Epreuve de Moyenne Durée

Exercice N°1 : (08 points)

On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ dans l'intervalle $]0, 4[$.

1-Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans l'intervalle $]0, 4[$ et trouver α de façon analytique. ***(01 pt)***

2-Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour calculer α ? Justifier votre réponse. ***(01 pt)***

3-Pour approcher le zéro α on considère les méthodes de point fixe $x^{(k+1)} = \varphi_i\left(x^{(k)}\right), i = 1,2,3$, avec :

$$\varphi_1(x) = x + 4e^{x/4} - 6 \;;\; \varphi_2(x) = x - 4 + 6e^{-x/4} \;;\; \varphi_3(x) = x - \frac{e^{x/4}}{16} + \frac{3}{32}$$

Etablir si les trois méthodes sont convergentes ***(03 pts)***

4-Pour la méthode de fonction $\varphi_3(x) = x - \frac{e^{x/4}}{16} + \frac{3}{32}$, déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-6}, lorsqu'on a choisi $x^{(0)}$ tel que $\left|x^{(0)} - \alpha\right| < 2$. ***(03 pts)***

Exercice N°2 : (06 points)

On considère le système $AX = b$

Où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$; $b = \begin{Bmatrix} 5 \\ -6 \end{Bmatrix}$

1-Calculer la matrice G de Gauss-Seidel associée au système. ***(01 pt)***

2- En partant de la relation $AX = b$, montrer que $(D - E)^{-1} b = X - GX$. ***(01 pt)***

et en déduire que : $X^{(k+1)} - X^{(k)} = -(I - G)\left(X^{(k)} - X\right)$ ***(01 pt)***

3- Déduire alors de ce qui précède que : $\left\|X^{(k)} - X\right\|_2 = \left\|(I - G)^{-1}\right\|_2 \left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_2$ ***(01 pt)***

4- Calculer $\left\|(I - G)^{-1}\right\|_2$ et en déduire que $\left\|X^{(k)} - X\right\|_2 \leq 2\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_2$ ***(01 pt)***

5-En déduire une condition suffisante pour avoir $\left\|X^{(k)} - X\right\|_2 \leq 10^{-3}$. ***(01 pt)***

Exercice N°2 : (06 points)

Considérons le système linéaire $AX = b$ dont la matrice est tri-diagonale et inversible :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & . & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & . & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Les matrices de la factorisation LU de la matrice A sont bi-diagonales de la forme :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & \beta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & . & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Donner les expressions des coefficients α_i, β_i et γ_i en fonction des coefficients de A, en utilisant $A = LU$.

Corrigé Epreuve de Moyenne Durée

EXERCICE 1- : (08 Pts)

1-on a $f(0)=-2<0$, $f(4)=4e-6>0$; $f(x)$ étant continue, $\exists\alpha\in[0,4]$ tel que $f(\alpha)=0$ $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0,4]$ donc α est unique. ***(0.5 pt)***

Son expression analytique est donnée par : $f(\alpha)=4e^{\alpha/4}-6=0 \Longrightarrow \alpha=4\ln\frac{3}{2}$

(0.5 pt)

2- Vu que $f(0)f(4)<0$ et $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0,4]$; on peut bien appliquer la méthode de bissection pour calculer le zéro α . ***(1 pt)***

3. Pour prouver que les méthodes sont convergentes, il faut vérifier que :

1- $\forall x\in[0,4],\ \Phi_i(x)\in[0,4]$

2- $|\Phi_i'(x)|<1$ pour $x\in\,]0,4[$

$\Phi_1(x)=x+4e^{x/4}-6$, $\Phi_1'(x)=1+e^{x/4}$ est toujours positif dans l'intervalle $[0,4]$, donc $\Phi_1(x)=x+4e^{x/4}-6$ est strictement croissante.

On a $|\Phi_1'(\alpha)|=\frac{5}{2}>1$ donc la méthode du point fixe $x=x+4e^{x/4}-6$ diverge. ***(1 pt)***

$\Phi_2(x)=x-4+6e^{-x/4}$, $\Phi_2'(x)=1-\frac{6}{4}e^{-x/4}$ change de signe dans l'intervalle $[0,4]$. La condition 2 n'est pas vérifiée donc la méthode $x=x-4+6e^{-x/4}$ diverge ***(1 pt)***

$\Phi_3(x)=x-\frac{e^{x/4}}{16}+\frac{3}{32}$, $\Phi_3'(x)=1-\frac{e^{x/4}}{64}$ est toujours positif dans l'intervalle $[0,4]$, donc $\Phi_3(x)=x-\frac{e^{x/4}}{16}+\frac{3}{32}$ est strictement croissante.

On a $|\Phi_3'(\alpha)|=\frac{125}{128}<1$, la méthode du point fixe $x=x-\frac{e^{x/4}}{16}+\frac{3}{32}$ converge ***(1 pt)***

4- On a :

$|x^{(k+1)}-\alpha|=|\Phi_3(x^{(k)})-\Phi_3(\alpha)|=|\Phi_3'(\xi)(x^{(k)}-\alpha)|\le C|x^{(k)}-\alpha|$ ***(1 pt)***

Où $\xi\in(0,4)$ et $C=\max_{\xi\in[0,4]}|\Phi_3'(\xi)|=1-\frac{1}{64}$ ***(1 pt)***

Comme

$|x^{(k)}-\alpha|\le C^n|x^{(0)}-\alpha|=2C^n$, on veut trouver le plus petit des n tels que $2C^n<10^{-6}$. Donc $n>\frac{\ln 2+6\ln 10}{-\ln C}=\frac{\ln 2+6\ln 10}{\ln(64/63)} \Longrightarrow n\ge 921$ ***(1 pt)***

EXERCICE 1 : (06 Pts)

On considère le système : $AX = b$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} ;\ X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} ;\ b = \begin{Bmatrix} 5 \\ -6 \end{Bmatrix}$$

1-Calcul de la matrice de Gauss-Seidel G associée au système :

On pose $A = D - E - F$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a $G = (D - E)^{-1} F$

$$D - E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\ (D - E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$G = (D - E)^{-1} F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

2-On pose $A = D - E - F$

Où $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ;\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ***(1 pt)***

2-Le système $AX = b$ s'écrit alors $(D - E - F)X = b$

D'où $(D - E)X = FX + b \Rightarrow X = (D - E)^{-1} FX + (D - E)^{-1} b = GX + (D - E)^{-1} b$

=> $(D - E)^{-1} b = X - GX$ ***(1 pt)***

On écrit le processus itératif :

$X^{(K+1)} - GX^{(K)} = (D - E)^{-1} b \Rightarrow X^{(K+1)} - X^{(K)} - GX^{(K)} = (D - E)^{-1} b - X^{(K)}$ (a)

$X - GX = (D - E)^{-1} b \Rightarrow X - X^{(K)} - GX = (D - E)^{-1} b - X^{(K)}$ (b)

'a)=(b) => $X^{(K+1)} - X^{(K)} = X^{(K)} - X - GX + GX^{(K)}$

$$X^{(K+1)} - X^{(K)} = -(I - G)\left(X^{(K)} - X\right)$$ ***(1 pt)***

3- On a $X^{(K+1)} - X^{(K)} = -(I - G)\left(X^{(K)} - X\right)$

=> $\left(X^{(K)} - X\right) = -(I - G)^{-1}\left(X^{(K+1)} - X^{(K)}\right)$

=> $\left\|X^{(K)} - X\right\|_2 = \left\|(I - G)^{-1}\left(X^{(K+1)} - X^{(K)}\right)\right\|_2 = \left\|(I - G)^{-1}\right\|_2 \left\|X^{(K+1)} - X^{(K)}\right\|_2$ ***(1 pt)***

4- Calcule de $\left\|(I-G)^{-1}\right\|_2$

On a $G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$, $I-G=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{13}{12}\end{bmatrix}$ $(I-G)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{4}{13}\\ 0 & \frac{12}{13}\end{bmatrix}$

On a la définition $\|A\|_2=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\left\|(I-G)^{-1}\right\|_2=\left[1+\frac{16}{169}+\frac{144}{169}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{329}{169}}=\sqrt{1,9467}=1,3952$$

D'où $\left\|X^{(K)}-X\right\|_2=1,3952\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|_2\leq 2\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|_2$ ***(01 pt)***

La condition suffisante pour avoir $\left\|X^{(k)}-X\right\|_2\leq 10^{-3}$

On a $\left\|X^{(K)}-X\right\|_2\leq 2\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|_2$

$\left\|X^{(k)}-X\right\|_2\leq 10^{-3}$ ==> $1,3952\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|_2\leq 10^{-3}$ ==> $\left\|X^{(K+1)}-X^{(K)}\right\|_2\leq 0.716.10^{-3}$

(01 pt)

EXERCICE 3 : (06 Pts)

On a

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & b_n & c_n \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & \beta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & 0 & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Le produit LU donne

$$LU=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \alpha_1\beta_2 & \beta_2\gamma_1+\alpha_2 & \gamma_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & \alpha_{n-2}\beta_{n-1} & \beta_{n-1}\gamma_{n-2}+\alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & \alpha_{n-1}\beta_n & \beta_n\gamma_{n-1}+\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & b_n & c_n \end{bmatrix}=A$$

D'où

$\beta_i=\dfrac{b_i}{a_{i-1}}$ pour $2<i<n$ ***(02 pts)***

$\gamma_i=c_i$ pour $1<i<n-1$ ***(02 pts)***

$\alpha_1=a_1$, $\alpha_i=a_i-\beta_i\gamma_{i-1}=a_i-\dfrac{b_i}{a_{i-1}}c_{i-1}$ pour $2<i<n$ ***(02 pts)***