

La matrice est définie positive pour toutes les valeurs de $\varepsilon \in \left]-\infty, \frac{11}{8}\right[\cup \left]\frac{11}{8}, +\infty\right[$.

2-Les valeurs propres de B et son rayon spectral pour $\varepsilon = 3$.

Pour $\varepsilon = 3$.

$$B = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 13 \\ 8 & 11 & 8 \\ 13 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de B sont données par : $\det\begin{bmatrix} 14-\lambda & 8 & 13 \\ 8 & 11-\lambda & 8 \\ 13 & 8 & 14-\lambda \end{bmatrix} = 0$

==> $-\left(\lambda^2 - 38\lambda + 169\right)\left(\lambda - 1\right) = 0$ ==> $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 19 - \sqrt{192} \\ \lambda_3 = 19 + \sqrt{192} \end{cases}$

Le rayon spectral est donné par : $\rho(B) = \max\limits_{1 \le i \le 3} \left|\lambda_i(B)\right|$

$$\rho(B) = 19 + \sqrt{192}$$

Mr MEZIANI

Exercice N°3 : (07 points)

On considère le système $AX = b$, où la matrice A est définie de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et β est un paramètre réel.

1-Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre β pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.

On sait que si la matrice A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, alors les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont convergentes. Pour satisfaire cette condition, il faut imposer :

$$1 > |2(1-\beta)| ==> \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$$

2-Calcul des matrices d'itération J pour la méthode de Jacobi et G pour la méthode de Gauss-Seidel.

On pose $A = D - E - F$

Où $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 0 & -2(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- Les valeurs de β pour lesquelles les méthodes sont convergentes.

Les méthodes convergent si leurs rayons spectraux sont strictement inférieurs à 1.

On a $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|$ où $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de la matrice A.

Pour la matrice de Jacobi J, les valeurs propres sont $\lambda_1(J) = 0$, $\lambda_{2,3}(J) = \pm\sqrt{1-\beta}$

Donc $\rho(J) = \left|\sqrt{1-\beta}\right|$ et $\rho(J) < 1$ si et seulement si $1 < \beta < 2$.

Pour la matrice de Jacobi G, les valeurs propres sont $\lambda_{1,2}(G) = 0$, $\lambda_3(G) = 1-\beta$

Donc $\rho(G) = |1-\beta|$ et $\rho(G) < 1$ si et seulement si $0 < \beta < 2$.

La méthode qui converge le plus rapidement.

On voit que $\rho(G) = \rho^2(J)$==> La méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que celle de Jacobi.

Mr MEZIANI