Epreuve de Rattrapage MATH VI

Exercice N°1 : (06 points)

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 29x^3 + 72x^2 - 29x + 1,\ \ x \in \Re$. $f(x) = 0$ admet 04 racines distinctes et strictement positives.

1-Les 03 premières racines sont : $\alpha_1 = 0.0380160$, $\alpha_2 = 0.4538345$, $\alpha_3 = 2.2034461$

Calculer la 4ème racine par la méthode de Newton, avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ et $x_0 = 25$.

Soit $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

2-Calculer le déterminant de $(A - \lambda I)$ où I est une matrice unitaire de même ordre que A et $\lambda \in \Re$.

3- Déduire les valeurs propre de A.

Barème de l'exercice N°1 : (02.00+02.00+02.00) pts

Exercice N°2 : (05 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} - \cos(x)$, $f(x) = 0$ admet 0 comme racine

1- $f(x) = 0$ admet deux racines strictement positives dans l'intervalle $[1,10]$. Localiser les deux racines dans deux intervalles $I_1 = [\alpha_1, \alpha_2]$ et $I_2 = [\beta_1, \beta_2]$ tel que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des entiers et $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ avec $\alpha_2 - \alpha_1 = 1$. et $\beta_2 - \beta_1 = 1$

2- Calculer la première racine avec une précision de 10^{-2} en utilisant la méthode de Dichotomie.

Barème de l'exercice N°2 : (02.00+03.00) pts

Exercice N°3 : (04 points)

Pour $\alpha \in \Re$ donné, on considère la matrice A_α suivante :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

1-Ecrire la matrice J de la méthode itérative de Jacobi. Pour quelles valeurs de α cette méthode converge-t-elle ?

2-Ecrire la matrice G_S de la méthode de Gauss-Seidel. Pour quelle valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

Barème de l'exercice N°3 : (02.00+02.00) pts

Exercice N°4 : (05 points)

On considère le système linéaire $Ax = b$

Où $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

1- Donner la décomposition LU de la matrice A.
2- Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.
3- Déduire l'inverse de A.

Barème de l'exercice N°4 : (02.00+01.00+02.00) pts

Mr MEZIANI

Corrigé Rattrapage MATH VI 2008-2009

Exercice N°1 : (06 points)

$$f(x) = x^4 - 29x^3 + 72x^2 - 29x + 1,\ x \in \Re .$$

1-Les 03 premières racines sont : $\alpha_1 = 0.0380160$, $\alpha_2 = 0.4538345$, $\alpha_3 = 2.2034461$

Calcul de la 4ème racine par la méthode de Newton, avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ et $x_0 = 25$.

La méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{(k+1)} = x_{(k)} - \dfrac{f(x_{(k)})}{f'(x_{(k)})} \end{cases} ==> \begin{cases} x_0 = 25 \\ x_{(k+1)} = \dfrac{3x_{(k)}^4 - 58x_{(k)}^3 + 72x_{(k)}^2 - 1}{4x_{(k)}^4 - 87x_{(k)}^3 + 144x_{(k)}^2 - 29x_{(k)}} \end{cases}$$

$k = 1,\ x_1 = 26.558139$

$k = 2,\ x_2 = 26.312006$

$k = 3,\ x_3 = 26.304709$

$k = 4,\ x_4 = 26.304703$

$k = 5,\ x_1 = 26.304703$

La 4ème racine donnée avec une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ est $\alpha_4 = 26.304703$

Soit $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

2-Calcul du $Det(A - \lambda I)$

$$Det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 29\lambda^3 + 72\lambda^2 - 29\lambda + 1$$

4- Les valeurs propre de A sont données par $Det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 29\lambda^3 + 72\lambda^2 - 29\lambda + 1 = 0$

Dont les solutions sont les mêmes que celles de $f(x) = 0$

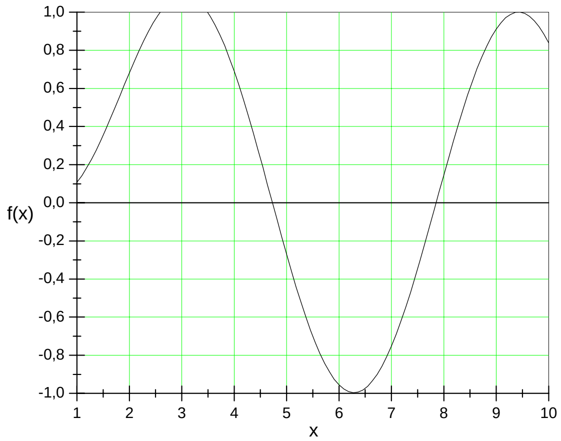
$\lambda_1 = 0.0380160$, $\lambda_2 = 0.4538345$, $\lambda_3 = 2.2034461$ et $\lambda_4 = 26.304703$

Barème de l'exercice N°1 : (02.00+02.00+02.00) pts

Mr MEZIANI

Exercice N°2 : (05 points)

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} - \cos(x)$ est donnée sur le graphe ci-dessous



1- D'après le graphe, $f(x) = 0$ admet deux racines strictement positives dans l'intervalle $[1,10]$.
La première racine est dans l'intervalle $I_1 = [4, 5]$ et la deuxième racine est dans l'intervalle $I_2 = [7, 8]$

2- Calcul la première racine avec une précision de 10^{-2} en utilisant la méthode de Dichotomie.
On a $f(4) = 0.6902626$, $f(5) = -0.2701869$

a- $f(4) * f(5) < 0$

b- $f(x)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $I_1 = [4, 5]$

On prend

$x_0 = \dfrac{4+5}{2} = 4.5$, $f(4.5) = 0.233011$ ==> $I_2 = [4.5, 5]$

$x_1 = \dfrac{4.5+5}{2} = 4.75$, $f(4.75) = -0.02030$ ==> $I_3 = [4.5, 4.75]$

$x_2 = \dfrac{4.5+4.75}{2} = 4.625$, $f(4.625) = 0.106883$ ==> $I_4 = [4.625, 4.75]$

$x_3 = \dfrac{4.625+4.75}{2} = 4.6875$, $f(4.6875) = 0.04330$ ==> $I_5 = [4.6875, 4.75]$

$x_4 = \dfrac{4.6875+4.75}{2} = 4.71875$, $f(4.71875) = 0.01149$ ==> $I_6 = [4.71875, 4.75]$

$x_5 = \dfrac{4.71875+4.75}{2} = 4.734375$, $f(4.734375) = -0.0044$ ==> $I_7 = [4.71875, 4.734375]$

$x_6 = \dfrac{4.71875+4.734375}{2} = 4.7265625$, $f(4.7265625) = 0.0035$

==> $I_8 = [4.77265625, 4.734375]$

$x_7 = \dfrac{4.7265625+4.734375}{2} = 4.73046875$, $f(4.73046875) = -0.00043$

==> $I_9 = [4.7265625, 4.73046875]$

Mr MEZIANI

Barème de l'exercice N°2 : (02.00+03.00) pts

$$x_8 = \frac{4.7265625 + 4.73046875}{2} = 4.728515625, \quad f(4.728515625) = 0.0015$$

$$\Longrightarrow I_{10} = [4.728515625, 4.73046875]$$

$$x_9 = \frac{4.728515625 + 4.73046875}{2} = 4.729492188, \quad f(4.729492188) = 0.00055$$

$$\Longrightarrow I_{11} = [4.729492188, 4.73046875]$$

$$x_{10} = \frac{4.729492188 + 4.73046875}{2} = 4.729980469$$

Après 10 itérations, on obtient la première racine avec une précision de 10^{-2}

Exercice N°3 : (04 points)

Pour $\alpha \in \Re$ donné, on considère la matrice A_α suivante :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

1- La matrice J de la méthode itérative de Jacobi.

$$A_\alpha = D - E - F\ ,\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha/2 & 0 \\ -\alpha/2 & 0 & -\alpha/2 \\ 0 & -\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valeurs de α pour lesquelles cette méthode converge.

Il faut que $\rho(J) = Max|\lambda_i| < 1$

$$Det(J - \lambda I) = \lambda\left(\frac{\alpha^2}{2} - \lambda^2\right) = 0 \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \text{ et } \lambda_3 = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\rho(J) = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right| < 1 \implies -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$$

2-La matrice G_S de la méthode de Gauss-Seidel.

$$G_S = (D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha/2 & 0 \\ 0 & \alpha^2/4 & -\alpha/2 \\ 0 & -\alpha^3/8 & \alpha^2/4 \end{bmatrix}$$

Valeurs de α pour lesquelles cette méthode converge.

Il faut que $\rho(G_s) = Max|\lambda_i| < 1$

$$Det(G_s - \lambda I) = -\lambda^2\left(\lambda - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\rho(G_S) = \frac{\alpha^2}{2} < 1 \implies -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$$

Barème de l'exercice N°3 : (02.00+02.00) pts

Mr MEZIANI

Exercice N°4 : (05 points)

On considère le système linéaire $Ax = b$

Où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$

1-La décomposition LU de la matrice A.

$$A = LU \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 21/25 & 14/25 \\ 0 & 0 & 4/15 \end{bmatrix}$$

2-Résolution du système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.

On a $Ax = b \Longrightarrow LUx = b \Longrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta - 2\alpha/5 \\ \gamma - 2\beta/3 - \alpha/3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 21/25 & 14/25 \\ 0 & 0 & 4/15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta - 2\alpha/5 \\ \gamma - 2\beta/3 - \alpha/3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45\alpha/28 + 5\beta/14 - 5\gamma/4 \\ 5\alpha/14 + 20\beta/7 - 5\gamma/2 \\ -5\alpha/4 - 5\beta/2 + 15\gamma/4 \end{Bmatrix}$$

3-Déduire l'inverse de A.

On a

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 45/28 & 5/14 & -5/4 \\ 5/14 & 20/7 & -5/2 \\ -5/4 & -5/2 & 15/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = A^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 45/28 & 5/14 & -5/4 \\ 5/14 & 20/7 & -5/2 \\ -5/4 & -5/2 & 15/4 \end{bmatrix}$$

Barème de l'exercice N°4 : (02.00+01.00+02.00) pts

(01 pt)

Mr MEZIANI