جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

Campus El Kseur
1ère année Informatique L.M.D
A.U : 2023/2024

ANALYSE I - TD N° 1 (CORPS DES NOMBRES RÉELS)

Exercice 1. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *deux parties bornées non vides de* $\mathbb{R}$.

1) *Montrer que* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Longrightarrow \sup \mathbb{A} \leqslant \sup \mathbb{B}$ *et* $\inf \mathbb{A} \geqslant \inf \mathbb{B}$.

2) *On désigne par* $-\mathbb{A} = \{-x,\ x \in \mathbb{A}\}$. *Montrer que*

$$\inf(-\mathbb{A}) = -\sup(\mathbb{A}) \ \textit{ et } \ \sup(-\mathbb{A}) = -\inf \mathbb{A}.$$

3) *Montrer que*

$$\sup(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \max(\sup \mathbb{A}, \sup \mathbb{B}) \ \textit{ et } \ \inf(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \min(\inf \mathbb{A}, \inf \mathbb{B}).$$

Exercice 2. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *deux parties de* $\mathbb{R}$, *non vides et majorées. On note*

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in \mathbb{A}, \exists y \in \mathbb{B},\ z = x + y\}.$$

Montrer que

$$\sup(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B}.$$

Exercice 3. *Montrer que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \ \textit{ et } \ \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Exercice 4. *Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum ; s'ils existent :*

$$\mathbb{A}_1 = [0, 2[\,,\ \mathbb{A}_2 =]-1, 0] \cup \{3,\ 5\},\ \mathbb{A}_3 = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$\mathbb{A}_4 = \left\{\sin\frac{2n\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}\right\},\ \mathbb{A}_5 = \{-x^2 + 2x,\ x \in]1, 2[\ \}.$$

Exercice 5.

1) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :*

$$|x + 3| = 5.$$

2) *Montrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\textbf{\textit{a)}}\ |x + y| \leqslant |x| + |y|,\ \textbf{\textit{b)}}\ ||x| - |y|| \leqslant |x - y|,\ \textbf{\textit{c)}}\ |x| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

3) *Montrer que* $\forall (x_1,\ x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|.$$

Exercice 6. *Soit* E *la fonction entière sur* $\mathbb{R}$.

a) *Donner* $E(-11, 2)$, $E(4)$, $E(\sqrt{3})$, $E(-7\pi)$.

b) *Démontrer les résultats suivants*

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Longrightarrow E(x) \leqslant E(y)$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, E(x + p) = E(x) + E(p)$.
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x + y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.